Mesure de Mahler, Surfaces K3: quelques nouveaux résultats

Marie José BERTIN

Institut Mathématique de Jussieu
Université Paris 6
4 Place Jussieu 75006 PARIS

bertin@math.jussieu.fr

Workshop WA3C'2013 USTHB Alger, 28 Octobre 2013

La plupart de ces nouveaux résultats se trouvent dans
Mahler measure of multivariate polynomials (B-Lalin)(to appear in Proceedings of WIN2-Women in Numbers 2, CRM Proceedings and Lecture Notes)
Depuis la date d'écriture de ce "survey" (Août 2012), il y a d'autres magnifiques résultats de Zudilin et de Samart.

arXiv:1309.7730" The elliptic trilogarithm and Mahler measures of $K3$ surfaces" by Detchat Samart
arXiv:1305.2143 "The Mahler measure of a Calabi-Yau threefold and special L-values" by Matthew A. Papanikolas, Mathew D. Rogers, Detchat Samart
arXiv:1304.3869 " Regulator of modular units and Mahler measures by Wadim Zudilin

Rappels: Mesure de Mahler de polynômes de plusieurs variables

Definition

Si $P \in [x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, la mesure de Mahler logarithmique est définie par

$$\begin{aligned} m(P) &:= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \log |P(^{2\pi\theta_1}, \ldots, ^{2\pi\theta_n})| \theta_1 \ldots \theta_n \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P(x_1, \ldots, x_n)| \frac{x_1}{x_1} \ldots \frac{x_n}{x_n}, \end{aligned}$$

où $\mathbb{T}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \,|\, |x_1| = \cdots = |x_n| = 1\}$.

Résultats concernant les courbes elliptiques

Depuis 1996, de nombreux auteurs B., Boyd, Brunault, Lalín, Mellit, Rogers, Rodriguez-Villegas, Samart, Zudilin ont prouvé et conjecturé des formules explicites reliant la mesure de Mahler de polynômes définissant des courbes elliptiques et la série L de ces courbes.
Je vais expliquer ce type de résultats sur un exemple.
Soit la famille

$$p_k = X + \frac{1}{X} + Y + \frac{1}{Y} + k, \quad k^2 \in \mathbb{Z}$$

La mesure de Mahler est attachée au polynôme p_k.
Si l'objet géométrique défini par le polynôme est une courbe elliptique et si le polynôme est tempéré on a des résultats ou conjectures du genre

$$m(p_k) = c_k \frac{N_k}{4\pi} L(E_k, 2),$$

avec $c_k \in \mathbb{Q}$, E_k courbe elliptique définie par p_k, de conducteur N_k, $L(E_k, s)$ étant la série L de la courbe elliptique

$$L(E_k, s) = \prod_{\text{good } p} (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1} \prod_{\text{bad } p} (1 - a_p p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

où pour p premier,

$$a_p = 1 + p - \#E(\mathbb{F}_p).$$

Rappels

Une courbe elliptique (sur $\mathbb{C}$) est en gros une courbe (zéro d'un polynôme de 2 variables) birationnellement équivalente à une courbe d'équation de la forme

$$E : Y^2 = X^3 + aX + b.$$

Par exemple, la courbe d'équation

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + k = 0,$$

$k \in \mathbb{N}$, définit une courbe elliptique. Le changement de variables

$$x = \frac{kX - 2Y}{2X(X-1)} \qquad y = \frac{kX + 2Y}{2X(X-1)}, \tag{1}$$

donne l'équation

$$Y^2 = X\left(X^2 + \left(\frac{k^2}{4} - 2\right)X + 1\right).$$

La famille p_k a été initialement étudiée par Boyd, Deninger, et Rodriguez-Villegas de différentes façons. Boyd a trouvé numériquement des identités de la forme

$$m\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+k\right) \stackrel{?}{=} s_k L(E_{(k)},2) \qquad k \in\neq 0,4 \tag{2}$$

Par exemple

k	s_k	N
1	1	15
2	1	24
3	2	21
5	6	15
6	1/2	120
7	1/2	231
8	4	24
9	1/2	195
10	-1/8	840

Le lien avec $L(E_{(k)}, 2)$ a été trouvé par Deninger à l'aide des conjectures de Beilinson. Mais l'on a encore peu de preuves de telles formules, en gros uniquement quand les conjectures de Beilinson sont connues, i.e. quand la courbe elliptique est

- à multiplication complexe CM,
- ou est donnée sous forme d'une courbe modulaire

La mesure de Mahler s'exprime alors en fonction de la série L d'une forme modulaire.

