

# I Espaces de Banach

## I.1 Spectre de Banach

- Soit  $A$  - anneau comm. unit. et

$$\|\cdot\|: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Déf.  $\left. \begin{array}{l} \|0\|=0, \|1\|=1 \\ \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \\ \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ \exists \alpha \in A, \|\alpha\| = \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{norme} \\ \text{semi-norme} \end{array}$

Si de plus  $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y$ ,  $\|\cdot\|$  est dite une (semi-)norme multiplicative.

- Soit  $(A, \|\cdot\|)$  un anneau de Banach.

Déf. \*  $\mathcal{M}(A) = \{ \|\cdot\| \text{-semi-norme mult. sur } A \mid \|\cdot\| \leq \|\cdot\| \}$   
- spectre de Banach

\* top. sur  $\mathcal{M}(A)$  l.g.  $\forall f \in A$

$$\begin{aligned} \varphi_f : \mathcal{M}(A) &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} && \text{- continue} \\ x = \|\cdot\|_x &\mapsto |f|_x \end{aligned}$$

Thm.  $\mathcal{M}(A)$  est  $\neq \emptyset$  et compact (= quasi-compact + Hausdorff)

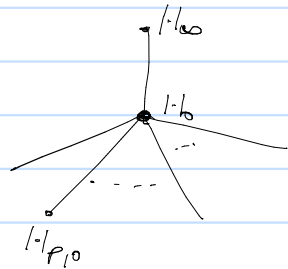
Exemples :

1)  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$  - corps normé complet

$$\mathcal{M}(\mathbb{Q}) = \{\text{pt.}\}$$

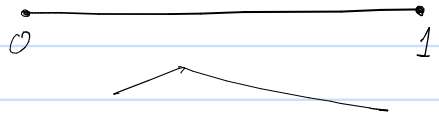
2)  $(\mathbb{Z}, |\cdot|_\infty)$ ,  $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$

$\mathcal{O}_K$ ,  $K$ -cdm



3)  $(\mathbb{C}, |\cdot|_{\text{sup}}) =: \mathbb{C}_{\text{sup}}$  où  $|\cdot|_{\text{sup}} := \max(|\cdot|_0, |\cdot|_\infty)$   
 $\hookrightarrow$  divise

$$(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_{\text{sup}}) =: \mathbb{Q}_{p, \text{sup}}$$



Déf.  $|\cdot|_x \equiv x \in \mathcal{M}(A)$ ,

$\mathcal{H}(x) = \text{Frac } A / \mathcal{R}_x |\cdot|_x$   
 $\hookrightarrow$  corps résiduel complet'

$$A \rightarrow \mathcal{H}(x)$$

$$f \mapsto f(x)$$

Prop  $|f(x)| = |f|_x$ .

Ceci induit morphisme  $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow \mathcal{M}(A)$ .

## I.2 Espaces analytiques / (A, ||·||)

Déf 1)  $A_A^{m,an} = \left\{ \begin{array}{l} \text{semi-normes mult. sur } A[T_1, \dots, T_m] \\ \| \cdot \|_A \leq \| \cdot \| \end{array} \right\}$

2) Top sur  $A_A^{m,an}$  t.e.  $\forall \rho \in A[T_1, \dots, T_m]$

$$\begin{array}{ccc} \forall \rho: A_A^{m,an} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} & \text{— continue} \\ \|x\| = x & \mapsto & |\rho|_x \end{array}$$

$A_A^{m,an}$  — espace analytique affine / A de dim. n

Rmq. 1)  $A_A^{0,an} = \mathcal{M}(A)$

2)  $m \leq m_1$   $A[T_1, \dots, T_m] \rightarrow A[T_1, \dots, T_{m_1}]$   
 induit  $\rho_A^{m,an} : A_A^{m,an} \rightarrow A_A^{m_1,an}$

