CHAPITRE I

Fibrés localement triviaux

1.1 Catégories topologiques

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie . Une topologie sur $\mathcal{C}$ est la donnée ,pour tout couple (M ,N) d'objets de $\mathcal{C}$, d'une topologie sur l'ensemble des morphismes de $\mathcal{C}$ de source M et de but N . Cette donnée est astreinte à la condition suivante : M ,N et P représentant trois objets quelconques de $\mathcal{C}$,l'application :

$$\mathrm{Hom}(M ,N) \times \mathrm{Hom}(N ,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M ,P)$$

définie par la composition des morphismes de $\mathcal{C}$,est une application continue . Par définition ,une catégorie topologique est une catégorie munie d'une topologie .

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories topologiques . Un foncteur φ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est dit continu si l'application $u \rightsquigarrow \varphi(u)$ de Hom(M ,N) dans Hom(φ(M),φ(N)) est continue pour tout couple (M ,N) d'objets de $\mathcal{C}$. Il est clair que le foncteur identique et le foncteur composé de deux foncteurs continus sont des foncteurs continus ;On obtient ainsi une catégorie (Top-Cat)dont les objets sont les catégories topologiques et les morphismes les foncteurs continus .

Exemples :

1. Soit G un monoïde topologique . On peut lui associer la catégorie topologique (G) définie par $Ob(G) = \{\bullet\}$ et par $Fl(G) = G$,la composition des morphismes étant induite par la loi du groupe G . La notion de catégorie topologique apparait ainsi comme une généralisation de celle de monoïde topologique.

2. Soit A un anneau topologique et soit $\mathcal{L}(A)$ la catégorie des modules libres de type fini sur A . Si M (resp. N) est un module isomorphe à A^n (resp. A^p) , Hom(M ,N) est isomorphe à A^{np} comme groupe abélien . Munissons Hom(M ,N) de la topologie induite par cet isomorphisme . On voit aussitôt que ceci définit une topologie sur la catégorie $\mathcal{L}(A)$. Plus généralement considérons deux A-modules projectifs de type fini M et N . Le groupe abélien $Hom_A(M ,N)$ est isomorphe à un facteur direct de A^{np} si M (resp. N) est facteur direct de A^n (resp. A^p) . On munit ainsi la catégorie $\mathcal{P}(A)$ formée des modules projectifs de type fini sur A d'une structure de catégorie topologique .

3. Soit $\mathcal{B}$ la catégorie formée d'espaces de Banach (appartenant à un certain univers). Si E et F sont deux espaces de Banach, munissons Hom(E, F) de la topologie d'espace de Banach. Alors $\mathcal{B}$ apparait comme une catégorie topologique.

4. Soit G un groupe topologique et soit $\mathcal{B}_G$ la catégorie formée des objets de $\mathcal{B}$ où G opère. On a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}_G}(E, F) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(E, F)$ et les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}_G}(E, F)$ définissent une topologie sur $\mathcal{B}_G$.

5. La sous-catégorie de (Top) formée des espaces localement compacts est une catégorie topologique lorsqu'on munit Hom(X, Y), X et Y espaces localement compacts, de la topologie de la convergence compacte.

6. Soit F un espace topologique et soit G un groupe topologique qui opère effectivement sur F (De telle sorte qu'on peut considérer G comme un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de F). Si F' est un espace homéomorphe à F, deux homéomorphismes χ_1 ; χ_2 : F $\longrightarrow$ F' sont dits équivalents si $\chi_1^{-1}\chi_2^{-1} \in$ G. Considérons la catégorie F(G) suivante :

- Les objets de F(G) sont les couples

(E, α) où E est un espace topologique et α une classe d'homéomorphismes de F sur E.

– Les morphismes de $F(G)$ de source (E_1, α_1) et de but (E_2, α_2) sont les homéomorphismes $f : E_1 \to E_2$ tels que $\chi_2^{-1} f \chi_1 \in G$ pour un représentant χ_1 de α_1 et un représentant χ_2 de α_2 (Cette définition ne dépend pas bien sûr du choix des représentants).

Il est immédiat que l'application :

$$f \rightsquigarrow \chi_2^{-1} f \chi_1$$

est une bijection de $\mathrm{Hom}_{F(G)}((E_1, \alpha_1), (E_2, \alpha_2))$ sur G. Cette bijection définit une topologie sur la catégorie $F(G)$ quand (E_1, α_1) et (E_2, α_2) varient.

7. Soit F un espace localement compact et soit $f \in F$ un point marqué dans F. Considérons la catégorie (MF) suivante :

– Les objets de (MF) sont les espaces topologi-
E
ques avec un point marqué $e \in E$, qui possèdent la propriété suivante : Il existe un voisinage V de e dans E un voisinage U de f dans F et un homéomorphisme de U sur V qui applique f sur e.

– Les morphismes de (MF) de source (E_1, e_1) et de but (E_2, e_2) sont les germes d'applications continues en e_1 de E_1 dans E_2 qui appliquent e_1 sur e_2. On a donc $\mathrm{Hom}_{(MF)}((E_1,e_1),(E_2,e_2)) = \varinjlim M_U$ suivant le systéme filtrant des voisinages U de e_1, où M_U désigne l'ensemble des applications continues $f : U \longrightarrow E_2$ telles que $f(e_1)=e_2$. Si $\varinjlim M_U$ est muni de la topologie limite inductive de la topologie de la convergence compacte sur M_U, on vérifie sans peine que (MF) est ainsi munie d'une structure de catégorie topologique.

8. En J-théorie [ ], on s'intéresse à la catégorie topologique suivante : Elle a un unique objet et l'ensemble des morphismes est l'ensemble des endomorphismes continus d'un espace localement compact F qui sont des équivalences d'homotopie. Cet ensemble est muni de la topologie de la convergence compacte.

1.2. Equivalences de catégories topologiques

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie topologique et si $u : M \longrightarrow N$ est un $\mathcal{C}$-morphisme ,il est clair que les applications :

$$\mathrm{Hom}(N\ ,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M\ ,P) \text{ et } \mathrm{Hom}(P\ ,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P\ ,N)$$

définies par les compositions à gauche et à droite par u sont des applications continues .

Soient maintenant deux catégories topologiques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Un foncteur pleinement fidèle $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est dit bicontinu si pour tout couple (M ,N) d'objets de $\mathcal{C}$,l'application $u \rightsquigarrow \varphi(u)$ de Hom(M ,N) dans $\mathrm{Hom}(\varphi(M)\ ,\varphi(N))$ est un homéomorphisme . Le foncteur φ est dit une équivalence de catégories topologiques si :

a) Il est pleinement fidèle et bicontinu ,

b) Il est essentiellement surjectif : Pour tout objet M' de $\mathcal{C}'$ il existe un objet M de $\mathcal{C}$ et un isomorphisme de M' sur $\varphi(M)$.

Propos ition 12: Pour que le foncteur φ soit une équivalence de catégories topologiques il faut et il suffit qu'il existe un foncteur continu $S : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que S.F soit isomorphe au foncteur $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ et que F.S soit isomorphe au foncteur $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}'}$.

1. La condition est nécessaire :

Démonstration : Choisissons pour tout objet M' de $\mathcal{C}'$ un objet $M = S(M')$ de $\mathcal{C}$ et un isomorphisme $\varphi_{M'} : M' \longrightarrow F(S(M'))$. Alors le fait que F soit pleinement fidèle et bicontinu implique aussitôt que S peut d'une manière unique être considéré comme un foncteur continu de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$ de telle sorte que les $\varphi_{M'}$ réalisent un isomorphisme fonctoriel $\varphi : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}'} \longrightarrow FS$

Maintenant le fait que F soit pleinement fidèle implique que ,pour tout couple (M ,N) d'objets de $\mathcal{C}$, l'application $u \rightsquigarrow F(u)$ de Hom(M ,N) dans Hom(F(M) ,F(N)) est bijective . Donc pour tout objet M de $\mathcal{C}$,il existe un isomorphisme unique $\psi_M : M \longrightarrow (SF)(M)$ tel que $F(\psi_M) = \varphi_{F(M)}$. C.Q.F.D.

2. La condition est suffisante : Le fait que F.S soit isomorphe à $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}'}$ implique que la condition b) est sâtisfaite . Pour démontrer que F est pleinement fidèle et bicontinu ,considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(M,N) \arrow[r, "\alpha:\ u \rightsquigarrow F(u)"] \arrow[d, "\theta:\ u \rightsquigarrow SF(u)"'] & \mathrm{Hom}(F(M),F(N)) \arrow[d, "w \rightsquigarrow FS(w)"] \arrow[dl, "\beta:\ h \rightsquigarrow S(h)"'] \\
\mathrm{Hom}(SF(M),SF(N)) \arrow[r, "\gamma:\ v \rightsquigarrow F(v)"'] & \mathrm{Hom}(FSF(M),FSF(N))
\end{tikzcd}$$

Alors , si on pose $\alpha' = \theta^{-1}\beta$, α et α' sont des applications continues inverses l'une de l'autre .C.Q.F.D.

<u>Définition 1.2</u> : Deux catégories topologiques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dites topologiquement équivalentes s'il existe un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ qui soit une équivalence de catégories topologiques (D'après la proposition précédente cette relation entre catégories topologiques est une relation symétrique dans (Top$\mathcal{U}$Cat)) .

1.3 Catégories fibrés

La notion de catégorie fibrée permet de mieux comprendre la définition des fibrés localement triviaux ,définition qui sera donnée au paragraphe suivant . Nous en faisons un bref rappel en renvoyant le lecteur à [ ] pour plus de détails .

Soient $\mathcal{D}$ et I deux catégories et soit p un foncteur de $\mathcal{D}$ sur I ; nous dirons alors que $\mathcal{D}$ est une catégorie sur I de foncteur projection p . Si $i \in$ Ob I , la catégorie fibre $\mathcal{D}_i$ au-dessus de i est la sous-catégorie de $\mathcal{D}$ formée des objets de $\mathcal{D}$ se projetant en i par p et dont les morphismes sont ceux de $\mathcal{D}$ qui se projettent suivant l'identité de i . Si $f : i \longrightarrow j$, $f \in$ Fl I , $\alpha \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_i$, $\beta \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_j$,un f-morphisme de α dans β est un morphisme de $\mathcal{D}$ de α dans β qui se projettent sur f dans Fl(I) . Soit $\mathrm{Hom}_f(\alpha,\beta)$ l'ensemble des f-morphismes de α dans β . Un f-morphisme $u : \alpha \longrightarrow \beta$ est dit cartésien si pour tout $\alpha' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_i$ et tout f-morphisme $w : \alpha' \longrightarrow \beta$, il existe un i-morphisme unique $\bar{u} : \alpha' \longrightarrow \alpha$ tel que $v.\bar{u} = u$. Cela signifie donc que pour tout objet α' de $\mathcal{D}_i$,l'application $w \rightsquigarrow u.w$

$$\mathrm{Hom}_i(\alpha',\alpha) \longrightarrow \mathrm{Hom}_f(\alpha',\beta)$$

est une application bijective .

Si ,étant donné un morphisme $f : i \longrightarrow j$ de I ,pour tout objet β de $\mathcal{D}_j$ il existe un objet α de $\mathcal{D}_i$ et il existe un f-morphisme cartésien de α dans β ,on dit que le foncteur image inverse f^* existe . En effet si cette condition est satisfaite , β étant donné , α est déterminé à isomorphisme unique près ; la correspondance $\beta \rightsquigarrow \alpha$ est fonctorielle et détermine un foncteur $f^* : \mathcal{D}_j \longrightarrow \mathcal{D}_i$ défini à isomorphisme unique près .

