MINORATION CENTRALE

I) Énergie mutuelle en valuation triviale

Cadre : K corps valué complet, $|\cdot|$ norme triviale sur ~~■~~ $\mathbb{Q}$.

* μ, ν mesures signés sur $\mathbb{P}^{1,an}_K$

def: $$(\mu,\nu) = -\int_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1-\Delta} \log|z-w| \, d\mu(z) \otimes d\nu(w)$$

Si μ est à potentiel continu φ :

$$(\mu,\nu) = -\int_{\mathbb{P}^{1,an}} \varphi(z)\, d\nu(z)$$

φ défini sur $\mathbb{A}^{1,an}_K$.

def. Énergie mutuelle

$$E(\mu,\nu) := (\mu-\nu, \mu-\nu)$$

Exemple: $\lambda \doteq (\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{P}^1(K)^4$ 2 à 2 distincts

$$\begin{array}{ccc} E_\lambda & \xrightarrow{[2]} & E_\lambda \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{L_\lambda} & \mathbb{P}^1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \lambda = (\infty, 0, 1, \lambda_4) \\ \Downarrow \\ L : t \mapsto \dfrac{(t^2-\lambda_4)^2}{4t(t-1)(t-\lambda_4)} \end{array}$$

$|\lambda|>1$

Prop (Favre-Rivera-Letelier): Si $\lambda = (\infty, 0, 1, \lambda)$ alors la mesure d'équilibre μ_{L_λ} est la ~~mé~~ mesure de Lebesgue sur ~~■~~ l'intervalle $[\eta_{0,1}, \eta_{0,|\lambda|}]$.

<u>démo</u> (char $k \neq 2$)

$q \in K^*$ $\quad 0 < |q| < K^*$ $\qquad E = \mathbb{G}_m^{an} / q^{\mathbb{Z}}$

$[m] : \mathbb{G}_m \circlearrowleft \quad z \mapsto z^m$ descend à E.

$E/[\pm 1] \simeq \mathbb{P}^1_K$

$\mathbb{G}_m = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$

$\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_m) \supset G =$ sous-groupe engendré par $\quad z \mapsto q^k z, \ z \mapsto z^{-1}$.

$\mathbb{G}_m / G = \mathbb{P}^1$

$\mathbb{P}^{1, an}_K \supseteq D$ droite joignant ζ_0 et ∞.

invariante par $z \to z^2$.

$J = D/G \subset \mathbb{P}^{1, an}_K$

J est invariant, c'est le plus petit compact invariant.

$\Longrightarrow$ supp $\mu_L = J$.

mesure de Haar sur $D \xrightarrow{\pi_*}$ mesure de Lebesgue sur J.

$\eta_{0, -\log|q|}$, $\eta_{0, -\frac{3}{2}\log(q)} \in D \quad \longmapsto \quad 2$ pts différents de $\mathbb{G}_m / G$. □

<u>Rq</u> : μ_L est plus compliqué sur $\mathbb{C}$.

$$z \in \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow E : \ y^2 = ax^3 + bx + c$$
$$\longmapsto \wp(z), \wp'(z).$$

$$\mu_L = \frac{dz \wedge d\bar{z}}{|y^2|} = \frac{dx \wedge d\bar{x}}{|ax^3 + bx + c|}.$$

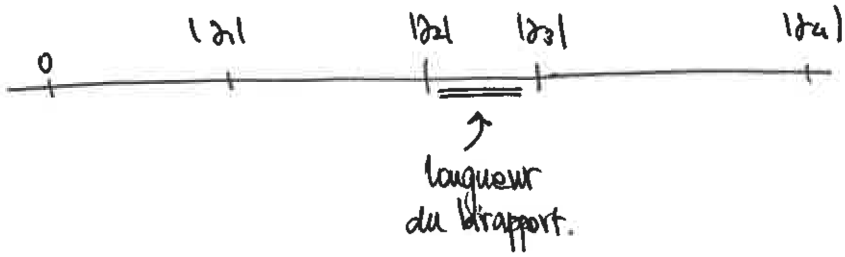
Prop. $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_4)$ 4 points distincts.