3) Morphisme structural:  $A \rightarrow A[T_1, \dots, T_m]$

induit  $\pi: A_A^{m,an} \rightarrow \mathcal{M}(A)$

Lemme:  $A_A^{m,an}$  est loc. compact.

$$\overline{A_A^{m,an}} = \bigcup_{r > 0} \overline{D(0, r)} \quad \text{ou} \quad \overline{D(0, r)} = \overline{\mathcal{M}(A_r)} \\ \left\{ \|\tau_i\| \leq r, i \right\} \text{ compact}$$

Déf:  $\| \cdot \|_x \in A_A^{m,an}$ ,  $\mathcal{H}(x) = \text{Fac } A[T_1, \dots, T_m] / \mathcal{J}_x \| \cdot \|_x$   
 $A[T_1, \dots, T_m] \rightarrow \mathcal{H}(x)$ ,  $\| \cdot \|_x \mapsto \| \cdot \|_x$

3) Faïceau structural sur  $A_A^{m, \text{an}}$

Pour  $U \subseteq A_A^{m, \text{an}}$  - ouvert,

$$\mathcal{O}(U) := \left\{ f: U \rightarrow \coprod_{x \in U} \mathcal{H}(x) \left| \begin{array}{l} f(x) \in \mathcal{H}(x) \quad \forall x \\ \forall x \in U, \exists V_x \text{ - vois. de } x \text{ t. } \int V_x \text{ -} \\ \text{limite uniforme d'éléts. de } S_{V_x}^{-1} A[\overline{T_1, T_m}] \end{array} \right. \right\}$$

Ici  $S_{V_x} = \{ P \in A[T_1, T_m] \mid |P|_y \neq 0 \quad \forall y \in V_x \}$

Ex.  $\mathcal{O}(\mathcal{M}(A)) = A$

Rmq. En recollant des copies de  $A_A^{m, \text{an}}$ , on obtient  $\mathbb{P}_A^{m, \text{an}}$ .  
 $\downarrow$   
compact

Déf. 1) Modèle local d'espace  $A$ -an.

$$(V(\mathcal{X}), \mathcal{O}_U/\mathcal{X}), \quad \begin{array}{l} U \text{-ouvert dans un } A_A^{m, \text{an}} \\ \mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_U \text{ - cohérent} \end{array}$$

2)  $(X, \mathcal{O}_X)$  espace  $A$ -analytique si localement isomorphe à modèle local.

Rmq.  $\exists$  morphisme structural  $X \rightarrow \mathcal{M}(A)$ .

Prop.  $X$  est localement compact.

Preuve: Découle du fait que  $A_A^{m, \text{an}}$  l'est.

Rmq. 1) Soit  $\varphi: X \rightarrow Y$  un morphisme dans  $A$ -an. Pour  $y \in Y$ ,  $\varphi^{-1}(y)$  s'identifie à

$$X \times_y \mathcal{M}(\mathcal{X}(y)) \in \mathcal{X}(y)\text{-an.}$$

2)  $X \in A$ -an, on peut définir

$$A_X^{m, \text{an}} \quad (= A_A^{n, \text{an}} \times_A X) \xrightarrow{\pi} X$$

$$P_X^{m, \text{an}} \longrightarrow X$$

avec fibres :  $\pi^{-1}(x) = A_{\mathcal{X}(x)}^{m, \text{an}}$   
 $P_{\mathcal{X}(x)}^{m, \text{an}}$

① Parler de morphismes dans  $A$ -an?