La catégorie $\mathcal{D}$ est dite une <u>catégorie fibrée</u> sur I de foncteur projection p si elle satisfait aux deux axiomes suivants :

M

Fib.I : Pour tout morphisme f de I ,le foncteur image inverse dans $\mathcal{D}$ par f existe .

Fib.II : Le composé de deux morphismes cartésiens est cartésien .

Si ,en outre ,pour chaque morphisme f de I , on se donne le foncteur image inverse f^* de telle sorte que $(f.g)^* = g^*.f^*$ chaque fois que f.g est défini , on dit que la catégorie $\mathcal{D}$ est <u>fibrée scindée</u> sur I .

Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux catégories fibrées sur I de foncteurs projections p et p' ,un foncteur fibrant de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ est un foncteur $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{D}' \arrow[dl, "p'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Le foncteur fibrant F est dit une <u>équivalence de catégories fibrées</u> si :

a) F est pleinement fidèle

b) $\forall\, i \in \mathrm{Ob}I$ et $\forall\, \alpha' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}'_i$, $\exists\, \alpha \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_i$ et un i-isomorphisme $u : F(\alpha) \longrightarrow \alpha'$.

Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont scindées ,F est dit une équivalence de catégories fibrées scindées si ,de plus ,F commute aux foncteurs image inverse f^* .

Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{O}(X)$ la catégorie des ouverts de X . Soit $\mathcal{D}$ une catégorie fibrée scindée sur $\mathcal{O}(X)$. Si $f : U \longrightarrow V$ est un morphisme de $\mathcal{O}(X)$ et si f (resp. E) est un morphisme(resp.un objet) de $\mathcal{D}_V$ on note $f|_U$ ou f_U (resp. $E|_U$ ou E_U) le morphisme (resp. l'objet) $i^* f$ (resp. $i^* E$) .

Ces notation étant précisées on dit que la catégorie fibrée scindée $\mathcal{D}$ est <u>complète</u> si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

(RM) (recollement des morphismes) : Soient E et F des objets de $\mathcal{D}$ au-dessus d'un ouvert U et soient $f_i : E_{U_i} \longrightarrow F_{U_i}$ des U_i-morphismes associés à un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de U de telle sorte que

$$f_{i\,U_i\,U_j} = f_{j\,U_i\,U_j}$$

Alors il existe un U-morphisme $f : E \longrightarrow F$ et un seul tel que $f|_{U_i} = f_i$.

(RO) (recollement des objets) Avec les notations précédentes soient E_i des objets de $\mathcal{D}$ au-dessus de U_i et soient $g_{ji} : E_i|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow E_j|_{U_i \cap U_j}$ des $U_i \cap U_j$-isomorphismes satisfaisant à la condition de transitivité $g_{kj} \cdot g_{ji} = g_{ki}$ au-dessus de $U_i \cap U_j \cap U_k$. Alors il existe un objet E de $\mathcal{D}$ au-dessus de U et des U_i-isomorphismes $g_i : E_{U_i} \longrightarrow E_i$ tels que $g_{ji} = (g_j \cdot g_i^{-1})|_{U_i \cap U_j}$. De plus une telle donnée (E, g_i) est unique à isomorphisme unique près . De manière précise si (E', g'_i) est une autre donnée satisfaisant aux conditions précédentes, il existe un isomorphisme unique $f : E \longrightarrow E'$ tel que $g'_i \cdot f_{U_i} = g_i$.

Considérons maintenant une catégorie fibrée scindée $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{O}(X)$ et soit $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \hat{\mathcal{D}}$ un foncteur fibrant de $\mathcal{D}$ dans une catégorie fibrée scindée complète sur $\mathcal{O}(X)$. On dit que le couple $(\hat{\mathcal{D}}, \varphi)$ représente la catégorie complétée de $\mathcal{D}$ si, pour tout foncteur fibrant ψ de $\mathcal{D}$ dans une catégorie fibrée scindée complète $\mathcal{D}'$, il existe un foncteur $\hat{\psi}$ unique, à isomorphisme près, qui rend le diagramme suivant commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \hat{\mathcal{D}} \arrow[dl, "\hat{\psi}"] \\ & \mathcal{D}' & \end{tikzcd}$$

<u>Théorème 1.3.</u> : La catégorie complétée d'une catégorie fibrée scindée sur $\mathcal{O}(X)$ existe : Elle est unique à équivalence de catégories fibrées près.

1.4. <u>Fibrés triviaux . Fibrés localement triviaux</u> .

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie topologique . Un <u>$\mathcal{C}$-fibré trivial</u> est la donnée d'un couple (X, M) où X est un espace topologique et M un objet de $\mathcal{C}$. Les $\mathcal{C}$-fibrés triviaux sont les objets d'une catégorie dont les morphismes de source (X, M) et de but (Y, N) sont les couples (f, f') d'applications continues ,

$f : X \longrightarrow Y$ et $f' : X \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N)$.

Le composé des morphismes :

$(f, f') : (X, M) \longrightarrow (Y, N)$ et $(g, g') : (Y, N) \longrightarrow (Z, P)$

est le morphisme :

$$(h, h') : (X, M) \longrightarrow (Z, P)$$

où $h = g.f$ et où h' est le composé des applications continues :

$$X \xrightarrow{(f', g'f)} \mathrm{Hom}(M, N) \times \mathrm{Hom}(N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, P)$$

Le morphisme identique du fibré trivial (X, M) est , bien sûr , le couple formé du morphisme identique de X et de l'application continue de X dans $\mathrm{Hom}(M, M)$ dont l'image se réduit au morphisme identique de M .

On vérifie sans peine qu'on a bien ainsi défini une catégorie $\mathcal{C}_T$ et qu'on a un foncteur projection $p : \mathcal{C}_T \longrightarrow (\mathrm{Top})$ défini par $p(X, M) = X$

et par $p(f ,f') = f$ . .

Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue et si $\eta = (Y ,M)$ est un $\mathcal{C}$-fibré trivial , définissons $f^*\eta$ comme le couple formé de l'objet (X ,M) de $\mathcal{C}_T$ et du morphisme $(f ,\alpha) : (X ,M) \longrightarrow (Y ,M)$ où α est le composé des morphismes :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Hom}(M ,M)$$

avec $\alpha'(y) = Id_M$ $\forall y \in Y$. Si $\xi' = (X ,N)$ est un objet de $\mathcal{C}_T$ et si (f ,f') est un morphisme de ξ' dans η ,il existe un morphisme (Id_X ,f'') et un seul de ξ' dans $f^*\eta$ tel que $(f ,Id).(Id_X ,f'') = (f ,f')$: c'est en effet (Id_X ,f') . Le morphisme (f ,α) est donc un morphisme cartésien et f^* définit un foncteur noté encore f^* , de la catégorie des fibrés triviaux au-dessus de Y dans cells des fibrés triviaux au-dessus de X . De plus on a de manière évidente la relation $(f.g)^* = g^*.f^*$ chaque fois que f.g est défini .
Ainsi ,la catégorie $\mathcal{C}_T$,munie du foncteur projection p et des foncteurs image inverse f^* ,est une catégorie fibrée scindée sur (Top) .

Soit X un espace topologique . La catégorie $\mathcal{C}_T$ définit de manière évidente une catégorie fibrée scindée sur $\sigma(X)$ que nous désignerons par $\mathcal{C}_T(\sigma(X))$. Un $\mathcal{C}$-<u>fibré localement trivial</u> au-dessus d'un ouvert U de X sera alors un objet de la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}_T(\sigma(X))$ complétée de $\mathcal{C}_T(\sigma(X))$: Il est obtenu par "recollement" de fibrés triviaux au-dessus des éléments d'un recouvrement ouvert de U.

Dans ce cas particulier on peut donner une définition explicite de la catégorie complétée que voici :

Un $\mathcal{C}$-fibré localement trivial est la donnée suivante :

a) Un ouvert U de X

b) Des objets E_x de $\mathcal{C}$ au-dessus de chaque point x de U.

b) Un recouvrement ouvert U_i de U et des objets M_i de $\mathcal{C}$ au-dessus de chaque ouvert U_i.

d) D'isomorphismes $\varphi_{ix} : M_i \longrightarrow E_x$, définis $\forall$ i et $\forall x \in U_i$.

Cette donnée doit satisfaire à la condition de cohérence suivante :

(Ob) L'application :

$x \rightsquigarrow \varphi_{jx}^{-1} \varphi_{ix}$

de $U_i \cap U_j$ dans $\mathrm{Hom}(M_i, M_j)$ est une application continue .

L'ouvert U est dit la base du fibré et $E = \bigsqcup_{x \in X} E_x$ son espace total . Les applications $\varphi_i = \bigsqcup_{x \in X} \varphi_{ix}$ sont dites les applications trivialisantes du fibré . Par abus de langage ,on désignera parfois un fibré par son espace total E .

Soient $\xi = (U, E, U_i, M_i, \varphi_i)$ et $\eta = (V, F, V_j, N_j, \psi_j)$ deux $\mathcal{C}$-fibrés localement triviaux . Alors ,dans la catégorie complétée ,il n'existe pas de morphisme de ξ dans η si $U \not\subset V$. Supposons donc $U \subset V$. Dans ce cas un morphisme $\bar{f}$ de ξ dans η est la donnée de $\mathcal{C}$-morphismes $\bar{f}_x : E_x \longrightarrow F_x \ \forall x \in X$ tels que la condition suivante soit satisfaite :

(Mor) L'application :

$$x \rightsquigarrow \psi_{jx}^{-1}\, \bar{f}_x\, \varphi_{ix}$$

soit ,pour tout couple (i ,j) ,une application continue de $U_i \cap V_j$ dans $\mathrm{Hom}(M_i, N_j)$. Le composé de deux morphismes $\bar{f}$ et $\bar{g}$ est défini par la formule $(\bar{f}.\bar{g})_x = \bar{f}_x . \bar{g}_x$ et le morphisme identique de E est le morphisme défini pour chaque x par le morphisme identique de E_x . On obtient ainsi une catégorie dont il reste à montrer que c'est une catégorie fibrée scindée sur $\mathcal{O}(X)$. En effet soit $U \subset V$ deux ouverts de X et soit $\xi = (V, F, V_j, N_j, \varphi_j)$ un $\mathcal{C}$-fibré localement trivial . Considérons le fibré $(U, E, U_j, N_j, \psi_j)=\eta$ où $E_x = F_x$ $(x \in U)$, $U_j = U \cap V_j$, $\psi_{jx} = \varphi_{jx}$ et le morphisme $\alpha : \eta \longrightarrow \xi$ défini par $\alpha_x = Id_{E_x}$.

Alors il est immédiat que α est un morphisme cartésien

Le fibré η est dit la restriction de ξ à U . Comme cette opération de restriction est transitive ceci démontre notre assertion précédente .

On peut considérer $\mathcal{C}_T$ comme une sous-catégorie de $\hat{\mathcal{C}}_T$ de la manière suivante : Définissons un foncteur injectif (sur les objets et les morphismes) φ par $\varphi(U, M) = (U, E, U_i, M_i, \varphi_i)$ où $E_x = M$ $\forall x \in X$, $M_i = M$ et $\varphi_{ix} = Id_M$ et par $\varphi(Id, f')_x = f'(x)$ si $(Id, f') : (U, M) \longrightarrow (U, N)$.

