NON DENSITÉ DES POINTS ENTIERS & VARIATIONS DES STRUCTURES DE HODGE

I) Énoncés

K corps de nombres $(\subseteq \mathbb{C})$

§1. Conjecture de Mordell

Th (Faltings '84) : Soit C une courbe proj. lisse de genre ≥ 2 définie sur K. Alors, l'ensemble $C(K)$ de ses points K-rationnels est fini.

Exemple : $C \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ surface de Riemann compacte

éq. affine : $f(x,y) = 0$ $\quad f \in K[x,y]$, $\deg(f) \geq 4$.

$$\Longrightarrow \quad |\{(x,y) \in K^2 : f(x,y) = 0\}| < +\infty$$

(e.g. $f(x,y) = x^n + y^n - 1$, $n \geq 4$)

Rmq : Faux pour $g = 0, 1$ en général

$g \geq 2 \longleftrightarrow C$ hyperbolique $\longleftrightarrow \pi_1(C)$ non abélien

§2. Problèmes à la Shafarevič

S ensemble fini de places de K, $g \geq 1$ entier

$$Ш_{\text{courbes}}(K,S,g) = \left\{ \begin{array}{c} \text{courbes proj. lisses } / K \\ \text{de genre } g \\ \text{à bonne réduction en dehors de } S \end{array} \right\} / K\text{-iso}$$

$$Ш_{\text{v.ab.}}(K,S,g) = \left\{ \begin{array}{c} \text{variétés abéliennes } / K \\ \text{de dim } g \\ \text{à bonne réduction en dehors de } S \end{array} \right\} / K\text{-iso}$$

Th (Faltings '84, "conj. de Shafarevič") : Les ensembles

$\amalg$ courbes (K, S, g) $(g \geq 2)$

sont finis.

$\amalg$ v. ab. (K, S, g) $(g \geq 1)$

Finitudes semblables : surfaces K3, surfaces de del Pezzo, ...
(André) (Scholl)

Hypersurfaces de l'espace projectif : $d, n \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{hypersurfaces} \\ \text{deg } d \text{ de } \mathbb{P}^n \end{matrix} \right\} = \left(\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n]_d \setminus \{0\} \right) / \mathbb{Q}^*$$

polynômes hom
deg d, $n+1$ var.

f primitif si
$\forall p$ premier, $f \not\equiv 0 \pmod p$

$$= \left(\left\{ \begin{matrix} f \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]_d \setminus \{0\} \\ \text{primitif} \end{matrix} \right\} \right) / \{\pm 1\}$$

$\Delta_{n,d} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]_d)$ diviseur discriminant

$H_{n,d}$ = complémentaire

$N \geq 1$

$$H_{n,d}(\mathbb{Z}[1/N]) = \left\{ \begin{matrix} f \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n] \setminus \{0\} \\ \text{primitif} \\ \underset{\text{premier}}{p \nmid N} \Rightarrow \{f=0\} \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}}_p) \text{ non singulière} \end{matrix} \right\}$$

Th (Lawrence-Venkatesh 2018) : Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $d_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q., pour tout $n \geq n_0$, $d \geq d_0(n)$ et $N \geq 1$ entiers, l'ensemble $H_{n,d}(\mathbb{Z}[1/N])$ n'est pas Zariski-dense dans $\mathbb{P}(\mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]_d)$.

(i.e. $\exists F \in \mathrm{Sym}^D(\mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]_d)^*$ qui s'annule identiquement sur $H_{n,d}(\mathbb{Z}[1/N])$.)
$\quad\ \ {}^{0^*}$

Rmq: 1) $n_0 \sim 60$, pas de renseignements sur $d_0(n)$ et F.

2) Conj. Lang-Vojta

$$\Longrightarrow \quad |H_{n,d}(\mathbb{Z}[1/N]) / PGL_{n+1}(\mathbb{Z}[1/N])| < +\infty$$

3) Lawrence - Sawin '20 : finitude hypersurfaces variétés abéliennes.

II) Stratégie de Faltings

C/K courbe proj. lisse de genre ≥ 2.

$S = \left\{ \begin{matrix} \text{places de mauvaise} \\ \text{réd de } C \end{matrix} \right\} \cup \left\{ \begin{matrix} \text{places} \\ \text{arch ou 2-adiques} \end{matrix} \right\}$

① $C(K) \xrightarrow[\text{Parshin}]{\text{Kodaira}} Ш \text{ courbes } (K, S, g)$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, mapsto] & C_P \arrow[d, "2"'] & \text{ramifié exactement en } \pi^{-1}(P) \\ & \tilde{C} \arrow[d, "\pi", "2^{2g(C)}"'] & \text{rev. non ramifié} \\ & C & \pi_1(C,P) \to H_1(C,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2 \end{tikzcd}$$

Finitude fibres : de Franchis.

