

# DYNAMIQUE ARITHMÉTIQUE & UNIFORMITÉ

(d'après De Marco - Krieger - Ye et Poincaré)

---

## §1. INTRODUCTION

### 1.1 Énoncés

\*  $E/\mathbb{C}$  courbe elliptique = SdR cpte  $E$  de genre 1  
+  $o \in E$

\*  $\pi: E \rightarrow \mathbb{P}^1$  projection standard si  $\pi \in H^0(E, \mathcal{O}(P+Q))$   
avec  $P+Q = o$

Rq:  $\text{Ram}(\pi) = \pi(E[2])$  4 pts

e.g.  $E: y^2 = P(x)$   $P \in \mathbb{C}[x]$  deg 3 racines simples  
 $\pi(x, y) = x$   $\text{Ram}(\pi) = \infty, \text{ racines de } P$

\*  $(E_1, \pi_1) \cong (E_2, \pi_2)$  si  $\pi_1(E_1[2]) = \pi_2(E_2[2])$ .

Conjecture (Bogomolov-Fu-Tschinkel) :  $\exists C > 0$  t.q.

$$|\pi_1(E_1^{\text{tors}}) \cap \pi_2(E_2^{\text{tors}})| < C$$

pour tout  $(E_1, \pi_1) \neq (E_2, \pi_2)$  définies sur  $\bar{\mathbb{Q}}$ .

But: donner une preuve!

## 1.2 Relation avec Manin - Mumford

$A/\mathbb{C}$  variété abélienne

$X \subset A$  sous-variété (fermée) intègre

Th (Raynaud) :  $\overline{X \cap A^{\text{tors}}} = X \implies X = \mathbb{B} + a \exists B \subset A$   $\mathbb{B}$   $\mathbb{Q}$ -var. ab.  
" Conj. de Manin-Mumford "

Cor :  $X$  surface de Riemann compacte genre  $g \geq 2$ .

$$A = \text{Jac}(X)$$

$$P \in X \rightsquigarrow \alpha_P : \begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & A \\ x & \mapsto & x - P \end{array}$$

$$\implies |\alpha_P(X) \cap A^{\text{tors}}| < +\infty.$$

Question : (Mazur, David-Philippon) : Borne unif en  $g$  ?

Réponse : (Dimitrov - Gao - Habegger, Kühne) : OUI !

## 1.3 Un exemple : courbes bielliptiques

$X$  bielliptique genre 2 ie  $\exists X \xrightarrow{2:1} E$   
courbe elliptique

Fait :  $|\alpha_P(X) \cap \text{Jac}(X)^{\text{tors}}| \begin{cases} \leq 2 & \text{si } P \text{ n'est pas Weierstrass} \\ \geq 6 & \text{si } P \text{ Weierstrass} \end{cases}$

(Weierstrass = fixe sous involution hyperelliptique)

$\mathbb{P}_q$  (Jacobi?)  $X$  admet équation affine

$$X: y^2 = x^6 - s_1 x^4 + s_2 x^2 - 1$$

et vient avec 2 revêtements

$$f_1: X \longrightarrow E_1: y^2 = x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - 1$$

$$(x, y) \longmapsto (x^2, y)$$

$$f_2: X \longrightarrow E_2: y^2 = x^3 - s_2 x^2 + s_1 x - 1$$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{1}{x^2}, \frac{iy}{x^3}\right)$$

Projections standard:

$$\pi_1: E_1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$(x, y) \longmapsto x$$

Ram:  $\infty$ , racines de  $P$

$$\pi_2: E_2 \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{x}$$

Ram:  $0$ , racines de  $P$

$$X \xrightarrow{f=(f_1, f_2)} E_1 \times E_2 \xrightarrow{\pi=(\pi_1, \pi_2)} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

$$(x, y) \longmapsto (x^2, x^2)$$

$$\longrightarrow \{ \text{pts de Weierstrass} \} = (\pi \circ f)^{-1} \left( \pi_1(E_1[2]) \cap \pi_2(E_2[2]) \right).$$