A titre d'exercice ,on laisse au lecteur la vérification des points suivants : La catégorie $\hat{\mathcal{C}}_T$ qu'on vient de décrire est bien une catégorie complète et le couple $(i, \hat{\mathcal{C}}_T)$ représente la catégorie complétée de $\mathcal{C}_T$ (Ce qui justifie la notation) .

Il est commode (bien que moins important en pratique) de considérer des fibrés localement triviaux sur des espaces topologiques variables et plus seulement sur les ouverts d'un espace topologique . On s'y ramène cependant de la manière suivante : Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue et soit $\eta = (Y, F, V_j, N_j, \psi_j)$ un fibré sur Y . Considérons le fibré $f^*\eta$ $= (X, E, U_j, N_j, \varphi_j)$ où $E_x = F_{f(x)}$, $U_j = f^{-1}(V_j)$, $\varphi_{jx} = \psi_{jf(x)}$; c'est bien un fibré car l'application

$$x \rightsquigarrow \varphi_{jx}^{-1} \varphi_{ix}$$

de $U_i \cap U_j$ dans $\mathrm{Hom}(N_i, N_j)$ est le composé des applications continues :

$$U_i \cap U_j \xrightarrow{f} V_i \cap V_j \longrightarrow \mathrm{Hom}(N_i, N_j)$$

De plus on a les relations évidentes $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ chaque fois que $f \circ g$ est défini . Si ξ est un fibré au-dessus de X ,ceci permet de définir l'ensemble des flèches de ξ dans η comme $\mathrm{Hom}(\xi, f^*\eta)$

On obtient ainsi une catégorie fibrée scindée sur (Top) . Dans la suite on désignera cette catégorie par $\overline{\mathcal{C}}$ et la catégorie fibre au-dessus de l'espace X par $\mathcal{C}(X)$.

Exemples :

La notion de catégorie topologique permet de retrouver à peu près toutes les définitions de fibré localement trivial . Le lecteur est prié de se reporter à la liste des exemples de catégories topologiques du §1.1 . Achaque exemple correspond une classe de fibrés particulière ,en général étudiée très en détail dans la littérature .

1.Les fibrés à coordonnées au sens de Steenrod de groupe G (Cf [ ] § 3.3)

2. Voir l'appendice . Si A = R ,C ou H ,on retrouve la notion de fibré vectoriel classique

3. Les fibrés banachiques

4. Les fibrés banachiques où un groupe opère sur la fibre .

5. Les espaces fibrés localement triviaux de fibre un espac localement compact .

6.Les fibrés à coordonnées au sens de Steenrod de fibre F et de groupe G . Cela résulte du fait que les catégories topologiques 1. et 5. sont équivalentes : Ceci implique en effet (Proposition 1.4.) que les catégories fibrées 1. et 5. sont équivalentes .

7.Les microfibrés (Tout au moins si $F = R^n$ et si b = 0)

8. Les fibrés "homotopiques" . Cf [ ] .

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories topologiques et soit φ un foncteur continu de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Ce foncteur induit un foncteur φ_T de $\mathcal{C}_T$ dans $\mathcal{C}'_T$ défini par $\varphi_T(X,M) = (X,M)$ et par $\varphi_T(f,f') = (f,\varphi_{M,N}\circ f')$ où $(f,f'):(X,M) \longrightarrow (Y,N)$ et où $\varphi_{M,N}$ est l'application continue $\mathrm{Hom}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}((M),(N))$ déduite de la fonctorialité de φ . Maintenant ,pour des raisons d'universalité, φ_T va induire un foncteur $\overline{\varphi}$ de $\overline{\mathcal{C}}$ dans $\overline{\mathcal{C}}'$. Explicitement on peut le décrire ainsi :
$\overline{\varphi}(X,E,U_i,M_i,\varphi_i) = (X,E',U_i,\varphi(M_i),\varphi_i')$ où $E'_x = \varphi(E_x)$ et où $\varphi'_{ix} = \varphi(\varphi_{ix})$ et $(\varphi(\overline{f}))_x = \varphi(\overline{f}_x)$. On a donc ainsi défini un foncteur de (Top-Cat) dans (Cat)/(Top) (catégorie des catégories fibrées sur (Top)) .

<u>Proposition 1.4.1</u>: Soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ une équivalence de catégories topologiques . Alors $\overline{\varphi}$ est une équivalence de catégories fibrées scindées .

En effet il est clair que φ_T est une équivalence de catégories fibrées scindées . Alors $\overline{\varphi}$ est une équivalence de catégories fibrées scindées car $\overline{\mathcal{C}}$ et $\overline{\mathcal{C}}'$ sont solutions d'un même problème universel .

Donnons une application de la proposition 1.4.1

<u>Proposition 1.4.2</u> : Soit B un espace de Banach et soit $\mathcal{P}^B$ la sous-catégorie fibrée pleine de la catégorie des fibrés banachique formée des espaces fibrés de fibre isomorphe à un facteur direct de B^n . Soit maintenant A l'algèbre de Banach End B et soit A^o l'algèbre de Banach opposée à A . Soit enfin $\mathcal{P}_{A^o}$ la catégorie des fibrés en modulesprojectifssur A^o (Cf Appendice) . Alors les catégories fibrées $\mathcal{P}^B$ et $\mathcal{P}_{A^o}$ sont équivalentes.

1.5 Fibrés de base paracompacte.

Soit X un espace topologique. Un recouvrement $[X_i]$ de X est dit essentiellement ouvert si $\mathring{X}_i$ est un recouvrement de X.

Proposition 1.5 : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie topologique. On sait que la catégorie fibrée $\overline{\mathcal{C}}$ sur (Top) formée des $\mathcal{C}$-fibrés localement triviaux vérifie les axiomes (RM) et (RO) du § 1.3 relatifs à un recouvrement ouvert $[U_i]$ d'un espace topologique X. En fait la catégorie fibrée $\mathcal{D}$ vérifie des axiomes plus forts (RM') et (RO') qu'on énonce comme les axiomes précédents, mais en supposant le recouvrement $[U_i]$ essentiellement ouvert.

La démonstration de cette proposition est laissée en exercice au lecteur.

Lemme 1.5 : Soient X et Y deux espaces topologiques avec X séparé et soit F(X ,Y) l'espace fonctionnel des applications continues de X dans Y, muni de la topologie de la convergence compacte. Alors si $[X_i]$ est un recouvrement fermé localement fini de X, l'application continue

$$F(X,Y) \longrightarrow \prod_i F(X_i,Y)$$

définie par les inclusions $X_i \subset X$, est un homéomorphisme de F(X ,Y) sur un sous-espace de $\prod_i F(X_i,Y)$.

Le fait que cette application soit continue et injective est immédiat. Démontrons que F(X ,Y) a la topologie induite par celle de $\prod_i F(U_i, Y)$; i.e. si U est un ouvert de $F(X, Y)$ il faut trouver un ouvert V de $\prod_i F(U_i, Y)$ tel que $V \cap F(X, Y) = U$. Pour cela il suffit de le vérifier pour un ouvert U du type $W(K, U')$ $= \{ f : X \rightarrow Y \mid f(K) \subset U' \}$, K compact et U' ouvert. Soit donc $K_i = K \cap X_i$ et soit T_i l'ensemble ouvert de $F(U_i, Y)$ formé des fonctions f_i telles que $f_i(K_i) \subset U'$. Alors $T_i = F(U_i, Y)$ sauf pour un nombre fini d'indices i et $V = \prod_i T_i$ est ouvert dans $\prod_i F(U_i, Y)$. Or $V \cap F(X, Y) = U$.

C.Q.F.D.

Si X est un espace paracompact et si $\mathcal{C}$ est une catégorie topologique, on se propose de définir une topologie sur la catégorie $\mathcal{C}(X)$. Si ξ et η sont deux fibrés sur X, on se propose donc de définir une topologie adéquate sur $\mathrm{Hom}_X(\xi, \eta)$. Commençons par supposer ξ et η triviaux, soit $\xi = (X, M)$ et $\eta = (X, N)$ on munit alors $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$ de la topologie de $F(X, \mathrm{Hom}(M, N))$. En raison de la fonctorialité de $F(,)$, ceci définit une topologie sur $\mathcal{C}_T(X)$ (Catégorie des fibrés triviaux sur X). Envisageons maintenant le cas général où ξ et η sont localement triviaux. Soit $\{X_i\}$ un recouvrement fermé essentiellement ouvert de X tel que les restrictions à X_i de ξ et de η soient isomorphes à des fibrés triviaux . Alors , d'après (RM')(Proposition 1.5.) $\mathrm{Hom}(\xi,\eta)$ s'identifie à un sous-ensemble de $\prod_i \mathrm{Hom}(\xi_{X_i},\eta_{X_i})$. La topologie ainsi induite sur $\mathrm{Hom}(\xi,\eta)$ ne dépend pas du choix des X_i . En effet si X'_j est un autre choix , $\prod_i \mathrm{Hom}(\xi_{X_i},\eta_{X_i})$ et $\prod_j \mathrm{Hom}(\xi_{X'_j},\eta_{X'_j})$ s'identifie à des sous-espaces de $\prod_{i,j} \mathrm{Hom}(\xi_{X''_{ij}},\eta_{X''_{ij}})$ avec $X''_{ij} = X_i \cap X'_j$ d'après le lemme 1.5. et $\mathrm{Hom}(\xi,\eta)$ s'identifie alors à deux sous-espaces homéomorphes de $\prod_{i,j} \mathrm{Hom}(\xi_{X''_{ij}},\eta_{X''_{ij}})$. On vérifie aussitôt , la question étant locale , que $\mathcal{C}(X)$ est bien ainsi muni d'une structure de catégorie topologique .

Considérons à présent deux espaces paracompacts X et Y et soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue . Montrons que le foncteur image inverse $f^* : \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ est continu c'est à dire que l'application $u \rightsquigarrow f^*(u)$ de $\mathrm{Hom}_Y(\xi,\eta)$ dans $\mathrm{Hom}_X(f^*\xi, f^*\eta)$ est bien continue . Mais , la question étant locale , on est ramené au cas où ξ et η sont triviaux et alors c'est évident en raison de la fonctorialité de F(,) par rapport à son premier argument .

La situation que nous venons de décrire pour la catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ est un cas particulier de la situation générale que voici : Soit $\mathcal{D}$ une catégorie fibrée sur une catégorie I de foncteur projection p . Alors une topologie sur la catégorie fibrée $\mathcal{D}$ est la donnée d'une topologie sur chaque catégorie fibre $\mathcal{D}_i$ de telle sorte que les foncteurs image inverse f^* associés à une flèche quelconque f de I soient des foncteurs continus (tout foncteur isomorphe à un foncteur continu est continu) . Une catégorie fibrée topologique est une catégorie fibrée munie d'une topologie .Ainsi la sous-catégorie fibrée de $\overline{\mathcal{C}}$ formée des fibrés de base para-compacte est une catégorie fibrée topologique comme expliqué plus haut . Nous verrons plus tard d'autres exemples .