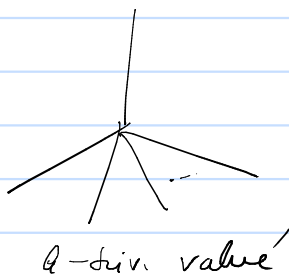
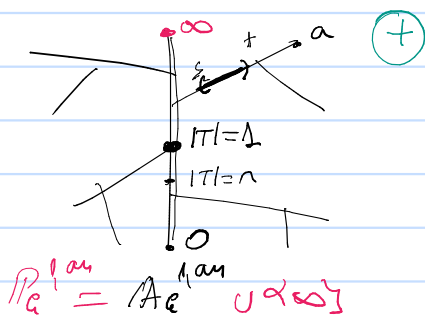
# I.3 Exemples

1)  $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$   $A_{\mathbb{C}}^{m, \text{an}}$ ,  $A_{\mathbb{R}}^{m, \text{an}}$  (cas classiques)  
Gelfand-Morse

2)  $k$ -ultramétrique  $A_k^{m, \text{an}}$

Polydisques:  $D(0, \underline{r}) = \mathcal{M}(\mathbb{C}[\underline{x}]/\underline{T})$

Cas  $m=1$ :



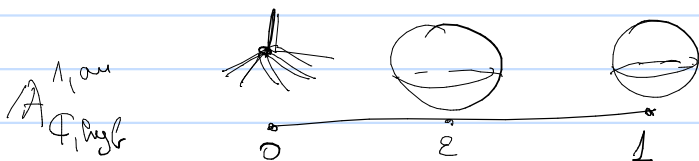
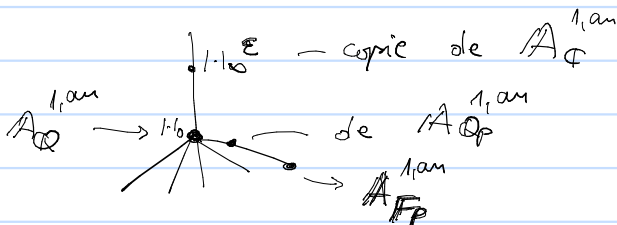
Disques:  $|T-a| \in \mathbb{R}$

Bord du disque  $|T| \leq 1$  — le point de Gauss

$|T|$ -loc constant,  $|T|=1$  — couronne

Couronnes:  $\varepsilon \leq |T-a| \leq 1$

3)  $A_{\mathbb{Z}}^{1, \text{an}}$  — fibres



# I.4 Analytification

$(A, 1-1) \in \text{df } \mathcal{A} \text{ } \mathcal{O}_K \text{ } \{ \text{lye} \dots \}$

- Soit  $X$  une  $A$ -variété (loc. des pers. finies)

$$\Phi_X: A\text{-} \text{Ann} \rightarrow \text{Ens} \quad \text{est représentable}$$
$$Y \mapsto \text{Hom}_{A\text{-} \text{loz. analés}}(Y, X)$$

par  $X^{\text{an}}$  - l'analytifié de  $X$  -  $(\mathbb{A}_A^m)^{\text{an}} = \mathbb{A}_A^{m, \text{an}}$   
 $\mathbb{P}^n$  aussi

$\mathbb{C}_m$  a un morphisme canonique d'esp. loc. analés  $\mathbb{A}$

$$\pi: X^{\text{an}} \rightarrow X$$

- Si  $X \leftarrow Y$

$$\begin{array}{ccc} X & \leftarrow & X^{\text{an}} \\ \downarrow \varphi & \circlearrowleft & \downarrow \exists \varphi^{\text{an}} \\ Y & \leftarrow & Y^{\text{an}} \end{array}$$

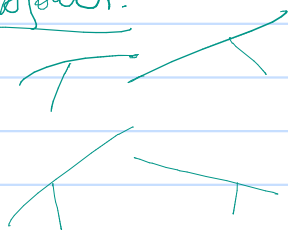
l'analytifié de  $Y$

Rmq. Description possible avec des semi-normes.

Rmq. Dans des cas particuliers, on a des flms de type GAGA.

Ex. Si  $A = (k, 1-1)$ , toute courbe propre analytique est algébrique.