$\text{Jac}(X) \longrightarrow E_1 \times E_2$  isogénie de deg 4.

$$\implies \left| \nu_P(X) \cap \text{Jac}(X)^{\text{tors}} \right| \leq 16 \left| \pi_1(E_1^{\text{tors}}) \cap \pi_2(E_2^{\text{tors}}) \right|$$

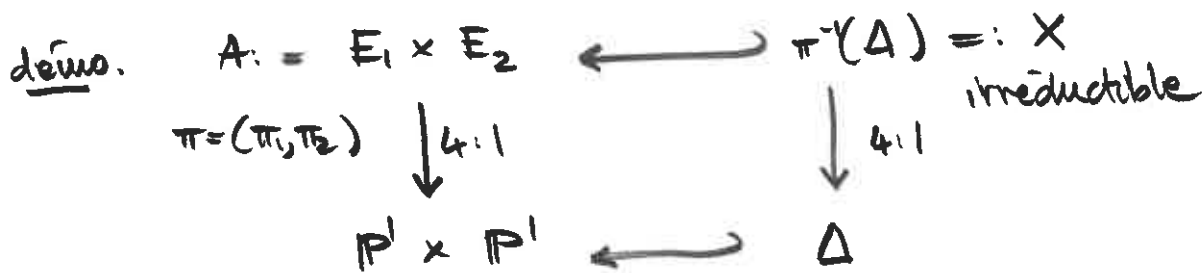
$$\leq 16 \cdot C$$

BFT

$\mathcal{P}$  Weierstrass

# 1.4 Finitude (sans uniformité)

Lemme (BT) :  $(E_1, \pi_1) \neq (E_2, \pi_2) \implies |\pi_1(E_1^{\text{tors}}) \cap \pi_2(E_2^{\text{tors}})| < \infty$

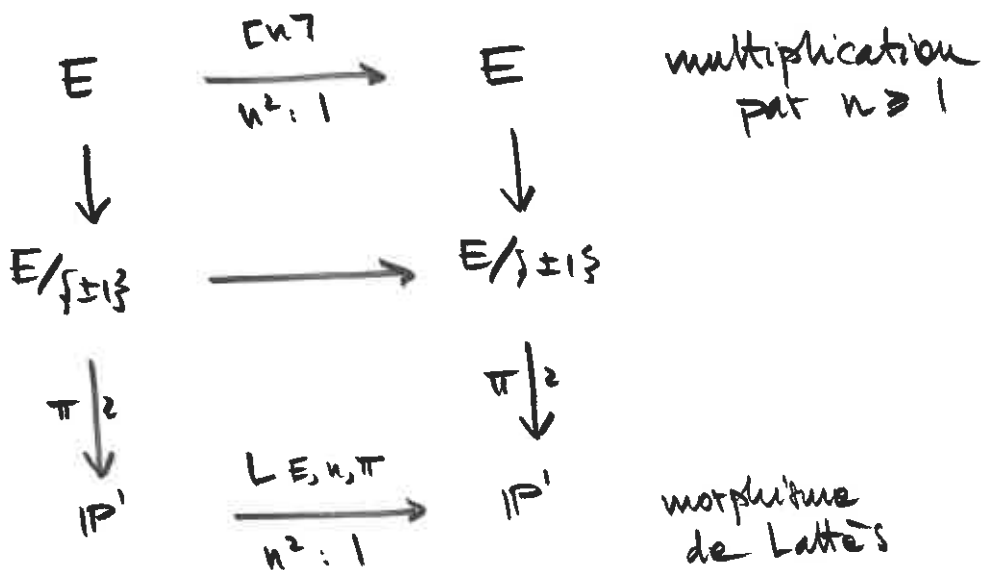


$\implies$  MM  $\pi(X \cap A^{\text{tors}}) = \{(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1) : P \in \pi_1(E_1^{\text{tors}}) \cap \pi_2(E_2^{\text{tors}})\}$  }  
 fini! □

# 1.5 Morphismes de Lattès

$E$  courbe elliptique /  $k$  corps car( $k$ ) = 0.