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories topologiques et soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur continu . Alors φ induit un foncteur $\varphi(X) : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}'(X)$. Montrons qu'il est continu (pour X paracompact) . La question étant encore locale il suffit de la vérifier pour des fibrés triviaux . C'est alors évident en raison de la fonctorialité de F(,) par rapport à son deuxième argument .

1.6 Homotopie des fibrés

Le théorème fondamental de ce paragraphe est le suivant :

<u>Théorème 1.6.1</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie topologique et soit X un espace paracompact . Alors tout $\mathcal{C}$-fibré localement trivial sur $X \times [0,1]$ est isomorphe à un fibré de la forme $\pi^* E$ où $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}(X)$ et où $\pi : X \times [0,1] \longrightarrow X$ est la première projection .

Nous n'avons rien à ajouter à la démonstration très élégante de Milnor ([ ] lemmes 6.6 ,6.7 ,6.8 ,6.9) Il suffit de remplacer le mot "microbundle" par fibré localement trivial et le mot "bundle-map germ" par morphisme cartésien . Pour la commodité du lecteur nous reproduisons entièrement cette démonstration .

<u>Lemme 1.6.1</u> : Soit ξ un $\mathcal{C}$-fi de base B et soit $\{B_\alpha\}$ un recouvrement fermé localement fini de B . Considérons un autre $\mathcal{C}$-fibré ξ' de base quelconque et supposons donnés des morphismes cartésiens $f_\alpha : \xi_{B_\alpha} \longrightarrow \xi'$ tels que f_α et f_β coïncident sur $B_\alpha \cap B_\beta$. Alors il existe un morphisme cartésien et un seul f de ξ dans η qui coïncide avec f_α sur chaque fermé B_α .

On peut supposer ,sans restreindre la généralité ,que ξ et ξ' ont même base B et que les f_α se projettent en Id_{B_α} . Soit $\xi = (B, E, U_i, M_i, \varphi_i)$ et $\xi' = (B, E', U_i, M_i, \varphi'_i)$ où les ouverts U_i sont des overts de trivialisation communs aux deux fibrés ξ et ξ' ,et dont on peut supposer , sans restreindre la généralité ,que chacun d'entre eux ne rencontre qu'un nombre fini de fermés B_α . La donnée des morphisme f implique ,au-dessus de chaque fermé B_α) la donnée de morphismesde E_x dans E'_x que nous désignerons par f_x . De plus l'application de $U_i \cap U_j \cap B_\alpha$ dans Hom(M_i ,M_j) définie par $x \rightsquigarrow \varphi^{-1}_{jx} f_{\alpha x} \varphi_{ix}$ est une application continue . Le morphisme f de ξ dans ξ' défini par $f_{\alpha x}$ pour $x \in B_\alpha$ est bien un morphisme de fibrés . En effet l'application de $U_i \cap U_j$ dans Hom(M_i ,M_j) définie par $x \rightsquigarrow \varphi^{-1}_{jx} f_x \varphi_{ix}$ est continue sur les éléments d'un recouvrement fermé <u>fini</u> $U_i \cap U_j \cap B_\alpha$ de $U_i \cap U_j$. De plus c'est évidemment le seul qui coïncide avec f_α au-dessus de B_α . Il reste à montrer que f est cartésien si les f_α le sont . Mais ceci revient à dire que f est un isomorphisme si les f_α sont des isomorphismes ,ce qui est clair .

<u>Lemme 1.6.2</u> :Soit ξ un fibré sur un produit B x $[0 ,1]$ tel que $\xi|_{B \times [0 ,1/2]}$ et $\xi|_{B \times [1/2 ,1]}$ soient isomorphes à des fibrés triviaux . Alors ξ est isomorphe à un fibré trivial .

Comme $\xi|_{B \times [1/2 ,1]}$ est (isomorphe à) un fibré trivial il existe un morphisme cartésien de $\xi|_{B \times [1/2 ,1]}$ dans $\xi|_{B \times \{1/2\}}$. En le"recollant" , d'après le lemme 1.6.2 ,avec l'application identique de $\xi|_{B \times [0 ,1/2]}$ on obtient un morphisme cartésien de ξ dans $\xi|_{B \times [0 ,1/2]}$. Comme ce dernier est trivial , ξ est trivial .C.Q.F.D.

<u>Lemme 1.6.3</u> : Soit ξ un fibré sur $B \times [0,1]$. Alors, pour chaque point b de B, il existe un voisinage V de b tel que $\xi|_{V \times [0,1]}$ soit trivial.

Pour chaque $t \in [0,1]$ choisissons un voisinage $V_t \times (t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t)$ de (b,t) tel que ξ restreint à ce voisinage soit trivial. L'ensemble compact $\{b\} \times [0,1]$ est recouvert par un nombre fini de tels voisinages. Soit V l'intersection des voisinages correspondants V_t. Alors il existe une subdivision $0=t_0<t_1<t_2 \ldots <t_k=1$ tel que $\xi|_{V \times [t_{i-1}, t_i]}$ soit trivial. Il en résulte que $\xi|_{V \times [0,1]}$ est trivial en appliquant le lemme 1.6.2 k-1 fois.

<u>Lemme 1.6.3</u> : Soit ξ un fibré sur $B \times [0,1]$, où B est supposé paracompact. Alors il existe un morphisme cartésien de $\xi|_{B \times [0,1]}$ dans $\xi|_{B \times 1}$ qui se projette suivant la . standard $B \times [0,1] \longrightarrow B \times \{1\}$

Soit $\{V_\alpha\}$ un recouvrement ouvert localement fini de B tel que $\xi|_{V_\alpha \times [0,1]}$ soit trivial. Choisissons des fonctions à valeurs réelles

$$\lambda_\alpha : B_\alpha \longrightarrow [0,1]$$

telles que chaque λ_α ait un support contenu dans V_α et telles que $\operatorname{Max}_\alpha \lambda_\alpha(b) = 1$ pour chaque point b de B.

Définissons maintenant une rétraction r_α de $B \times [0,1]$ sur lui-même par :

$$r_\alpha(b,t) = (b, \operatorname{Max}(t, \lambda_\alpha(b)))$$

La"composition" des rétractions r_α est la rétraction r définie par $r(b,t) = (b,1)$

Pour chaque indice α on va définir un r_α-morphisme cartésien R_α comme suit : Exprimons $B \times [0,1]$ comme la réunion de deux sous-ensembles fermés :

$$A_\alpha = (\text{Support}\,\lambda_\alpha) \times [0,1]$$
$$A'_\alpha = \{(b,t) \mid t > \lambda_\alpha(b)\}$$

Puisque $\xi|_{A_\alpha}$ est trivial, l'application identique de $\xi|_{A'_\alpha \cap A_\alpha}$ s'étend en un morphisme cartésien de $\xi|_{A_\alpha}$ dans $\xi|_{A_\alpha \cap A'_\alpha}$ au-dessus de $r|_{A_\alpha}$. En le recollant avec le morphisme identique de $\xi|_{A'_\alpha}$ on obtient ainsi le morphisme cartésien R_α cherché.

Si on choisit maintenant un ordre total sur l'ensemble d'indices $\{\nu\}$, le morphisme

$$R : \xi \longrightarrow \xi|_{B \times \{1\}}$$

défini par la "composition" des morphismes R_α, est un morphisme cartésien. Cette décomposition a un sens puisque, localement, tous les morphismes R_α, sauf un nombre fini, sont égaux à l'identité ; C.Q.F.D.

Le théorème 1.6.1 est maintenant une conséquence triviale du lemme 1.6.3 .

<u>Corollaire</u> : Soient $f, g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues homotopes. Alors si ξ est un fibré sur Y et si X est paracompact, les fibrés $f^*\xi$ et $g^*\xi$ sont isomorphes.

Soient maintenant X un espace paracompact et Y un espace compact. Soit $p : X \times Y \longrightarrow X$ la première projection. Alors on a un foncteur évident φ de $\mathcal{E}(X)_T(Y)$ dans $\mathcal{E}(X \times Y)$

défini par $\varphi(Y,F) = (X\times Y, p^*F)$ et par $\varphi(\bar{f})_{x,y} = \bar{f}_{y}$.
Par recollement , ce foncteur définit un foncteur , noté encore φ, de $\mathcal{C}(X)(Y)$ dans $\mathcal{C}(X \times Y)$.

<u>Théorème 1.6.2</u> : L'espace X étant paracompact et l'espace Y compact , le foncteur φ de $\mathcal{C}(X)(Y)$ dans $\mathcal{C}(X \times Y)$ défini précédemment est pleinement fidèle et bicontinu . De plus s'il existe un recouvrement de Y formé d'ouverts paracompacts contractiles , le foncteur φ est une équivalence de catégories topologiques .

Compte tenu de l'homéomorphisme bien connu $F(X_1, F(X_2, X_3)) \simeq F(X_1 \times X_2, X_3)$ où X_1 est séparé et X_2 localement compact , le fait que le foncteur φ soit pleinement fidèle et bicontinu résulte immédiatement des définitions . Soit maintenant $\{U_i\}$ un recouvrement de Y par des ouverts paracompacts contractiles . Choisissons des points $x_i \in U_i$ et soit $\pi_i : X\times U_i \longrightarrow X\times\{x_i\}$ la projection évidente . Alors d'après le théorème 1.6.1 tout $\mathcal{C}$-fibré sur X x Y est isomorphe à un $\mathcal{C}$-fibré obtenu par recollement de fibrés de la forme $\pi_i^* E_i$ au moyen d'isomorphismes de recollement :

$$g_{ji}(x,y) : \pi_i^* E_i|X\times(U_i \cap U_j) \longrightarrow \pi_j^* E_j|X\times(U_i \cap U_j)$$

Mais ce fibré est isomorphe à l'image par φ du $\mathcal{C}(X)$-fibré sur Y obtenu par recollement des fibrés $\pi_i'^* E_i$ $(\pi'_i : U_i \longrightarrow \{x_i\})$ au moyen des isomorphismes :

$$g'_{ji}(y) : \pi_i'^* E_i|U_i \cap U_j \longrightarrow \pi_j'^* E_j|U_i \cap U_j$$

où $g'_{ji}(y)$ est l'isomorphisme de E_i sur E_j valant $g_{ji}(x,y)$

point x de X :

Définition 1.6.1 : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories topologiques et soient $\psi_0 , \psi_1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ deux foncteurs continus . Les foncteurs ψ_0 et ψ_1 sont dits homotopes s'il existe un foncteur continu $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'([0 ,1])$ tel que $p_0\psi = \psi_0$ et $p_1\psi = \psi_1$ où p_0 et p_1 sont les foncteurs restriction de $\mathcal{C}'([0,1])$ sur $\mathcal{C}'\{0\} \approx \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}'\{1\} \approx \mathcal{C}'$ respectivement . Deux catégories topologiques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dites homotopiquement équivalentes s'il existe deux foncteurs continu s [illegible] tels que $\theta . \psi$ (resp. $\psi . \theta$) soit homotope au foncteur identité de $\mathcal{C}$ (resp. de $\mathcal{C}'$) .

Il est clair que deux foncteurs continus isomorphes sont homotopes . En particulier on en déduit que deux catégories topologiquement équivalentes sont homotopiquement équivalentes . La réciproque est cependant inexacte comme on peut le déduire aisément de la proposition suivante :

Proposition 1.6.1 : Soient X et Y deux espaces paracompacts et soient $f,g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues homotopes . Alors si $\mathcal{C}$ est une catégorie topologique , les foncteurs $f^*,g^* : \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ sont homotopes . En particulier le type d'homotopie de $\mathcal{C}(X)$ ne dépend que du type d'homotopie de X .