② $Ш \text{ } \cancel{\text{v.ab}}\text{courbes}(K, S, g) \longrightarrow Ш \text{ v.ab. } (K, S, g)$

$$C \longmapsto \mathrm{Jac}(C)$$

Finitude fibres : Torelli

③ $Ш \text{ v.ab. } (K, S, g) \longrightarrow \tilde{Ш} \text{ v.ab. } (K, S, g) = \left\{ \begin{matrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{matrix} \right\} / K\text{-isogénie}$

Finitude fibres :

Th d'isogénie (Faltings '84) : A variété abélienne $/K$. Alors

difficile !

$$\left| \left\{ \begin{matrix} \text{variété abélienne} \\ K\text{-isogène à } A \end{matrix} \right\} / K\text{isom.} \right| < +\infty.$$

Cor (conj. de Tate) : ℓ premier

$$\mathbb{Z}_\ell^{2g} \simeq T_\ell A = \varprojlim A[\ell^n](\overline{K}) \curvearrowleft \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$$

$$V_\ell A = T_\ell A \otimes \mathbb{Q}_\ell.$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{End}(A) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}(V_\ell A).$$

Cor : La représentation galoisienne $V_\ell(A)$ est semi-simple

(4)

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\text{Ш}}\ \text{v. ab. } (K, S, g) & \xrightarrow{\text{Conj de Tate}} & R^{d,\ w}_{2g,\ 1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{rep. continues} \\ \rho : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to GL^d_{2g}(\mathbb{Q}_\ell) \\ \bullet \text{ pure de poids } 1 \quad w \\ \bullet \text{ semi-simples} \end{array} \right\} / \text{iso.} \\ A & \longmapsto & V_\ell A \end{array}$$

$v \notin S \cup \{\ell\text{-adiques}\}$

$\Longrightarrow$ $\det(X \cdot \mathrm{id} - \rho(\mathrm{Frob}_v)) \in \mathbb{Z}[X]$

et valeur abs. complexe des racines $= |\mathbb{F}_v|^{1/2}$.

Th (Faltings, Serre, Deligne) : $|R_{2g,1}^{d,\ w}| < +\infty$.

élémentaire

III) Méthode de Lawrence–Venkatesh

Construction auxiliaire : ℓ premier, $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{F}_\ell) = \{ z \mapsto az + b \}$, $a \in \mathbb{F}_\ell^*$, $b \in \mathbb{F}_\ell$

$$\begin{array}{ccccc} A & \overset{\text{construction Prym}}{\longleftarrow} & \mathfrak{X} \ (\text{objet univ}) & \cong & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & C \times H & \cong & C \times \{\pi : X \to C\} \end{array}$$

schéma abélien d

$$H = \left\{ \begin{array}{c} X \\ \downarrow \pi \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} G\text{-revêtements} \\ |\mathrm{disc}(\pi)| = \{pt\} \end{array} \right\} / \text{iso.}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi & & H \\ \downarrow & v & \downarrow \ \text{non ramifié} \\ |\mathrm{disc}(\pi)| & & C \end{array}$$

C courbe proj. lisse de genre $g \geq 2$ / K

Rmq : $H \neq \emptyset \longleftrightarrow g \geq 2$

<u>Idée</u> : $K = \mathbb{Q}$, p premier t.q. $A \to C$ à bonne réduction en p ($\Rightarrow p \neq \ell$).

$$\begin{array}{ccccccc}
c & & C(\mathbb{Q}) \cap \Omega & \longrightarrow & C(\mathbb{Q}_p) \cap \Omega & \xrightarrow{D} & \\
\downarrow & & \downarrow \text{ image finie ? (1)} & & \downarrow \text{ fibres finies ? (2)} & & \\
H^1_{et}(A_c, \mathbb{Q}_p) & & \mathrm{Rep}\ \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} / \mathrm{iso} & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_{cris}\ \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p} / \sim & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c}\text{structures} \\ \text{de Hodge} \\ \text{p-adiques}\end{array} \right\} / \sim
\end{array}$$

(1) + (2) $\longrightarrow$ FIN.

$$V \longmapsto (V \otimes B_{cris})^{\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}}$$

$$H^1_{et}(A_c, \mathbb{Q}_p) \longmapsto \left(H^1_{dR}(A_c), \begin{array}{c}\text{filtration} \\ \text{de Hodge}\end{array}, \begin{array}{c}\text{Frobenius} \\ \text{cristallin}\end{array} \right)$$