Rodriguez-Villegas a exprimé cette mesure de Mahler comme une série d'Eisenstein–Kronecker:

$$\begin{aligned} m\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+k\right) &= \left(\frac{16\tau}{\pi^2}\sum_{m,n}{}' \frac{\chi_{-4}(m)}{(m+n4\tau)^2(m+n4\bar{\tau})}\right) \\ &= \left(-\pi\tau+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}\chi_{-4}(d)d^2\frac{q^n}{n}\right), \quad (3) \end{aligned}$$

avec le paramètre q

$$q=e^{2\pi i\tau}=q\left(\frac{16}{k^2}\right)=\exp\left(-\pi\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,1-\frac{16}{k^2}\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,\frac{16}{k^2}\right)}\right)$$

Cette formule peut également être reliée au dilogarithme elliptique (par des techniques de Bloch). Le lien entre les valeurs du dilogarithme elliptique et la fonction L est fourni par les conjectures de Beilinson. Par exemple, Rodriguez-Villegas a prouvé

$$m\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+4\sqrt{2}\right)=L'(E_{32},0). \tag{4}$$

Dans ce cas la courbe possède de la multiplication complexe.

Autres exemples de Rogers et Zudilin (2011-2012)

$$m\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+1\right)=\frac{15}{4\pi^2}L(E_{15},2)=L'(E_{15},0),$$

$$m\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+8\right)=\frac{24}{\pi^2}L(E_{24},2)=4L'(E_{24},0).$$

Leurs preuves relient des expressions hypergéométriques à des sommes sur des réseaux via des identités de Ramanujan pour des q-séries. A leur tour, les sommes sur les réseaux peuvent s'exprimer en termes de valeurs spéciales de fonctions L de courbes elliptiques en utilisant la modularité.

Mesure de Mahler de certains polynômes de 3 variables

Considérons les surfaces définies par les polynômes

$$P_k = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{z} - k$$

Après résolution des singularités on obtient des surfaces $K3$ notées $\mathcal{Y}_k$. Ces surfaces sont des variétés de Calabi-Yau de dimension 2 et généralisent par certains aspects les courbes elliptiques qui sont des variétés de Calabi-Yau de dimension 1.

Les premiers résultats concernant cette famille ont été obtenus par B.(2003 -2010) et les derniers par B.-Feaver-Fuselier-Lalín-Manes (2013).

Théorème

(B.)

$$
\begin{aligned}
m(P_0) &= d_3 := \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2), \\
m(P_2) &= 4\frac{|\det \mathbb{T}(\mathcal{Y}_2)|^{3/2}}{4\pi^3} L(\mathbb{T}(Y_2), 3) = 4 \cdot \frac{8\sqrt{8}}{4\pi^3} L(g_8, 3), \ \ et \\
m(P_{10}) &= \frac{4}{9}\frac{|\det \mathbb{T}(\mathcal{Y}_{10})|^{3/2}}{4\pi^3} L(\mathbb{T}(\mathcal{Y}_{10}), 3) + 2d_3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{72\sqrt{72}}{4\pi^3} L(g_8, 3) + 2d_3
\end{aligned}
$$

Théorème

(BFFLM)

$$
\begin{aligned}
m(P_3) &= 2\frac{|\det \mathbb{T}(\mathcal{Y}_3)|^{3/2}}{4\pi^3} L(\mathbb{T}(\mathcal{Y}_3),3) = 2\cdot\frac{15\sqrt{15}}{4\pi^3} L(g_{15},3),\\
m(P_6) &= 2\frac{|\det \mathbb{T}(\mathcal{Y}_6)|^{3/2}}{4\pi^3} L(\mathbb{T}(\mathcal{Y}_6),3) = 2\cdot\frac{24\sqrt{24}}{4\pi^3} L(g_{24},3), \text{ and}\\
m(P_{18}) &= \frac{1}{5}\frac{|\det \mathbb{T}(\mathcal{Y}_{18})|^{3/2}}{4\pi^3} L(\mathbb{T}(\mathcal{Y}_{18}),3) + \frac{14}{5} d_3 = \frac{1}{5}\cdot\frac{120\sqrt{120}}{4\pi^3} L(g_{120},3)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{Y}_2$ est une surface $K3$ elliptique