En effet il existe une application continue $F(x,t) : X \times [0 ,1] \longrightarrow Y$ telle que $F(x,0)=f(x)$ et $F(x,1)=g(x)$. En composant le foncteur F^* par un quasi-inverse φ' de l'équivalence de catégories

$\mathcal{C}(X)([0,1]) \simeq \mathcal{C}(X \times [0,1]))$ on voit que le foncteur $p_0 \circ \varphi' \circ F^*$ (resp. $p_1 \circ \varphi' \circ F^*$) est isomorphe au foncteur f^* (resp. g^*) . C.Q.F.D.

<u>Définition 1.6.2</u> : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories topologiques et soit φ un foncteur continu de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Alors φ est dit un <u>S-foncteur</u> si quels que soient les objets M et N de $\mathcal{C}$,l'application $u \rightsquigarrow \varphi(u)$ de Iso(M ,N) dans Iso(φ(M) ,φ(N)) définit un fibré au sens de Serre au-dessus de Iso(φ(M) ,φ(N)).

<u>Proposition 1.6.2</u> : Soit X un polyèdre fini et soit Y un sous-polyèdre . Alors le foncteur "restriction" de $\mathcal{C}(X)$ dans $\mathcal{C}(Y)$ est un S-foncteur .

Il faut démontrer que si K est un polyèdre , si $f : K \longrightarrow \mathrm{Iso}(E_Y , F_Y)$ est une application continue (E et F étant des fibrés sur X) et si f "se relève" dans Iso(E ,F) ,alors toute homotopie de f se relève (une homotopie de f est une application continue $f(x,t) : K \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{Iso}(E_Y , F_Y)$ telle que $f(x,0)=f(x)$)

Il résulte maintenant de l'homéomorphisme $F(K ,F(Z ,T)) \approx F(K \times Z ,T)$, où Z est un élément d'un recouvrement essentiellement ouvert de K et où T

T = Iso(M ,N) ,M et N étant des objets de $\mathcal{C}$,que , sans restreindre la généralité ,on peut supposer que K est un point en considérant des fibrés sur K x X et K x Y . On est ainsi ramené au problème suivant :

Si E et F sont deux fibrés Sur X et si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont leurs images inverses par la projection $X \times [0,1] \longrightarrow X$, alors tout isomorphisme f de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ au-dessus de $X \times \{0\} \cup Y \times [0,1]$ se prolonge en un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ au-dessus de $X \times [0,1]$ tout entier. Mais en effet, X étant un polyédre et Y un sous-polyèdre, il existe une rétraction $r : X \times [0,1] \longrightarrow X \times \{0\} \cup Y \times [0,1]$. Alors l'isomorphisme $\tilde{f}$ de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ défini par $\tilde{f}_{(x,t)} = f_{r(x,t)}$, $x \in X$, $t \in [0,1]$, est le prolongement cherché. C.Q.F.D.

<u>Définition 1.6.3</u> : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories topologiques et soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur continu. Alors le <u>mapping-cylinder</u> de φ est la catégorie topologique M_φ, sous-catégorie de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'([0,1])$ formée des couples $(E, \mathbb{F})$ tels que $\mathbb{F}|_{\{0\}} = \varphi E$.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue entre espaces paracompacts et si $\mathcal{C}$ est une catégorie topologique il est clair que la catégorie topologique des $\mathcal{C}$-fibrés localement triviaux sur l'espace "mapping-cylinder" de f est topologiquement équivalente à la catégorie mapping-cylinder du foncteur image inverse f^*. Ceci justifie la définition.

Revenons maintenant au cas général. On a deux foncteurs $r : M_\varphi \longrightarrow \mathcal{C}$ et $i : \mathcal{C} \longrightarrow M_\varphi$ définis par $i(E) = (\varphi\bar{E}, E)$ et $r(E, \mathbb{F}) = E$ ($\bar{E}$ désignant l'image inverse de E par l'application $[0,1] \longrightarrow$ Point). On a aussi un foncteur $\varphi_1 : M_\varphi \longrightarrow \mathcal{C}'$ défini par $\varphi_1(E, \mathbb{F}) = \mathbb{F}|_{\{1\}}$.

<u>Proposition 1.6.3</u> : Les foncteurs i et r sont des équivalences d'homotopie des catégories $\mathcal{C}$ et M_φ inver-

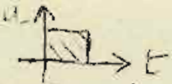
ses l'une de l'autre . De plus φ_1 est un S-foncteur et le diagramme :

(1)
$$\begin{tikzcd} & M_\varphi \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\ \mathcal{C} \arrow[rr, "\varphi"] & & \mathcal{C}' \end{tikzcd}$$

est commutatif à homotopie près .

Il est clair que le foncteur r.i est égal (donc homotope.) au foncteur identique de $\mathcal{C}$. Décrivons maintenant une homotopie ω_u du foncteur i.r avec le foncteur $Id_{\mathcal{C}'}$ par $\omega_u(E , \mathbb{F}) = (E , \mathbb{F}_u)$ où $\mathbb{F}_u$ est le fibré sur le segment $[0 , 1]$,paramétré par t , défini par $\mathbb{F}_{u,t} = \mathbb{F}_{t-u}$ pour $t \geqslant u$ et par $\mathbb{F}_{u,t} = \varphi \bar{E}$ pour $t \leqslant u$. D'autre part le diagramme (1) est commutatif à homotopie près car le foncteur $\varphi_u : M_\varphi \longrightarrow \mathcal{C}'$ défini par $\varphi_u(E , \mathbb{F}) = \mathbb{F}_{\{u\}}$, réalise une homotopie entre φ_1 et $\varphi_0 = \varphi .r$. Il reste à montrer que φ_1 est un S-foncteur . Pour cela quitte à changer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en $\mathcal{C}(K)$ et $\mathcal{C}'(K)$ où K est un polyèdre ,il suffit de montrer que si un automorphisme α de $\mathbb{F}_{\{1\}}$

se relève en un automorphisme (α' , β) de $(E , \mathbb{F}) \in Ob\, M_\varphi$,alors toute homotopie $\alpha(t)$ de α se relève en une homotopie $(\alpha'(t) , \beta(t))$ telle que $(\alpha'(o), \beta(o)) = (\alpha', \beta)$. Considérons pour cela une rétraction quelconque $c : [0 , 1] \times [0 , 1] \longrightarrow [0 , 1] \cup [0 , 1]$ du carré sur deux côtés consécutifs . Sans restreindre la généralité on peut d'autre part supposer que $\mathbb{F} = \pi^* F$ où F est un objet de $\mathcal{C}'$,et où $\pi : [0 , 1] \longrightarrow$ Point , et soit γ l'automorphisme de $p^* F$,où $p : [0,1] \cup [0,1] \to$ Point défini par $\alpha(t)$ sur la branche horizontale et par β



sur la branche verticale (ρ : $\mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ peut être en effet interprété comme une application de $[0,1]$ dans Aut F) . Alors l'automorphisme ρ' de $\Pi^* F$ (Π : $[0,1] \times [0,1] \longrightarrow$ Point) défini au-dessus de chaque point $(t,u) \in [0,1] \times [0,1]$ par $\gamma(c(t,u))$ est le prolongement cherché .C.Q.F.D.

1.6
10

Remarque générale sur le chapitre I

Dans ce chapitre ,nous nous sommes bornés , par souci de simplicité ,aux seuls fibrés topologiques . On peut en effet ,sur le même modèle ,définir la notion de fibré différentiable ,analytique ,algébrique réel où complexe comme suit : Soit $\mathcal{R}$ la catégorie des variétés différentiables (resp. analytiques ,resp. algébriques) ou celle des espaces topologiques . Une <u>$\mathcal{R}$-catégorie</u> est alors la donnée :

a) d'une catégorie $\mathcal{C}$

b) d'une structure d'objet de $\mathcal{R}$ sur l'ensemble Hom(M ,N) pour tout couple (M ,N) d'objets de $\mathcal{C}$ de telle sorte que l'application :

$$\mathrm{Hom}(M,N) \times \mathrm{Hom}(N,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,P) \quad ,$$

définie par la composition des morphismes , soit un morphisme de $\mathcal{R}$.

Si $\mathcal{C}$ est une $\mathcal{R}$-catégorie ,un $\mathcal{C}$-fibré trivial est la donnée d'un couple (X ,M) où $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{R}$ et $M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Comme au paragraphe 1.1 on remarque que les fibrés triviaux sont les objets d'une catégorie

37

fibrée et un $\mathcal{C}$-fibré localement trivial n'est autre qu'un objet de la catégorie complétée . Si $\mathcal{R}$ = (Top) on retrouve la notion de fibré localement trivial topologique .

CHAPITRE II

Catégories vectorielles topologiques et catégories de Banach

2.1 Catégories pseudo-abéliennes .

Définition 2.1.1 : Une catégorie additive $\mathcal{C}$ est dite pseudo-abélienne si tout projecteur de $\mathcal{C}$ (i.e. tout endomorphisme idempotent d'un objet de $\mathcal{C}$) admet un noyau .

Cette définition appelle aussitôt les remarques suivantes : Pour tout projecteur $p : M \longrightarrow M$ de $\mathcal{C}$ il existe une décomposition de p en le produit de deux morphismes :

$$M \xrightarrow{j_p} M_p \xrightarrow{i_p} M$$

telle que (M_p , i_p) (resp. (j_p , M_p)) soit un noyau (resp. un conoyau) du projecteur $1 - p$. D'autre part les applications $f_p : M \longrightarrow M_p + M_{1-p}$ et $g_p : M_p + M_{1-p} \longrightarrow M$ définies par $f_p(x) = (j_p(x) , j_{1-p}(x))$ et par $g_p(x,y) = i_p(x) + i_{1-p}(y)$ (avec l'abus de langage habituel) sont des isomorphismes, et $f_p = g_p^{-1}$.

On se propose maintenant de montrer que toute catégorie additive $\mathcal{C}$ peut être considérée comme une sous-catégorie pleine d'une catégorie pseudo-abélienne $\tilde{\mathcal{C}}$. On commence par construire la catégorie additive $\mathcal{C}'$ suivante :

- Les objets de $\mathcal{C}'$ sont les projecteurs de $\mathcal{C}$. On notera un tel objet $p : E \longrightarrow E$ ou simplement (E,p).

- Les morphismes de $\mathcal{C}'$ de source (E,p) et de but (E',p') sont les morphismes $f : E \longrightarrow E'$ de $\mathcal{C}$ tels que $p.f = f.p'$.

- La composition des morphismes de $\mathcal{C}'$ est induite par la composition des morphismes de $\mathcal{C}$ sous-jacents .

- La somme (et le produit) de deux objets (E,p) et (E',p') est l'objet $(E + E', p + p')$.

Deux morphismes $f,g : (E,p) \longrightarrow (E',p')$ sont dits équivalents si $p'.f = p'.g$ (ou ,ce qui revient au même ,$f.p = g.p$) .

On peut enfin définir la catégorie additive $\tilde{\mathcal{C}}$:

- Les objets de $\tilde{\mathcal{C}}$ sont les objets de $\mathcal{C}'$.

- Les morphismes de $\tilde{\mathcal{C}}$ sont les classes d'équivalence de morphismes de $\mathcal{C}'$.