$\exists\, \sigma$ permutation tq

$$I_\gamma = [\gamma_{\sigma(1)}, \gamma_{\sigma(2)}] \cap [\gamma_{\sigma(3)}, \gamma_{\sigma(4)}] \neq \emptyset$$

μ_L = mesure de Lebesgue sur I_γ

Ex:



II Énergie mutuelle d'intervalles

* Segment = extremité de pt de type 2 ou 3.

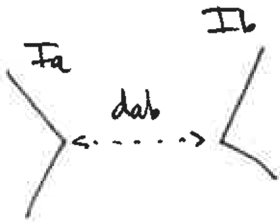
a) Combinatoire des intervalles : I_a, I_b sont

- alignés : I_a, I_b contenus dans un même segment.
- emboîtables : I_a, I_b alignés et $I_a \cap I_b = \{*\}$.

Th A. Si I_a et I_b deux segments tq $I_a \cap I_b \neq \emptyset$ et l_a ou $l_b \neq 0$.

$$E(\mu_a, \mu_b) \geq \frac{1}{6} \frac{(l_a - l_b)^2}{\max(l_a, l_b)}.$$

Th B. Si $|I_a \cap I_b| \leq 1$



$$E(\mu_a, \mu_b) \geq \frac{1}{24} l_a + \frac{1}{24} l_b + \frac{d_{ab}}{2}$$

Corollaire de la situation 1. $\lambda \in [0, \max(l_a - l_{ab}, l_b - l_{ab})]$.

$\forall \rho$ tq $\max(l_a, l_b) \leq \rho\lambda$ alors $E(\mu_a, \mu_b) \geq \frac{\lambda}{48\rho^2}$.

Méthode de la preuve : 1 calcul explicite + combinatoire.

* potentiel $I = [\eta_\alpha, r_1, \eta_\alpha, s_1]$

$$\sigma_I(x) = \begin{cases} l_I \log|z-\alpha|(x) & \text{si } |z-\alpha|(x) > s_1 \\ \frac{1}{2}\left[(\log|z-\alpha| - \log r_1)^2 + (\log s_1)^2 - (\log r_1)^2\right] & r_1 \leq |z-\alpha|(x) \leq s_1 \\ \frac{(\log s_1)^2 - (\log r_1)^2}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Delta \sigma_I = l_I \mu_I$.

Potentiel de μ_I est $\frac{\Delta \sigma_I}{l_I}$.

Propriétés barycentrique, I, I' ~~disjoints~~ emboîtables.

$$\Delta(\sigma_I + \sigma_{I'}) = l_I \mu_I + l_{I'} \mu_{I'}$$

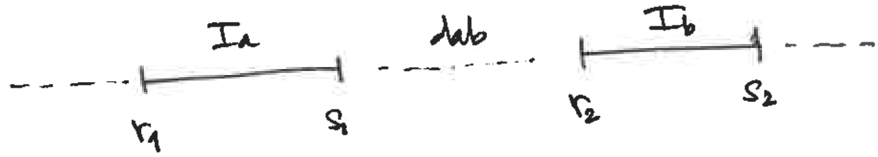
$$\Delta(\sigma_I + \sigma_{I'}) = l_{I \cup I'} \mu_{I \cup I'}$$

$$\mu_{I \cup I'} = t \mu_I + (1-t) \mu_{I'} \quad \text{où } t = \frac{l_I}{l_I + l_{I'}}.$$

Lemme explicite : Si I_a et I_b alignés et $|I_a \cap I_b| \leq 1$

d_{ab} = distance entre I_a et I_b.

$$E(\mu_a, \mu_b) = \frac{1}{6} l_a + \frac{1}{6} l_b + \frac{d_{ab}}{2}$$



Lemme d'energie barycentrique : I_a, I_b', I_b'' tq I_b', I_b'' emboîtables

$$I_b = I_b' \cup I_b''$$

$$E(\mu_a, \mu_b) = t\, E(\mu_a, \mu_b') + (1-t)\, E(\mu_a, \mu_b'') - t(1-t)\, E(\mu_b', \mu_b'').$$

Preuve.