Ecrivons P_2 sous forme projective

$$P_2 = xyz(x+y+z) + t^2(xy+xz+yz) - 2xyzt$$

La droite x+y+z=0, t=0 est sur la surface $\mathcal{Y}_2$.
Si l'on coupe $\mathcal{Y}_2$ par la famille d'hyperplans x+y+z=st on obtient

$$Y_{2,s} \qquad (x+y)(x+z)(y+z) + (s-1)^2 xyz = 0$$

Ainsi $\mathcal{Y}_2$ est la collection des $Y_{2,s}$.
Pour tout s, sauf un nombre fini, $Y_{2,s}$ définit une courbe elliptique avec modèle de Weierstrass

$$Y^2 - (s-1)^2(X+1)Y = X(X+1)(X+(s-1)^2).$$

On a ainsi réalisé une fibration elliptique de $\mathcal{Y}$

$$\mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{P}^1_s.$$

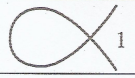
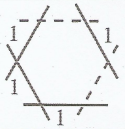
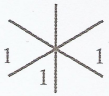
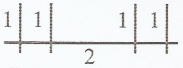
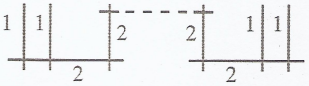
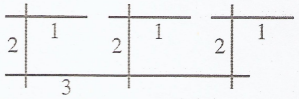
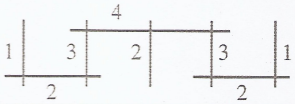
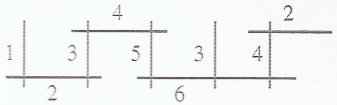
$Y_{2,s}$ est une fibre de cette fibration elliptique

A partir de cette équation de Weierstrass, on peut déduire le rang et la torsion sur $\mathbb{C}(s)$ du groupe de Mordell-Weil de $Y_{2,s}$.
Réciproquement, une équation de Weierstrass

$$y^2 + a_1(t)\,yx + a_3(t)\,y = x^3 + a_2(t)\,x^2 + a_4(t)\,x + a_6(t)$$

avec $a_i(t)$ polynôme en t de degré au plus $2i$ et exactement $2i$ pour une valeur de i, définit une surface elliptique $K3$ fibrée en t.

Pour les "mauvaises valeurs de s, $Y_{2,s}$ n'est plus une courbe elliptique: c'est une fibre singulière.
Les fibres singulières ont été classifiées par Kodaira.
Pour connaître le type de fibres singulières, on utilise en général l'algorithme de Tate.
Ainsi $Y_{2,s}$ a une fibre I_{12} pour $s = \infty$, I_6 pour $s = 1$, I_2 pour $s = 0$ et $s = 2$, I_1 pour $s = \alpha$ et $s = \beta$ racines de $(s-1)^2 = -8$.

Reduction Type	Number of Components	Configuration (with multiplicity)
I_0	1	
I_1	1	
I_n	n	
II	1	
III	2	
IV	3	
I_0^*	5	
I_n^*	n + 5	
IV^*	7	
III^*	8	
II^*	9	

The Kodaira-Néron Classification of Special Fibers

Qu'est-ce qu'une surface K3?

Une surface $K3$ est une surface lisse X satisfaisant

- $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ i.e. X est simplement connexe
- $K_X = 0$ i.e. le faisceau canonique est trivial i.e. il existe une unique, à scalairesprès, 2-forme holomorphe ω sur X.

Exemple et principales propriétés

- Un revêtement double ramifié le long d'une sextique plane définit par exemple une surface $K3$.
  Pour notre famille, on peut écrire

$$(2z + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} - k)^2 = (x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} - k)^2 - 4$$

  Les surfaces $\mathcal{Y}_k$ sont donc bien des surfaces $K3$.

Propriétés

- Si X est $K3$, $H^2(X,\mathbb{Z})$ est un groupe libre de rang 22.
- Avec le cup produit $H^2(X,\mathbb{Z})$ a une structure de réseau pair de signature $(3,19)$.
- Par la dualité de Poincaré, $H^2(X,\mathbb{Z})$ est unimodulaire et

$$H^2(X,\mathbb{Z}) = U^3 \oplus E_8[-1]^2 =: \mathcal{L}$$

$\mathcal{L}$ est le réseau $K3$, U le réseau hyperbolique de rang 2, E_8 le réseau unimodulaire de rang 8.