- $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}((E,p) ,(E',p'))$ est muni de la structure de groupe quotient de celle de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}((E,p) ,(E',p'))$ (On vérifie que la loi de composition des morphismes de $\mathcal{C}'$ passe au quotient) . La somme des objets de $\tilde{\mathcal{C}}$ est donc induite par la somme des objets de $\mathcal{C}$.

En particulier le morphisme $f:(E,p) \longrightarrow (E',p')$ de $\mathcal{C}'$ induit un isomorphisme de $\tilde{\mathcal{C}}$ si et seulement si il existe un morphisme $g : (E,p) \longrightarrow (E',p')$ de $\mathcal{C}'$ tel que $g.f \sim \mathrm{Id}_{(E,p)}$ et $f.g \sim \mathrm{Id}_{(E',p')}$.

Considérons maintenant un projecteur f de (E,p) ,$(E,p) \in \mathrm{Ob}\,\tilde{\mathcal{C}}$. Alors on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
E + E \arrow[r, shift left, "{(f\ ,1-f)}"] \arrow[d, "pf + p(1-f)"'] & E \arrow[l, shift left, "{\binom{f}{1-f}}"] \arrow[d, "p"] \\
E + E \arrow[r, shift left, "{(f\ ,1-f)}"] & E \arrow[l, shift left, "{\binom{f}{1-f}}"]
\end{tikzcd}$$

Les morphismes $(f\ ,1-f)$ et $\binom{f}{1-f}$ induisent des isomor phismes de $\tilde{\mathcal{C}}$ inverses l'un de l'autre . Par suite $((E\ ,(1-p)f)\ ,1-f)$ est un noyau de f . La catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ est donc une catégorie pseudo-abélienne .

Soit F le foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\tilde{\mathcal{C}}$ qui ,à tout objet E de $\mathcal{C}$,associe le couple formé de cet objet et du projecteur identique et qui,à chaque morphisme f de $\mathcal{C}$ associe le morphisme $F(f)$ de $\tilde{\mathcal{C}}$ qui a f pour morphisme de $\mathcal{C}$ sous-jacent . Le foncteur F est injectif (sur les objets et les flèches) ce qui permet de considérer $\mathcal{C}$ comme une sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{C}}$; il est aussi pleinement fidèle . La catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$,munie du foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ est dite l'<u>enveloppe pseudo-abélienne</u> de la catégorie additive $\mathcal{C}$.

En fait ,le couple $(F\ ,\tilde{\mathcal{C}})$ est solution du problème universel que voici : Pour toute catégorie pseudo-abélienne $\mathcal{C}'$ et tout foncteur $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, il existe un foncteur $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et un seul, à isomorphisme près, qui rend le diagramme suivant commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[d, "F"'] & \\
\tilde{\mathcal{C}} \arrow[r, "\tilde{\varphi}"'] & \mathcal{C}'
\end{tikzcd}$$

<u>Exemple</u> : Soit $\mathcal{C}$ la catégorie additive des modules libres (à gauche) sur un anneau A . Alors la catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ est équivalente à la catégorie des modules projectifs sur A .

<u>Remarque</u> : Si $\mathcal{C}$ est une catégorie pseudo-abélienne ,il est clair que $\tilde{\mathcal{C}}$ est une catégorie équivalente à .

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive (non nécessairement pseudo-abélienne) . Soit M un objet de $\mathcal{C}$ et soit (M' ,i) ,i : $M' \longrightarrow M$,un sous objet de M . On dira que M' admet un <u>supplémentaire</u> dans M s'il existe (M" ,j) sous objet de M ,tel que l'application canonique de M' + M" dans M soit un isomorphisme . Dans le cas où $\mathcal{C}$ est pseudo-abélienne ,ceci équivaut à l'existence d'un morphisme p : $M \longrightarrow M'$ tel que $p.i = Id_{M'}$. De même , si (p ,M') ,p : $M \longrightarrow M'$,est un objet quotient de M ,on dira que M' admet un supplémentaire s'il existe un objet quotient (q ,M") ,q : $M \longrightarrow M"$,tel que l'application canonique de M dans M' x M" soit un isomorphisme . Si $\mathcal{C}$ est pseudo-abélienne ,ceci équivaut à l'existence d'un morphisme i : $M' \longrightarrow M$ tel que $p.i = Id_{M'}$.

Soit f : $M \longrightarrow N$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Le morphisme f est dit <u>direct</u> si :

a) Ker f et Coker f existent et admettent des supplémentaires (ce qui implique l'existence de Im f et de Coim f) .

b) Le morphisme canonique de Coim f dans Im f est un isomorphisme .

Le composé de deux morphismes directs n'est pas en général un morphisme direct . Cependant le composé de deux monomorphismes (resp. épimorphismes) directs est un monomorphisme (resp. épimorphisme) direct .

Une suite d'objets et de morphismes de $\mathcal{C}$:

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

est dite <u>exacte scindée</u> si :

a) f et g sont des morphismes directs .

b) $g.f = 0$ et le morphisme canonique de Im f dans Ker g qu'on en déduit est un isomorphisme .

A partir de là on définit la notion de suite exacte scindée à un nombre quelconque de termes .

<u>Lemme 2.1.1</u> : Considérons une suite :

(1) $$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

d'objets et de morphismes de $\mathcal{C}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) La suite (1) est exacte scindée .

b) (M ,f) est un noyau de g et il existe $g' : P \longrightarrow N$ tel que $g.g' = Id_P$

c) (g ,P) est un conoyau de f et il existe $f' : N \longrightarrow M$ tel que $f'.f = Id_M$

Démonstration immédiate .

2.2 Le groupe de Grothendieck d'une catégorie additive

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive . Considérons les couples (g ,G) où G est un groupe abélien et où $g : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow G$ est une application vérifiant l'identité $g(E + F) = g(E) + g(F)$. Parmi ces couples il en existe un (f ,$K(\mathcal{C})$) qui jouit de la propriété universelle suivante : Pour chaque couple (g ,G) il existe un homomorphisme de groupes $\tilde{g} : K(\mathcal{C}) \longrightarrow G$,et un seul , tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & K(\mathcal{C}) \arrow[d, "\tilde{g}"] \\ \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & G \end{tikzcd}$$

Le couple (f ,$K(\mathcal{C})$),qu'on désignera simplement par $K(\mathcal{C})$ par abus de langage ,est appelé le <u>groupe de Grothendieck</u> de la catégorie additive $\mathcal{C}$. En voici deux constructions explicites :

<u>1ère construction</u> : Soit $L(\mathcal{C})$ le groupe abélien libre engendré par les objets de $\mathcal{C}$. Alors $K(\mathcal{C})$ est le groupe quotient de $L(\mathcal{C})$ par le sous-groupe engendré par les relations (G) - (E) - (F) où G est un objet de isomorphe à E + F . L'application f associe évidemment à tout objet E de $\mathcal{C}$ la classe de (E) dans $K(\mathcal{C})$.

<u>2ème construction</u> : Considérons dans $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ la

relation d'équivalence :

$$(E,F)\sim(E',F') \Longleftrightarrow \exists G\ \exists G' \text{ avec } E+G \approx E'+G' \text{ et } F+G \approx F'+G'$$

Alors, le quotient de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ par cette relation d'équivalence, muni de la loi de composition induite par la somme des objets de $\mathcal{C}$, est un groupe abélien. C'est en fait le groupe de Grothendieck de $\mathcal{C}$, l'application $f : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow K(\mathcal{C})$ associant à chaque objet E de $\mathcal{C}$ la classe de $(E,0)$ dans $K(\mathcal{C})$.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories additives et soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur additif. Alors φ induit de manière évidente un homomorphisme $\varphi_* : K(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\mathcal{C}')$: C'est le seul qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}' \arrow[d, "f'"] \\
K(\mathcal{C}) \arrow[r, "\varphi_*"] & K(\mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

On voit alors que $K(\mathcal{C})$ peut être considéré comme un foncteur (covariant) de $\mathcal{C}$.

<u>Exemple</u> : Soit A un anneau et soit $\mathcal{P}(A)$ la catégorie additive des modules projectifs de type fini sur A. Par abus de langage on désigne par $K(A)$ le groupe de Grothendieck de $\mathcal{P}(A)$. Ce groupe a été étudié par Bass.[ ]

Supposons maintenant que A soit une algèbre de Banach et soit X un espace compact. Alors on désigne par $K(X;A)$ le groupe $K(A(X))$ où $A(X)$ est l'anneau des fonctions continues sur X à valeurs dans A. Si X=Point on retrouve $K(A)$. Si A = R, C ou H, le groupe $K(X;A)$

(qu'on écrit simplement K(X) dans la littérature) a été étudié par Atiyah et Hirzebruch [ ] . Si A = C , il est lié de manière étroite à la cohomologie (de Čech) de X . De manière précise il existe un homomorphisme naturel ch : $K(X) \longrightarrow H^{pair}(X ; Q)$ qui induit ,en tensorisant par Q ,un isomorphisme de $K(X) \otimes Q$ sur $H^{pair}(X ; Q)$. Ce résultat ,dû à Atiyah et Hirzebruch , sera démontré dans le courant de ce travail .

Comme le montre l'exemple précédent ,ainsi que d'autres que nous verrons dans ce chapitre et les suivants ,la considération du groupe de Grothendieck d'une catégorie additive n'est intéressante, du moins en topologie algébrique , que si est en même temps une catégorie topologique. . Dans les paragraphes suivants nous exploiterons cette idée systématiquement .

<u>Définition 2.2.1</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque et soit $\mathcal{C}'$ une catégorie additive . Deux foncteurs $\varphi, \psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ sont dits <u>stablement isomorphes</u> s'il existe un foncteur $\theta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ tel que $\varphi + \theta$ et $\psi + \theta$ soient deux foncteurs isomorphes .

On peut exprimer cette définition d'une autre façon : La catégorie $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ est une catégorie additive et φ, ψ ,objets de cette catégorie sont stablement isomorphes si et seulement si leurs images dans $K(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{C}'))$ sont égales .

Le lecteur remarquera que deux foncteurs stablement isomorphes ne sont pas isomorphes en général. Pour le voir on peut prendre pour $\mathscr{C}$ la catégorie "ponctuelle", réduite à un seul objet et une flèche, par exemple ...

Supposons la catégorie $\mathscr{C}$ additive et intéressons nous aux foncteurs additifs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$. Ces foncteurs forment une sous-catégorie additive de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{C},\mathscr{C}')$ que nous noterons $\underline{\mathrm{Hom}}_a(\mathscr{C},\mathscr{C}')$.

<u>Définition 2.2.2</u> : Avec les notations précédentes, deux foncteurs <u>additifs</u> $\varphi, \psi : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ sont dits <u>stablement isomorphes</u> si s'ils ont même classe dans $K(\underline{\mathrm{Hom}}_a(\mathscr{C},\mathscr{C}'))$.

En général, là aussi, deux foncteurs stablement isomorphes ne sont pas isomorphes. On peut construire un contre-exemple en considérant la catégorie "libre" engendrée par la catégorie ponctuelle, i.e. la catégorie additive formée des Z-modules Z^n.

<u>Proposition 2.2.1</u> : Si $\varphi, \psi : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ sont deux foncteurs additifs stablement isomorphes, les homomorphismes induits $\varphi_*, \psi_* : K(\mathscr{C}) \longrightarrow K(\mathscr{C}')$ sont égaux.