$\pi: E \rightarrow \mathbb{P}^1$  projection standard



eg.  $n=2$   $E: y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$   $\pi(x,y) = x$

$L_{E,2,\pi}: t \mapsto \frac{(t^2 - \lambda)^2}{4t(t-1)(t-\lambda)}$

⚠  $\pi(E^{\text{tors}}) = \{ \text{pts pré-périodiques pour } L_{E,n,\pi} \}$

## §2. Dynamique algébrique complexe

$X$  variété proj lisse /  $\mathbb{C}$  ( $= \mathbb{P}^1$ )

$L$  fibré en droites ample /  $X$  ( $= \mathcal{O}(1)$ )

### 2.1 Métriques

métrique continue sur  $L$ :

$$\begin{array}{ccc} \|\cdot\| : L & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \downarrow \text{continue} & \\ & X & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{norme sur les fibres} \\ \|\cdot\|(x) : L_x \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ s \longmapsto \|s\|(x) \end{array}$$

Exemple: 1)  $X = \mathbb{P}(V)$   $L = \mathcal{O}(1)$

\*  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$  norme hermitienne

\*  $s \in L_x$  forme linéaire sur

$$\mathcal{O}(1)_x = \{v \in V \mid v \in D_x\}$$

$\uparrow$   $D_x \subset V$  droite vectorielle corr à  $x$ .

\*  $\|s\|(x) = \frac{|s(v)|}{\|v\|}, 0 \neq v \in \mathcal{O}(1)_x$

métrique  
de Fubini-Study

2)  $N \geq 1$   $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L^{\otimes N})^*)$  immersion fermée

$$i^* \mathcal{O}(1) \cong L^{\otimes N}$$

$\|\cdot\|$  norme herm sur  $V = H^0(X, L^{\otimes N})^*$

$\longrightarrow \|\cdot\|$  métrique Fubini-Study sur  $\mathcal{O}(1)$

$\longrightarrow (i^* \|\cdot\|)^{1/N}$  métrique sur  $L$  "métrique modèle" 5

$\|\cdot\|$  psh si continue et limite uniforme  
de métriques modèle

### mesure de Monge-Ampère

$\|\cdot\|$  métrique psh

$$MA(L, \|\cdot\|) = c(L, \|\cdot\|)^{\wedge d} \text{ sur } X$$

matrice herm.

$$c^{\infty} = \det \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) dz_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_1 \geq 0$$

$u = -\log \|s\|$ ,  $s$  triv. locale

$z_1, \dots, z_n$  coord. loc.

2.2 Mesure d'équilibre :  $f: X \rightarrow X$ ,  $f^*L \cong L^{\otimes d}$   
 $d \geq 2$

\*  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  métriques continues /  $L$

$$\frac{\|\cdot\|_1}{\|\cdot\|_2} : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \text{ continue}$$

$$\delta(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2) = \sup_X \left| \log \frac{\|\cdot\|_1}{\|\cdot\|_2} \right| > 0$$

\*  $\|\cdot\|^{(0)} := \|\cdot\|$

$\|\cdot\|^{(1)} := (f^* \|\cdot\|^{(0)})^{1/d}$  métrique sur  $L$

$\vdots$   
 $\|\cdot\|^{(n)} := (f^* \|\cdot\|^{(n-1)})^{1/d}$

$$\delta(\|\cdot\|_1^{(n)}, \|\cdot\|_2^{(n)}) = \frac{1}{d^n} \delta(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

def.  $\|\cdot\|_f := \lim_{n \rightarrow \infty} \|\cdot\|^{(n)}$  conv. unif.

unique métrique continue tq  $f^*(\|\cdot\|_f) \cong (L, \|\cdot\|_f)$  isométrie

- Rq:
- 1)  $\|\cdot\|$  psh  $\Rightarrow \|\cdot\|^{(n)}$  psh
  - 2) conv. unif de psh est psh
  - 3)  $\|\cdot\|_f$  se calcul à partir de n'importe quelle métrique.

