

T2 : SURFACES DE RIEMANN

Exercice 1. Soient X et Y des surfaces de Riemann compactes et $f: X \rightarrow Y$ une application holomorphe. Montrer les faits suivants :

- (1) f est surjective si et seulement si elle est non constante.
- (2) f est injective si et seulement si elle est un biholomorphisme.
- (3) Si f est non constante, la somme $\sum_{f(x)=y} \text{mult}_x(f)$ est finie et ne dépend pas de y .

Exercice 2. Montrer les faits suivants :

- (1) Les applications holomorphes $f: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont les fractions rationnelles.
- (2) Une telle application est un polynôme si et seulement si $f^{-1}(\infty) \subset \{\infty\}$.
- (3) Un polynôme de degré $d \geq 1$ admet exactement d racines comptées avec multiplicités.

Exercice 3. Soit X une surface de Riemann. Montrer les faits suivants :

- (1) Si $f: X' \rightarrow X$ est un revêtement topologique, il existe une unique structure de surface de Riemann sur X' telle que f est holomorphe.
- (2) Toute application holomorphe entre surfaces de Riemann se relève à une application holomorphe entre revêtements universels.
- (3) Toute application holomorphe $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est constante. (On admettra que tout revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est biholomorphe au disque.)

Exercice 4. Soient $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{C}$ deux réseaux et $E = \mathbb{C}/\Lambda$, $E' = \mathbb{C}/\Lambda'$ les tores complexes associés. Montrer les faits suivants :

- (1) Toute fonction entière f invariante sous Λ est constante.
- (2) Toute application holomorphe $f: E \rightarrow E'$ telle que $f(0) = 0$ est de la forme $z \mapsto az$ pour $a \in \mathbb{C}$ tel que $a\Lambda \subset \Lambda'$.
- (3) E et E' sont biholomorphes si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{C}^\times$ tel que $t\Lambda = \Lambda'$.
- (4) Si $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ et $\Lambda' = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau'$ avec $\text{Im } \tau, \text{Im } \tau' > 0$, alors E et E' sont biholomorphes si et seulement si

$$\text{il existe } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{tel que} \quad \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

- (5) Les seules tores complexes ayant des automorphismes $\neq \pm \text{id}$ sont $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[e^{2\pi i/6}]$.
- (6) Si $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$, alors E admet des endomorphismes $\neq \pm \text{id}$ si et seulement si τ appartient une extension quadratique imaginaire K . Dans ce cas $\text{End}(E) \subset K$ est un ordre.

Exercice 5. Une forme modulaire de poids k est une fonction méromorphe $f: \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ telle que

$$(*) \quad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{1}{(cz+d)^k} f(z) \quad \text{pour tout} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Montrer les faits suivants :

- (1) Une fonction $f: \{\text{réseaux dans } \mathbb{C}\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est telle que la fonction $\tau \mapsto f(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$ satisfait $(*)$ si et seulement si $f(t\Lambda) = f(\Lambda)/t^k$ pour tout $t \in \mathbb{C}^\times$.

(2) Pour tout réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$, la série

$$G_k(\Lambda) = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^k}$$

converge normalement pour $k \geq 3$ et s'annule pour k impair.

(3) La fonction $\tau \mapsto G_k(\tau) := G_k(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$ est une forme modulaire de poids k .

(4) Pour $k \geq 4$ pair on a $\lim_{\text{Im } \tau \rightarrow \infty} G_k(\tau) = 2\zeta(k)$.

Exercice 6. Soit $f: \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une forme modulaire de poids $2k$ méromorphe à l'infini. Alors

$$\sum_{x \in X \setminus \{[i], [\rho]\}} \text{ord}_x(f) + \text{ord}_\infty(f) + \frac{1}{2} \text{ord}_i(f) + \frac{1}{3} \text{ord}_\rho(f) = \frac{k}{6},$$

où $\rho = e^{2\pi i/6}$, $X = \mathfrak{H}/\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $[\tau] \in X$ désigne la classe de $\tau \in \mathfrak{H}$.

Exercice 7. On considère les formes modulaires suivantes :

$$g_2 = 60G_4, \quad g_3 = 140G_6, \quad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2, \quad j = 1728 \frac{g_2^3}{\Delta}.$$

Montrer les faits suivants :

- (1) $\Delta(\tau)$ est le discriminant du polynôme $4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$.
- (2) Δ est une forme modulaire de poids 12, ne s'annule jamais sur $\mathfrak{H}$ et elle a un zéro simple à l'infini.
- (3) La fonction j est une forme modulaire de poids 0, est holomorphe sur $\mathfrak{H}$ et elle induit un biholomorphisme $\mathfrak{H}/\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}$.