Propriétés (suite)

- Le groupe de Néron-Severi $NS(X)$, i.e. le groupe des diviseurs modulo équivalence algébrique, muni de l'accouplement d'intersection, est un réseau de signature $(1, \rho(X) - 1)$.
- $$NS(X) \simeq \mathbb{Z}^{\rho(X)}$$
- $$\rho(X) := \text{nombre de Picard de } X$$
- $$1 \leq \rho(X) \leq 20$$

Deux formules de Shioda

Soit $\Phi : X \to \mathbb{P}^1$ une surface elliptique avec une section. Considérons les sections de cette fibration elliptique, c'est-à-dire déterminées par les points rationnels de la courbe elliptique correspondante définie sur le corps des fonctions rationnelles en s. On note $r(\Phi)$ le rang du groupe des sections. Alors le nombre de Picard $\rho(X)$ satisfait l'équation

$$\rho(X) = r(\Phi) + 2 + \sum_{\nu=1}^{h} (m_\nu - 1) \tag{5}$$

Si $r(\Phi = 0$ et si $n(\Phi)$ est l'ordre du groupe sections de Φ,

$$\mid \det NS(X) \mid = (\prod_{\nu=1}^{h} m_\nu^{(1)})/n(\Phi)^2 \tag{6}$$

où h est le nombre de fibres singulières et m_ν (resp. $m_\nu^{(1)}$) le nombre de composantes irréductibles (resp. distinctes) de la fibre singulière correspondante.

Application

Pour la fibration en s de $\mathcal{Y}_2$, on trouve

$$\rho(\mathcal{Y}_2) = r + 2 + 11 + 5 + 1 + 1$$

et comme $\rho(\mathcal{Y}_2) \leq 20$ il vient $\rho(\mathcal{Y}_2) = 20$ et $r = 0$. Par suite $\mathcal{Y}_2$ est une surface $K3$ "singulière" et la fibration elliptique s est dite "extrémale". Par la deuxième formule de Shioda, il vient

$$\mid \det NS(\mathcal{Y}_2) \mid = \frac{12.6.2.2}{6^2} = 8$$

Le réseau trancendent

- Le réseau transcendent de X, $\mathbb{T}(X)$, est le complémentaire orthogonal de $NS(X)$ dans $H^2(X,\mathbb{Z})$ pour le cup-produit,

$$\mathbb{T}(X) = \mathrm{NS}(X)^{\perp} \subset H^2(X,\mathbb{Z}).$$

- En général, $\mathbb{T}(X)$ est un réseau pair de rang $r = 22 - \rho(X)$ et signature $(2, 20 - \rho(X))$.

Pour $\mathcal{Y}_2$, le réseau transcendent est donc de rang 2.
En outre, comme $H^2(X,\mathbb{Z})$ est unimodulaire, il résulte de la définition que $\det(\mathbb{T}(\mathcal{Y}_2)) = 8$.

Un théorème de Schütt

Théorème (Schütt)

La classification suivante des surfaces $K3$ singulières $\mathcal{Y}$ sur $\mathbb{Q}$ sont équivalentes.

- *Par le discriminant d du réseau transcendent de la surface à un facteur carré près.*
- *Par le discriminant $-d$ du réseau de Néron-Severi de la surface à un facteur carré près.*
- *Par la "newform" modulaire associée à conjugaison par un caractère près.*
- *Par le niveau de la "newform" modulaire à un facteur carré près.*
- *Par le CM corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ de la "newform" associée.*

Ce théorème repose sur le théorème de modularité de Livné pour les surfaces $K3$ singulières, qui prédit la modularité de $L(\mathbb{T}(\mathcal{Y}), s)$ par une forme modulaire de poids 3.

Esquisse de la preuve

On veut montrer:

$$m(P_2) = 4\frac{|\det \mathbb{T}(\mathcal{Y}_2)|^{3/2}}{4\pi^3} L(\mathbb{T}(Y_2), 3) = 4 \cdot \frac{8\sqrt{8}}{4\pi^3} L(g_8, 3).$$

g_8 est la CM-newform de poids 3 et niveau 8 donnée dans les tables de Schütt

$$g_8 = q - 2q^2 - 2q^3 + 4q^4 + 4q^6 - 8q^8 - 5q^9 + 14q^{11} - 8q^{12} + 16q^{16} + 2q^{17} + 10q^{18} - 3$$

On a prouvé

$$m(P_2) = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^3} \frac{1}{2} \sum_{l,m}{}' \frac{l^2 - 2m^2}{(l^2 + 2m^2)^3}$$

En comparant les q-développements, on trouve donc l'égalité

$$m(P_2) = 4 \cdot \frac{8\sqrt{8}}{4\pi^3} L(g_8, 3).$$

On calcule alors la série L de la surface $K3$ et l'on montre l'égalité

$$4\frac{|\det \mathbb{T}(\mathcal{Y}_2)|^{3/2}}{4\pi^3}L(\mathbb{T}(Y_2),3) = 4\cdot\frac{8\sqrt{8}}{4\pi^3}L(g_8,3).$$