$\longrightarrow \|\cdot\|_f$  psh.

def.  $\mu_f = \text{MA}(L, \|\cdot\|_f)$  mesure d'équilibre

\* mesure de Radon  $\geq 0$

\*  $f^* \mu_f = d \cdot \mu_f$ .

### 3. Dynamique algébrique non-arch.

$k$  corps non-arch. complet

$C = \mathbb{Q}_p$  (n'importe quel corps avec val. abs. triv.)

#### 3.1 Espaces de Berkovich.

$X/k$  var. algébrique

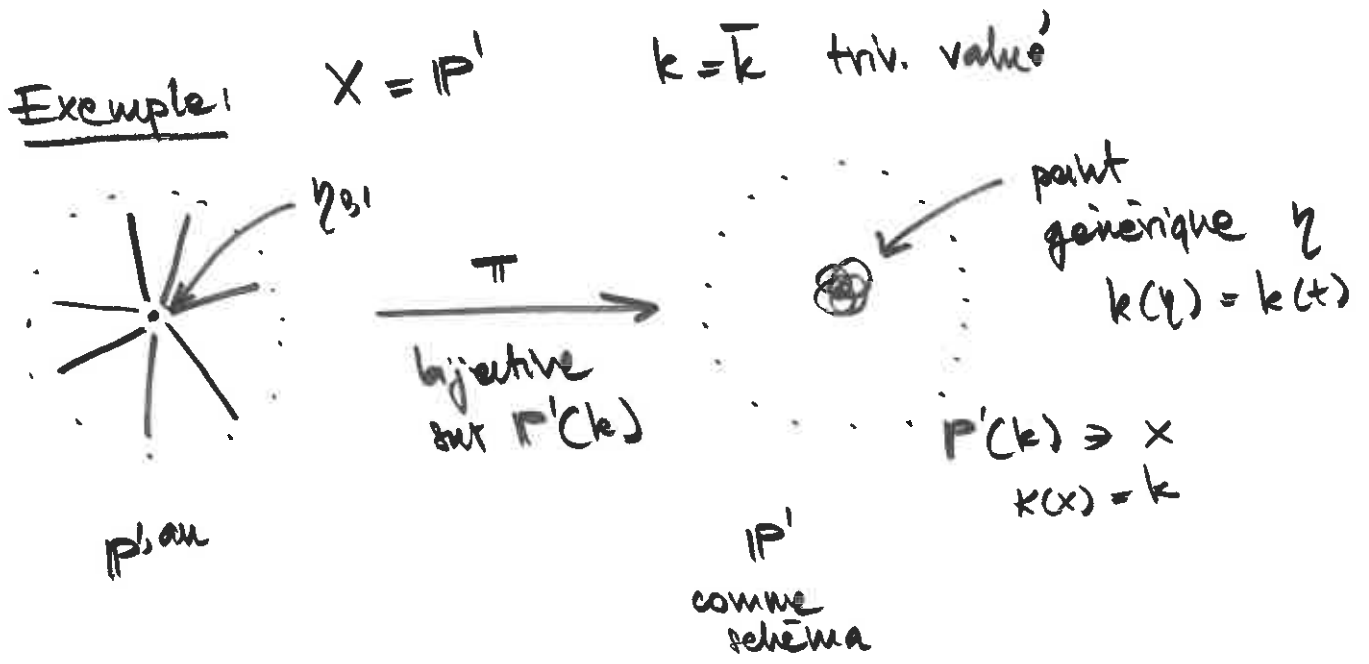
$(x, \|\cdot\|) \in X^{\text{an}} = \{ (x, \|\cdot\|) : x \in X, \text{vu comme schéma} \}$

$\downarrow \quad \pi \downarrow$   
 $x \quad X$

$\left. \begin{array}{l} k \\ n \end{array} \right\} \text{corps résiduel}$

$\|\cdot\| : K(x) \rightarrow \mathbb{R}_+ \}$   
 val. abs. qui étend celle sur  $k$ .