Démonstration immédiate.

La proposition précédente nous permet donc de considérer le groupe de Grothendieck comme un foncteur additif de la catégorie (S-Cat-Add) dans la catégorie des groupes abéliens, (S-Cat-Add) désignant la catégorie additive dont les objets sont les catégories additives et dont le groupe des morphismes de source $\mathscr{C}$

et de but $\mathcal{C}'$ est le groupe $K(\mathrm{Hom}_a(\mathcal{C},\mathcal{C}'))$.

Avec les notations précédentes ,un élément de $K(\mathrm{Hom}_a(\mathcal{C},\mathcal{C}'))$ sera dit un foncteur virtuel .

Définition 2.2.3 : Deux catégories additives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dites stablement équivalentes s'il existe deux foncteurs virtuels $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, $\psi : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$,tels que $\psi . \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ et $\varphi . \psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}'}$.

Il est clair que le groupe de Grothendieck d'une catégorie additive $\mathcal{C}$ est un invariant du type d'équivalence stable de $\mathcal{C}$. Cependant il ne suffit pas à le caractériser .

Supposons maintenant que la catégorie $\mathcal{C}$ soit pseudo-abélienne . Nous allons alors donner une formule explicite exprimant $K(\mathcal{C})$ comme une limite inductive de groupes K d'anneaux convenables .

Pour cela considérons la catégorie $\mathcal{C}^i$ dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les monomorphismes directs de $\mathcal{C}$. Si $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, désignons par $\mathcal{P}(E)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets de $\mathcal{C}$ isomorphes à un facteur direct de E^n ,$n \in N$. Comme $\mathcal{C}$ est pseudo-abélienne ,la catégorie $\mathcal{P}(E)$ est équivalente à la catégorie des A-modules projectifs de type fini avec $A = \mathrm{End}\ E$. Le groupe $K(\mathcal{P}(E))$, que nous noterons simplement $K(E)$, est donc simplement isomorphe au groupe K de l'anneau A .

Soit $i : E \longrightarrow F$ un mononorphisme direct de $\mathcal{C}$ Si un objet G de $\mathcal{C}$ est isomorphe à un facteur direct

Remarque 2 : On peut définir le groupe de Grothendieck de catégories plus générales que les catégories additives . Il en est ainsi par exemple de catégories avec produits finis . Le groupe de Grothendieck de $\mathcal{C}$ est alors le groupe symétrisé du monoïde abélien (pour le produit des objets) de l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{C}$. Exemple de telle catégorie : La catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie sur R et dont les morphismes sont les applications homotopes à une application linéaire (les classes d'homotopie étant prises parmi les applications compactes) . Cette catégorie est évidemment une catégorie topologique $\mathcal{C}$ et la catégorie $\mathcal{C}(X)$,X espace topologique quelconque ,est aussi une catégorie avec produit . Son groupe de Grothendieck n'est autre que le groupe J(X) .

2.3 Définition des catégories vectorielles topologiques et des catégories de Banach .

Définition 2.3.1 : Une catégorie vectorielle topologique sur k est la donnée :

a) d'une catégorie avec objet nul

b) pour tout couple (M ,N) d'objets de ,
d'une structure de k-espace vectoriel topologique sur l'ensemble Hom(M ,N) .

Cette donnée est astreinte aux conditions suivantes :

a) Quels que soient les objets M ,N et P de $\mathcal{C}$ l'application

$$\mathrm{Hom}(M\ ,N) \times \mathrm{Hom}(N\ ,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M\ ,P)$$

définie par la composition des morphismes de $\mathcal{C}$,est continue et bilinéaire .

b) La somme (donc le produit) de deux objets existe .

D'après cette définition ,une catégorie vectorielle topologique peut tout à la fois être considérée comme une catégorie topologique et une catégorie additive. Remarquons aussi que ,pour tout triple (M ,N ,P) d'objets de $\mathcal{C}$,les applications évidentes :

$$\mathrm{Hom}(M\ ,N) \times \mathrm{Hom}(P\ ,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M + P\ ,N)$$

$$\mathrm{Hom}(M\ ,N) \times \mathrm{Hom}(M\ ,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M\ ,N \times P)$$

sont des homéomorphismes .

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories vectorielles topologiques . Un foncteur $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est dit linéaire continu si l'application

$$\mathrm{Hom}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varphi(M), \varphi(N))$$

définie par $u \rightsquigarrow \varphi(u)$,est une application linéaire continue ,quels que soient les objets M et N de $\mathcal{C}$.

Les catégories vectorielles topologiques (sur k) et les foncteurs linéaires continus définissent une catégorie que nous désignerons par (CVT) .

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie topologique et si X est un espace paracompact ,nous avons défini dans le chapitre précédent une topologie sur la catégorie $\mathcal{C}(X)$. En fait si $\mathcal{C}$ est une catégorie vectorielle topologique, la même technique peut être utiliséepour définir une structure de catégorie vectorielle topologique sur $\mathcal{C}(X)$.

Définition 2.3.2 : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie vectorielle topologique sur k . Alors $\mathcal{C}$ est dite une catégorie de Banach sur k si :

a) Pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(M, N)$ est un espace banachisable .

b) $\mathcal{C}$ est une catégorie pseudo-abélienne .

Une catégorie vectorielle topologique sera dite prébanachique si elle satisfait seulement à a) . D'après le §2.1 toute catégorie prébanachique peut être considérée comme une sous catégorie pleine d'une catégorie de Banach ,à savoir l'enveloppe pseudo-abélienne de $\mathcal{C}$ (munie d'une structure de catégorie de Banach que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter) .

Si X est une espace compact et si $\mathcal{C}$ est une catégorie prébanachique ,il est clair que $\mathcal{C}(X)$ est une catégorie prébanachique (car ,si M est un espace de Banach ,la topologie de la norme et celle de la convergence compacte coïncident sur $F(X, M)$) . La proposition suivante est moins évidente :

<u>Proposition 2.3.1</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach et soit X un espace compact . Alors la catégorie $\mathcal{C}(X)$ est une catégorie de Banach .

D'après ce qui précède il suffit de montrer que $\mathcal{C}(X)$ est une catégorie pseudo-abélienne . En fait on a un résultat plus général :

<u>Proposition 2.3.2</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach et soit X un espace topologique quelconque . Alors la catégorie additive $\mathcal{C}(X)$ est pseudo-abélienne .

Soit $\xi^{\mathcal{C}} = (X, E, U_i, M_i, \varphi_i)$ un $\mathcal{C}$-fibré localement trivial et soit $p : \xi^{\mathcal{C}} \longrightarrow \xi$ un projecteur de $\mathcal{C}(X)$. En un point x de X ,p induit un projecteur $p_x : E_x \longrightarrow E_x$. Si $x \in U_i$,il induit un projecteur $q_{ix} = \varphi_{ix}^{-1} p_x \varphi_{ix} : M_i \longrightarrow M_i$ et l'application $x \rightsquigarrow q_{ix}$ est une application continue de U_i dans $\mathrm{Hom}(M_i, M_i)$. Fixons un point $x_0 \in U_i$ et posons $M'_{ix_0} = \mathrm{Im}\, q_{ix_0}$, $M''_{ix_0} = \mathrm{Ker}\, q_{ix_0}$. Alors $M_i = M'_{ix_0} + M''_{ix_0}$ et q_{ix} est représenté dans cette décomposition de M_i en somme directe par la matrice :

$$h_{ix_0}(x) = \begin{pmatrix} a(x) & \varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_2(x) & \varepsilon_3(x) \end{pmatrix}$$

où $a(x_0) = I$,$\varepsilon_1(x_0) = \varepsilon_2(x_0) = \varepsilon_3(x_0) = 0$.

La matrice :

$$\Psi_{ix_o}(x) = \begin{pmatrix} a(x) & 1 - \varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_2(x) & 1 - \varepsilon_3(x) \end{pmatrix}$$

représente un endomorphisme de M_i qui est inversible dans un voisinage V_{ix_o} de x_o contenu dans U_i ,car $Hom(M_i\ ,M_i)$ est une algèbre de Banach ,et on a :

$$h_{ix_o}(x)\,\Psi_{ix_o}(x) = \Psi_{ix_o}(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci démontre que $p|_{V_{ix_o}}$ admet un noyau isomorphe à $(V_{ix_o}\ , M''_{ix_o})$. D'une manière plus précise ,soit $\mathcal{C}$ une catégorie vectorielle topologique et soit X un espace topologique . Soit $f : \xi \longrightarrow \eta$ un morphisme de $\mathcal{C}$-fibrés au-dessus de X . Alors on dira que f admet localement un noyau (resp. un noyau scindé) si ,quel que soit le point x de X ,il existe un voisinage U de x tel que $f|_U$ admette un noyau (resp. un noyau admettant un supplémentaire dans $\xi|_U$) . Il est clair ,d'après les calculs précédents , que $p : \xi \longrightarrow \xi$ admet localement un noyau scindé . La proposition 2.3.2 sera alors conséquence de la proposition suivante :

<u>Proposition 2.3.3</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie vectorielle topologique et soient ξ et η deux $\mathcal{C}$-fibrés localement triviaux de base X . Soit $f : \xi \longrightarrow \eta$ un mor-

phisme de $\mathcal{C}$-fibrés admettant localement un noyau scindé . Alors le morphisme f admet un noyau . De plus ce noyau est scindé si X est paracompact .

Soit $[U_i]$ un recouvrement ouvert de X tel que $f|_{U_i}$ admette un noyau scindé (ζ_i, α_i) . Comme le foncteur $\mathcal{C}(U_i) \longrightarrow \mathcal{C}(U_i \cap U_j)$ est additif ,il conserve les noyaus scindés . Par conséquent ,au-dessus de $U_i \cap U_j$,il existe un isomorphisme unique

$$g_{ji} : \zeta_i | U_i \cap U_j \longrightarrow \zeta_j | U_i \cap U_j$$

qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\zeta_i|U_i \cap U_j \arrow[d, "g_{ji}"] \arrow[dr, "\alpha_i|U_i\cap U_j"] & & \\
 & \xi|U_i \cap U_j \arrow[r] & \eta|U_i \cap U_j \\
\zeta_j|U_i \cap U_j \arrow[ur, "\alpha_j|U_i\cap U_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Alors le fibré ζ obtenu par recollement des fibrés ζ_i par les isomorphismes de transition g_{ji} est évidemment le noyau de f . Soit α le monomorphisme canonique de ζ dans ξ et soit $\beta_i : \xi|_{U_i} \longrightarrow \zeta_i$ des morphismes tels que ,quel que soit i , $\beta_i . \alpha_{U_i} = \mathrm{Id}$. Supposons maintenant X paracompact et soit $[f_i]$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $[U_i]$. Alors si on pose $\beta = \sum f_i \beta_i$,on a $\beta . \alpha = \mathrm{Id}$, et β admet un noyau qui est un supplémentaire de Ker f dans ξ (on raisonne localement) .

C.Q.F.D.

<u>Exercice</u> : Soit R_X le faisceau des fonctions continues à sur X à valeurs réelles . Vérifier que l'hypothèse X paracompact peut être remplacée par l'hypothèse plus faible :

(S) : Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ en R_X-modules , $H^1(X ;\mathcal{F})=0$.