$$E(\mu_a, \mu_b) = - \int \left(\frac{\sigma_a}{l_a} - \frac{\sigma_b}{l_b} \right) \Delta \left(\frac{\sigma_a}{l_a} - \frac{\sigma_b}{l_b} \right)$$

$$\frac{\sigma_b}{l_b} = t\, \frac{\sigma_b'}{} + (1-t)\, \sigma_b''$$

$$E(\mu_a, \mu_b) = -\left(\mu_a - t\mu_b' - (1-t)\mu_b'',\ \mu_a - t\mu_b' - (1-t)\mu_b'' \right)$$

$$= t\Big[(\mu_a, \mu_a) + t^2 (\mu_b', \mu_b') + (1-t)^2 (\mu_b'', \mu_b'')$$

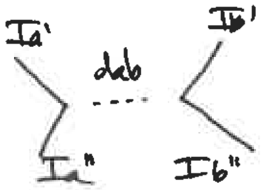
$$- 2t(\mu_a, \mu_b') - 2(1-t)(\mu_a, \mu_b'') + 2t(1-t)(\mu_b', \mu_b'') \Big]$$

$$= t\, E(\mu_a, \mu_b') + (1-t)\, E(\mu_a, \mu_b'') + t(1-t)\, E(\mu_b', \mu_b'').$$

□

démo Lemme explicite : à la maison ! □

démo Th B :



I_a', I_b' alignés $\longrightarrow$ lemme explicite

$I_a', I_b' \cup I_b''$ $\longrightarrow$ lemme barycentrique

$I_a' \cup I_a'', I_b' \cup I_b''$ $\longrightarrow$ lemme barycentrique.

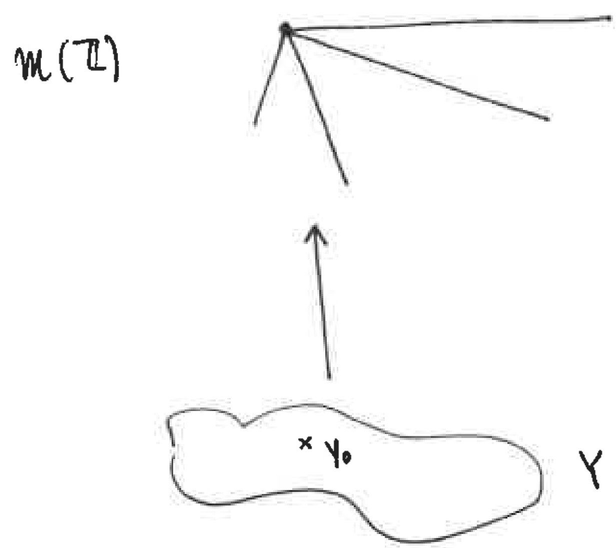
III Propagation

$\mathcal{Y}$ schéma localement de type fini sur $\mathbb{Z}[1/2]$.

$Y = \mathcal{Y}^{an} \longrightarrow \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{M}(\mathbb{Z})$.

$f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ log flottante si $f(y^\varepsilon) = \varepsilon f(y)$ $\quad \forall y \in Y$, $\forall \varepsilon \in [0,1]$.

$E(\mu_a, \mu_b) \geq \frac{\delta}{48 p^2}$



Lemme clé : V partie log-flottante tq $pr(V) = \mathcal{U}_2$.

$\mathcal{E}$, f_1, f_2 continues log flott.

$V_s = \{ y \in V \mid f_1(y) = s \}$

Supposons : $\exists s_0$ tq $pr : V_{s_0} \longrightarrow \mathcal{U}_2$ fermée

et $e_0 \in \mathbb{R}$ tq $\forall y \in V_{s_0} \cap pr^{-1}(a_0)$ on a $\mathcal{E}(y) \geq e_0 + f_2(y)$.

Alors $\forall \alpha > 0 \quad \exists t_\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ et $M_\alpha \subset M_{\mathbb{Q}}$ fini tq

* $v \in M_{\mathbb{Q}} - M_\alpha \quad \forall y \in V_{s>0} \cap pr^{-1}(a_v)$

$$\mathcal{E}_e(y) \geq \frac{e_0 - \alpha}{s_0} f_1(y) + f_2(y).$$

* $\forall v \in M_\alpha \quad \forall y \in V_{>t_\alpha} \cap pr^{-1}(a_v)$

$$\mathcal{E}_e(y) \geq \frac{e_0 - \alpha}{s_0} f_1(y) + f_2(y).$$

<u>Preuve</u>: $\alpha \in]0,1[$

$$W = \{ y \in V_{s_0} \mid \mathcal{E}_e(y) \geq e_0 - \alpha + f_2(y) \}$$

W est un voisinage de $pr^{-1}(a_0) \cap V_{s_0}$.