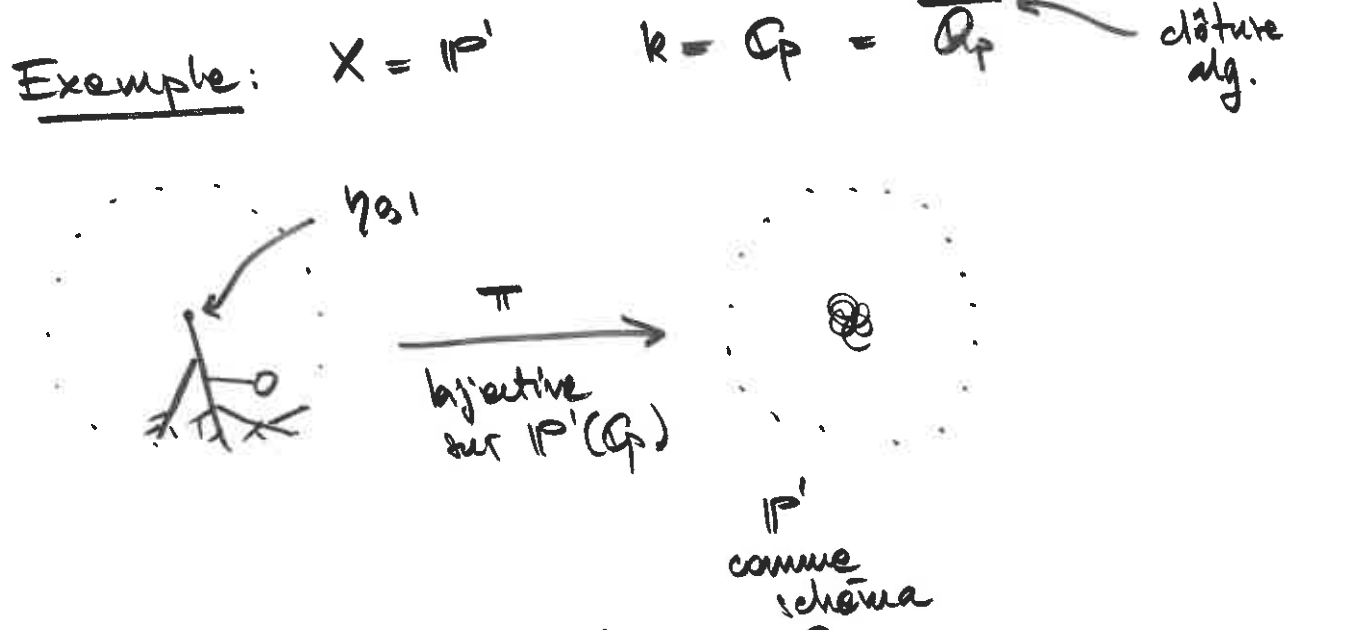
Fact.  $X$  au séparé, loc. compact, loc. convexe par arcs, loc. contractile.



Autres points:  $r \in (0,1)$   $x \in P^1(k)$

$\eta_{x,r} : f \in k(t) \mapsto r - \text{ord}_x(f)$

completion  $\hat{\mathcal{O}}_x$   
 clôture alg.  $\hat{\mathcal{O}}_x$



Autres points:  $r \in (0,1)$   $a \in \mathbb{C}_p$

$\eta_{a,r} : f = \sum c_i (z-a)^i \mapsto \max \{ |c_i| r^i \}$

$\eta_{a,r} = \eta_{b,r}$  ssi  $|a-b| \leq r$   
 + autres points "pathologiques"



### 3.2 Métriques.

\* métrique psh : même définition avec normes

$$V \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x = \sum x_i e_i \longmapsto \max \{ |x_i| r_i \} \quad e_1, \dots, e_n \text{ base} \\ r_1, \dots, r_n > 0$$

\*  $f: X \rightarrow X$ ,  $f^* L \cong L^{\text{ad}} \rightsquigarrow \|\cdot\|_f$  métrique psh.