Faltings - Serre - Deligne

⚠ semi-simplicité

* <u>Faire des paquets</u>

$$C(\mathbb{Q}_p) = C(\mathbb{Z}_p) = \bigcup_{\tilde{x} \in C(\mathbb{F}_p)} \{ x \equiv \tilde{x} \pmod p \}$$

. On fixe $o \in C(\mathbb{Q}_p)$

$$\Omega = \{ x \in C(\mathbb{Z}_p) : x \equiv o \pmod p \} \underset{\text{analytique}}{\cong} \{ |z| < 1 \}.$$

* <u>Transport parallèle</u> :

$x \in \Omega$ $\qquad \varphi_x : H^1_{dR}(A_c) \xrightarrow{\sim} H^1_{dR}(A_o)$ $\qquad$ " les solutions à Gauss-Manin convergent sur Ω "

$$\mathrm{Per}_o : \Omega \longrightarrow \mathrm{Flag}\left(H^1_{dR}(A_o) \right)$$

$$c \longmapsto \varphi_c \left(\begin{array}{c}\text{filtration} \\ \text{de Hodge}\end{array} \right) \text{ de } H^1_{dR}(A_c)$$

application des périodes.

$D(c) \cong D(c')$ comme structure de Hodge $\Longrightarrow \mathrm{Per}_o(c') \in \mathrm{Cent}\left(\begin{array}{c}\text{Frob} \\ \text{cristallin}\end{array} \right) \cdot \mathrm{Per}_o(c')$

$$\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}_p}\ \cancel{\mathbb{Q}_p[v^{-1}(0)]}\ \mathrm{Sp}(H^1_{dR}).$$

<u>Th</u> : L'adhérence de Zariski de l'image de Per_o est

$$X = \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}_p}\ \cancel{\mathbb{Q}_p[v^{-1}(0)]}\ L\mathrm{Gr}_d\left(H^1_{dR}(A_o) \right)$$

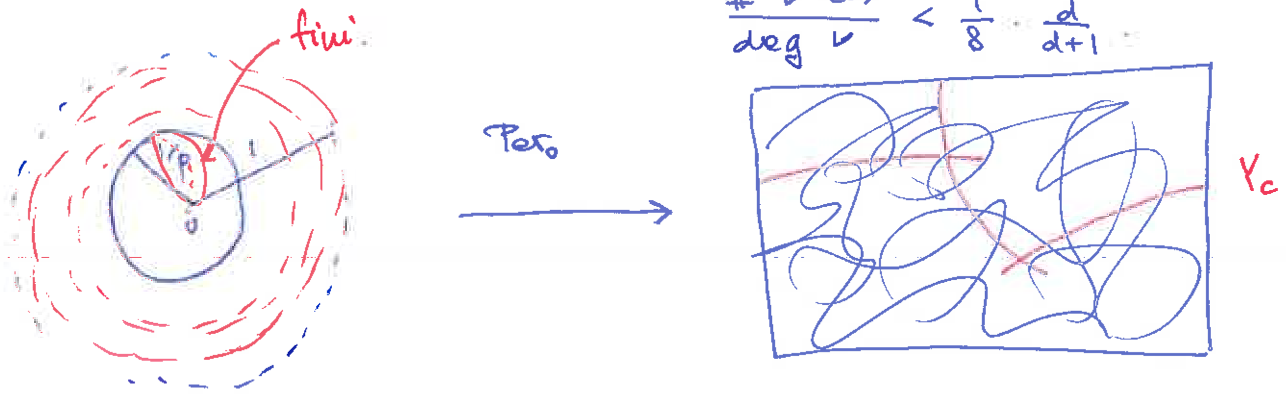
isotrope pour la polarisation de A

module sur $\mathbb{Q}_p[v^{-1}(0)] = E$

Rmq : si $Y_c = \mathrm{Cent}(\mathrm{Frob}).\mathrm{Per}_0(c') \neq X$, alors

$$|\mathrm{Per}_0^{-1}(\quad) \cap \Omega(\mathbb{Q}_p)| < +\infty.$$

$$\frac{\#\,\nu^{-1}(0)}{\deg \nu} < \frac{1}{8} \cdot \frac{d}{d+1}$$



* <u>semi-simplicité</u> : il existe $F \subseteq \Omega$ fini t.q.,

pour tout $c \in C(\mathbb{Q}) \cap (\Omega \setminus F)$ il existe $c' \in \nu^{-1}(c)$

t.q. $H^1_{\text{ét}}(A_{c'}, \mathbb{Q}_p)$ est irréductible.