$pr : V_{s_0} \longrightarrow \mathcal{U}_2$ fermée

$\Longrightarrow$ W contient $pr_1^{-1}(B_\alpha)$

$$B_\alpha \supset \bigcup_{v \in M_{\mathbb{Q}} \setminus M_\alpha} [a_0, a_{v,\infty}] \cup \bigcup_{v \in M_\alpha} [a_0, a_{v,t_\alpha}[.$$

$$f_1(y^\varepsilon) = s_0 \iff \varepsilon = \frac{s_0}{f_1(y)}.$$

$\Updownarrow$

$y^\varepsilon \in V_{s_0} \cap W.$

$$\mathcal{E}_e(y^\varepsilon) \geq (e_0 - \alpha) + f_2(y^\varepsilon)$$

$$\mathcal{E}_e(y) \geq \frac{(e_0-\alpha) f_1(y)}{s_0} + f_2(y).$$

□

<u>Th G</u> : V flottant $pr(V) = \mathcal{U}_e$.

$\mathcal{E}, f_1 : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f_2 : V \to \mathbb{R}$

$g_1 : V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ continues log flottantes.

<u>Supposons</u> : $V_s = \{ y \in V \mid f_1(y) \leq s \}$

(1) $\forall s,t$ $V_s \cap W_t \to \mathcal{U}_e$ propre $W_t = \{ y \in V \mid g_1(y) < t f_2(y) \}$

(2) $\exists A > 0$ $(\mathcal{B}_v)_{v \in M_K}$ presque nulle.

$\forall v \in M_K$ $\forall y \in pr_v^{-1}(a_v)$

...

<u>Cas des paires de Lattès</u> : (a_1, a_2, a_3, ∞) , $(b_1, b_2, b_3, 0)$

$a(z) = (a_1, a_2, a_3, \infty)$, $b(z) = (b_1, b_2, b_3, 0)$

$\mathcal{E}(z) := \langle \mu_{a(z)}, \mu_{b(z)} \rangle$.

$Z_{ab} = Z_a \times_{\mathbb{Z}[1/2]} Z_b$

$Z_a = \{ a_i \neq 0 \ i=1,2,3 \text{ distincts}, \ a_i \neq \infty \}$

$Y_{ab} = \left\{ (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i \ a_i \neq 0 \ b_i \neq \infty \\ \forall i \neq j \ a_i \neq a_j \ b_i \neq b_j \end{array} \right\}$

$(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = [u_1 : \dots : u_6]$

def. $f_1 = \max\left(\log\left|\frac{u_i}{u_j}\right| , \log\left|\frac{u_i}{u_j} - 1\right| \right)$.

$$f_2 = \max\left(0, \operatorname{smax}_{i \leq j \leq 3} \left(\log \frac{|a_i|}{|b_j|} \right) \right).$$

$$\operatorname{smax}(t_1, \ldots, t_n) = \min_{j \leq n} \max_{i \neq j} (t_i).$$

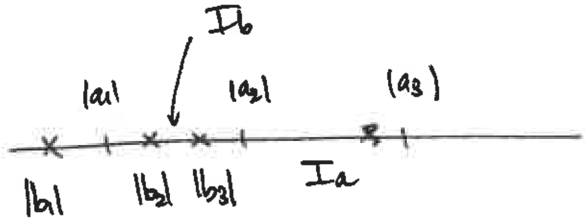
$$t_1 \leq \cdots \leq t_n \Rightarrow \operatorname{smax}(t_1, \ldots, t_n) = t_{n-1}.$$

On se ramène à : $|a_1| < |a_2| < |a_3|$

$|b_3| > |b_2| > |b_1|$.

$$f_2(q) = \max\left(0, \frac{\log |a_3(q)|}{|b_2(q)|}\right).$$

I_a, I_b alignés



dist = $l_a + l_b + d_{ab}$. $= f_2$.