\*  $M_f = \text{MA}(L, \|\cdot\|_f)$  (plus compliqué')

Exemple:  $X = \mathbb{P}^1$   $L = \mathcal{O}(1)$

$$s \in L_x \quad \|s\|_f(x) = \frac{|s(x)|}{\max \{ |x_0|, |x_1| \}} \\ \uparrow \\ x = [x_0 : x_1]$$

$$\text{MA}(L, \|\cdot\|) = \text{Drae en } \eta_{B1}.$$

## 4. Énoncés principaux

### 4.1 Énergie mutuelle

$\mu, \mu'$  mesures sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  + hyp de rég...

$$C(\mu, \mu') = \int_{\mathbb{C}^2, \Delta} \log |z - z'| \, d\mu(z) \, d\mu(z') \\ (\text{Favre, Rivera-Letelier})$$

$$\langle \mu, \mu' \rangle = \frac{1}{2} C(\mu - \mu', \mu - \mu')$$

\* analogue non-archimédien

## 4.2 Espace de modules

$$a = (a_1, \dots, a_4) \in (\mathbb{P}^1)^4 \quad a_i \neq a_j \quad i \neq j.$$

$$E_a \text{ ramifié} \\ \text{en } a_1, \dots, a_4 \\ 2:1 \downarrow \pi_a \\ \mathbb{P}^1$$

On choisit élément neutre sur  $E$  au-dessus de  $a_1$ .

$$\longrightarrow \{a_1, \dots, a_4\} = \pi(E[2])$$

$$\longrightarrow \pi_a(E_a^{\text{tors}}) \text{ indépendant de choix.}$$

$$(a, b) \quad C = \left\{ (a, b) \in (\mathbb{P}^1)^4 \times (\mathbb{P}^1)^4 \mid \begin{array}{l} a_i \neq a_j, b_i \neq b_j \quad i \neq j \\ \{a_1, \dots, a_4\} \neq \{b_1, \dots, b_4\} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ [a:b] \quad M = C / \text{PGL}_2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5 \end{array}$$

## 4.3 Mesures d'équilibre adéliques

$$L_a = L_{E_a, 2, \pi_a} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})^4 \rightsquigarrow v \text{ place de } \mathbb{Q}$$

$\mu_{a,v}$  mesure d'équilibre  $v$ -adique pour  $L_a$

$$\langle \mu_a, \mu_b \rangle = \sum_v \langle \mu_{a,v}, \mu_{b,v} \rangle.$$

Th A (Pomeau). Il existe  $c_1 > 0$  et  $c_2 \in \mathbb{R}$  tq.

$$\langle \mu_a, \mu_b \rangle \geq c_1 h([a:b]) + c_2$$

↑  
hauteur de  $[a:b] \in \mathbb{P}^5$

Th B (P.) Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $C(\varepsilon) > 0$  tq.

$$\langle \mu_a, \mu_b \rangle \leq \left( \varepsilon + \frac{C(\varepsilon)}{N_{a,b}} \right) (h([a:b]) + 1)$$

$$N_{a,b} = \# \left( \pi_a(E_a^{\text{tors}}) \cap \pi_b(E_b^{\text{tors}}) \right).$$

Th A + Th B = Conj. BFT.

## 5. Étapes pour Th A

- ① Continuité de  $(a, b, v) \mapsto \langle \mu_{a,v}, \mu_{b,v} \rangle$ .
- ② "Minoration centrale":  
calcul explicite d'énergies mutuelles  
en valuation triviale
- ③ Propagation de la "minoration centrale"  
par continuité