⊕ Ajouter:



- longueur d'intervalles dans  $\mathbb{P}^{1, \text{an}}$

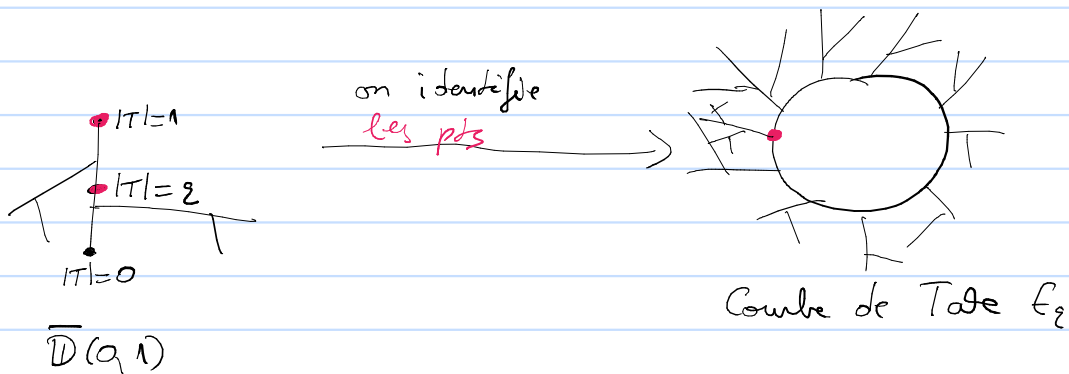
- rétraction couronne + disque

- pts de tp. 2

$\mathbb{P}_e^{1, \text{an}}$

## II Courbes de Berkovich / $(\mathbb{Q}, 1, 1)$

Ex. 1) Courbe de Tate /  $\varepsilon \in \mathbb{Q}, 0 < |\varepsilon| < 1$   
 a split multireduction  $E_\varepsilon = \mathbb{A}^1 / \varepsilon^{\times 2}$



2)  $A_{\mathbb{R}}^{1, \text{an}}, B_{\mathbb{R}}^{1, \text{an}}$

Thm. Toute courbe  $k$ -analytique est un graphe réel.

Déf. •  $k = \bar{k}$ ,  $C/k$  - courbe analytique propre,  $\Gamma \subseteq C$  - fini  
 est un squelette de  $C$  si

$C \setminus \Gamma$  - union disjointe de disques et  $\#$  fini de courbes  
 $A_{j, j \in J}$

Rmq.  $x \in C \setminus \Gamma \Leftrightarrow x$  a un voisinage  $\cong$  disque dans  $C$

- $k$ -quelconque:  $D_i \perp \nu$   $D_i \times_a \bar{k} \cong \bigcup_{\text{fini}} \text{disques}$   
 $A_j \perp \nu$   $A_j \times_a \bar{k} \cong \bigcup_{\text{fini}} \text{courbes}$

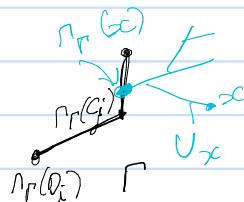
Thm. Si  $C$  - lisse, elle admet un squelette.



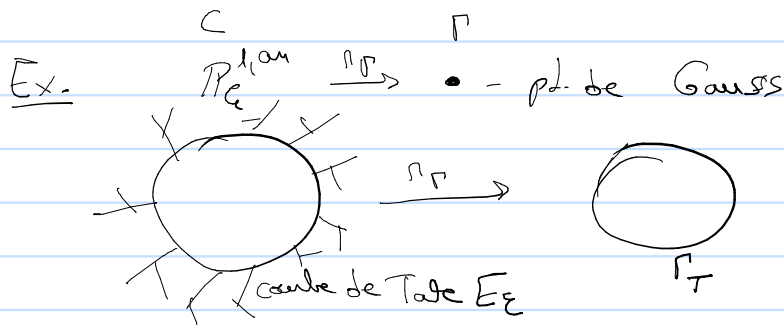
- Il y a une rétraction par déformation

$$\mu_P: C \rightarrow \Gamma$$

$x \mapsto \partial U_x$



qui permet souvent de se réduire à  $\Gamma$  en travaillant avec  $C$ .



Rmq. Pour tout graphe fini  $G \subseteq C$ ,  $\exists$  un squelette  $\Gamma$  de  $C$   
 $t-\varepsilon$ ,  $G \subseteq \Gamma$ .

Rmq. Le squelette de  $C$  est un graphe métrique: les arêtes sont des squelettes de couronnes, donc on revient à la métrique sur  $\mathbb{P}_a^{1,an}$ : longueur des intervalles.

Ex. la longueur de  $\Gamma_T$  est  $-\ln|2|$ .

### III Morphisme de réduction

$(k, 1.1)$ ,  $X/k$  - variété propre normale  
 $1.1 \neq 1.1_0$

$X/k^0$  - modèle de  $X$  plat, propre, normal

$X_0$  - fibre spéciale

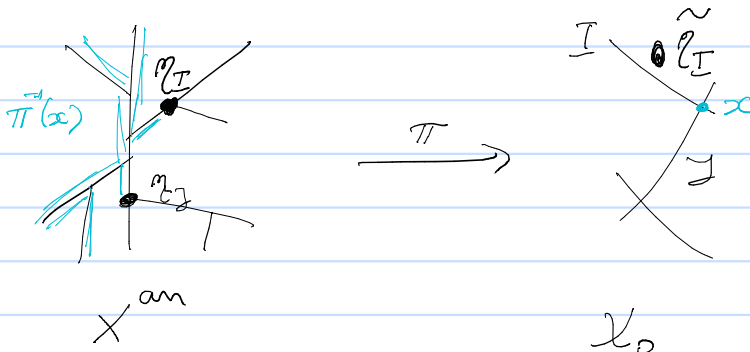
$\pi : X^{an} \longrightarrow X_0$  - morphisme de réduction  
 $x \longmapsto \pi(x)$

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \mathcal{R}(x) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \xrightarrow{\pi(x)} & \downarrow \\ \text{Spec } \mathcal{R}(x)^{\circ} & \longrightarrow & \text{Spec } k^0 \end{array}$$

Rmq.  $\pi$  est une application anti-continue:

$$\underbrace{\{f \in \mathcal{O}_X(x)\}}_{\text{continue}} \quad \underbrace{\|f\|_x < 1}_{\text{cond. ouverte}} \Leftrightarrow \underbrace{f \in \mathcal{R}(x)^{\circ}}_{\text{cond. fermé}} \Leftrightarrow \underbrace{\tilde{f}(\pi(x)) = 0}_{\text{cond. fermé}}$$

- Supposons maintenant  $k$ -disc. valué et  $X/k$ -courbe



$\tilde{\nu}_I \mapsto$  valuation div. sur  $k(X)$   
 $\mapsto$  un pt. unique  $\nu_I$  sur  $X^{\text{an}}$

Thm. •  $\forall x \in I, \pi^{-1}(x)$  - convexe + ouvert

•  $\partial \pi^{-1}(x) = \{ \nu_I \mid x \in I \}$

• (\*) Modèles  $X \xleftrightarrow{\text{bij}} S \subseteq X^{\text{an}}$  (fini + dp. 2) - bord de Shilov de  $\overline{\pi^{-1}(x)}$

Rmq. Les fonctions sur  $\overline{\pi^{-1}(x)}$  atteignent leur max sur le bord de Shilov.

Rmq. 1 Si  $X$ -lisse et  $X$ -modèle SNC, alors

le sous-graphe  $\Gamma$  :

somets	$\{ \nu_I, I \}$
arêtes :	$I \cap J = \emptyset, \nu_I, \nu_J$ - pas connectés
	$I \cap J \neq \emptyset$ , le chemin $(\nu_I, \nu_J) = \gamma$
	+z. $\pi(\gamma) = x \in I \cap J$

est un squelette de  $X$  et est homéo. au graphe dual de  $X_S$ .

Rmq. 2 Le type d'homotopie de la fibre spéciale d'un modèle semi-stable même que celui de la courbe.

Exemple de (\*) :