Les notions vues au chapitre I s'insèrent naturellement dans le cadre des catégories vectorielles topologiques . Ainsi ,par exemple ,deux foncteurs linéaires continus $\varphi_0 ,\varphi_1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ sont dits homotopes s'il existe un foncteur <u>linéaire continu</u> $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'(0 ,1)$ tel que $p_0 . \varphi = \varphi_0$ et $p_1 . \varphi = \varphi_1$. On définit aussi la notion d'équivalence ,d'homotopie de catégories vectorielles topologiques ,etc ...

D'autre part une catégorie vectorielle topologique peut aussi être vue comme une simple catégorie additive. On peut donc lui appliquer les sorites du paragraphe précédents. Il importe maintenant de faire le lien entre les deux points de vue.

<u>Proposition 2.3.3</u> : Soient $\varphi_0, \varphi_1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ deux foncteurs linéaires continus homotopes. Alors les homomorphismes induits $\varphi_{0*}, \varphi_{1*} : K(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\mathcal{C}')$ sont égaux.

En effet soit E un objet de $\mathcal{C}$. Alors d'après la définition de l'homotopie des foncteurs, les objets $\varphi_0 E$ et $\varphi_1 E$ sont homotopes donc isomorphes. C.Q.F.D.

<u>Définition 2.3.3</u> : Soit R la relation d'équivalence dans (CVT) engendrée par l'homotopie et l'équivalence stable. Alors on dit que les catégories vectorielles topologiques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont le même type d'homotopie stable si $\mathcal{C} \, R \, \mathcal{C}'$.

D'après cette définition, le groupe de Grothendieck d'une catégorie vectorielle topologique $\mathcal{C}$ apparait comme un invariant du type d'homotopie stable de $\mathcal{C}$.

<u>Remarque</u> : Jusqu'ici la structure "vectorielle" des catégories n'a pas servi de manière essentielle.

2.4. Le groupe K d'un foncteur virtuel linéaire continu .

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories vectorielles topologiques et soit $\underline{\mathrm{Hom}}_{lc}(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ la sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Hom}}_{a}(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ formée des foncteurs linéaires continus . Un foncteur virtuel linéaire continu est par définition un élément de $K(\underline{\mathrm{Hom}}_{lc}(\mathcal{C},\mathcal{C}'))$. Il s'exprime comme une "différence" de deux foncteurs linéaires continus . Dans ce paragraphe on se propose d'attacher à un tel foncteur virtuel $\varphi - \psi$, $\varphi,\psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, un groupe abélien $K(\varphi - \psi)$ qui coïncide avec $K(\mathcal{C})$ si $\mathcal{C}'$ est la catégorie ponctuelle et dont on étudiera quelques propriétés élémentaires .

Avec les notations ci-dessus considérons la catégorie $\Gamma(\varphi - \psi)$ suivante :

- Les objets de $\Gamma(\varphi - \psi)$ sont les quadruples $(E,F;T;\alpha)$ où $E,F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,$T \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ et où α est un $\mathcal{C}'$-isomorphisme de $\varphi(E) + \psi(F) + T$ sur $\varphi(F) + \psi(E) + T$.

- Les morphismes de $\Gamma(\varphi - \psi)$ de source $(E,F;T;\alpha)$ et de but $(E',F';T';\alpha')$ sont les triples $(e,f;t)$, où $e : E \longrightarrow E'$ et $f : F \longrightarrow F'$ sont des $\mathcal{C}$-morphismes et où $t : T \longrightarrow T'$ est un $\mathcal{C}'$-morphismes , tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\varphi(E)+\psi(F)+T \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi(e)+\psi(f)+t"] & \varphi(F)+\psi(E)+T \arrow[d, "\varphi(f)+\psi(e)+t"] \\
\varphi(E')+\psi(F')+T' \arrow[r, "\alpha'"] & \varphi(F')+\psi(E')+T'
\end{tikzcd}$$

L'ensemble de ces morphismes peut donc être muni de la structure d'espace vectoriel topologique induite par celle de Hom(E,E') x Hom(F,F') x Hom(T,T'). En fait on vérifie sans peine que $\Gamma(\varphi - \psi)$ est une catégorie vectorielle topologique . Ainsi la somme de deux objets $(E,F;T;\alpha)$ et $(E',F';T';\alpha')$ est l'objet $(E + E', F + F'; T + T'; \alpha \,{}'\!\!+' \alpha')$ où $\alpha \,{}'\!\!+' \alpha'$:

$$(\varphi E+\varphi E')+(\psi F+\psi F')+(T+T') \longrightarrow (\varphi F+\varphi F')+(\psi E+\psi E')+(T+T')$$

)

est déduit de $\alpha + \alpha'$:

$$(\varphi E+\psi F+T)+(\varphi E'+\psi F'+T') \longrightarrow (\varphi F+\psi E+T)+(\varphi F'+\psi E'+T')$$

par la permutation

$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ dans les sommes directes de 6 termes envisagées . On a donc $\alpha \,{}'\!\!+' \alpha' = \xi(\alpha + \alpha')\xi$.

Un objet de $\Gamma(\varphi - \psi)$ est dit <u>élémentaire</u> s'il est de la forme (E,E;T;Id) . Deux objets σ_0 et σ_1 de $\Gamma(\varphi - \psi)$ sont dits <u>homotopes</u> s'il existe un objet σ de $\Gamma(\varphi([0,1]) - \psi([0,1]))$ dont les restrictions à $\Gamma(\varphi(0) - \psi(0)) \approx \Gamma(\varphi - \psi)$ et à $\Gamma(\varphi(1) - \psi(1)) \approx \Gamma(\varphi - \psi)$ soient respectivement σ_0 et σ_1 . On définit alors l'ensemble $K(\varphi - \psi)$ comme l'ensemble quotient de $Ob\Gamma(\varphi - \psi)$ par la relation d'équivalence :

$\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow \exists \tau$ et τ' élémentaires tels que $\sigma + \tau$ soit homotope à $\sigma' + \tau'$. Muni de la loi de composition induite par la somme des objets de $\Gamma(\varphi - \psi)$, $K(\varphi - \psi)$ est un monoïde commutatif . En fait c'est un groupe abélien d'après la proposition suivante :

<u>Proposition 2.4.1</u> : Notons par $d(E,F;T;\alpha)$ l'image d'un objet quelconque $(E,F;T;\alpha)$ dans $K(\varphi-\psi)$. On a alors la formule :

$$d(E,F;T;\alpha) + d(F,G;T;\alpha^{-1}) = 0$$

Par définition de l'addition des objets on a : $d(E,F;T;\alpha) + d(F,E;T;\alpha^{-1}) = d(E+F,F+E;\beta)$ avec $\beta = \varepsilon(\alpha+\alpha^{-1})\varepsilon$. Mais $\alpha+\alpha^{-1}$ est homotope parmi les $\mathcal{C}'$-isomorphismes de :

$(\varphi E+\psi F+T)+(\varphi F+\psi E+T)$ sur $(\varphi F+\psi E+T)+(\varphi E+\psi F+T)$

à l'isomorphisme représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

On peut joindre en effet ces deux isomorphismes par le chemin $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ $\quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

En composant à gauche et à droite par ε, on obtient un $\mathcal{C}'$-isomorphisme de $\varphi E+\varphi F+\psi F+\psi E+T+T$ sur $\varphi F+\varphi E+\psi E+\psi F+T+T$ défini par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ homotope à } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \beta'$$

(on considère le chemin $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ du bloc encadré)

Soit alors u l'isomorphisme de $F + E$ sur $E + F$ défini par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$d(E+F,F+E;T+T;\beta') = d(E+F,E+F;T+T;(\varphi(u)+\psi(u^{-1})+Id_{T+T})\cdot\beta')$$
$$= d(E+F,E+F;T+T;Id) = 0$$

C.Q.F.D.

Pour justifier la notation $K(\varphi - \psi)$ il nous faut montrer que ce groupe, qui à priori dépend du couple (φ, ψ), dépend à isomorphisme près, seulement de la différence $\varphi - \psi$ dans $K(\underline{\mathrm{Hom}}_{1c}(\mathscr{C}, \mathscr{C}'))$. Pour cela il suffit de montrer que pour tout triple (φ, ψ, θ) de foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$, les groupes $K(\varphi - \psi)$ et $K((\varphi+\theta)-(\psi+\theta))$ sont isomorphes.

Soit $u : K(\varphi - \psi) \longrightarrow K((\varphi+\theta)-(\psi+\theta))$ et $v : K((\varphi+\theta)-(\psi+\theta)) \longrightarrow K(\varphi - \psi)$ les homomorphismes suivants :

$$u(d(E,F;T;\alpha)) = d(E,F;T;\alpha') \quad \text{où}$$

$\alpha : \varphi E + \psi F + T \longrightarrow \varphi F + \psi E + T$ et où $\alpha' : \varphi E + \theta E + \psi F + \theta F + T \longrightarrow \varphi F + \theta F + \psi E + \theta E + T$ est égal à $\varepsilon'^{-1}(\alpha + \mathrm{Id}_{\theta E} + \mathrm{Id}_{\theta F})\varepsilon$ avec ε égal à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ et ε' égal à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ des sommes directes de cinq termes envisagées.

$$v(d(E,F;T;\beta)) = d(E,F;T+\theta E+\theta F;\beta') \quad \text{où}$$

$\beta : \varphi E + \theta E + \psi F + \theta F + T \longrightarrow \varphi F + \theta F + \psi E + \theta E + T$ et où

$\beta' : \varphi E + \psi F + \theta E + \theta F + T \longrightarrow \varphi F + \psi E + \theta E + \theta F + T$ est égal à $\eta'^{-1}\beta\eta$ avec $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $\eta' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Alors $(v \circ u)(d(E,F;T;\alpha)) = v(d(E,F;T;\alpha'))$
$= d(E,F;T+\theta E+\theta F;\eta'^{-1}\alpha'\eta) = d(E,F;T+\theta E+\theta F;\alpha + \mathrm{Id}_{\theta E} + \mathrm{Id}_{\theta F})$
$= d(E,F;T;\alpha)$.

D'autre part $(u \circ v)(d(E,F;T;\beta))$
$= u(d(E,F;T+\theta E+\theta F;\eta'^{-1}\beta\eta)) = d(E,F;T+\theta E+\theta F;\gamma)$ où

$\gamma : \varphi E + \theta E + \psi F + \theta F + T + \theta E + \theta F \longrightarrow \varphi F + \theta F + \psi E + \theta E + T + \theta E + \theta F$ est égal à $\chi'^{-1}(\beta + \mathrm{Id}_{\theta E} + \mathrm{Id}_{\theta F})\chi$ avec :

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \chi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 3 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit maintenant :

$$\chi_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & -\sin\theta \end{pmatrix} \quad \chi'_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Alors $\chi_0 = \chi$, $\chi'_0 = \chi'$ et :

$$\chi_1'^{-1}(\beta + Id_{\theta E} + Id_{\theta F})\chi_1 = \beta + Id_{\theta E} + Id_{\theta F} \quad .$$

Donc $d(E,F;T+\theta E+\theta F;\gamma) = d(E,F;T;\beta)$ et ,par suite , u et v sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

C.Q.F.D.

Pour conclure ,il nous reste à étudier comment $K(\varphi - \psi)$ dépend "fonctoriellement" de $\varphi - \psi$.

Considérons un diagramme carré de catégories vectorielles topologiques et de foncteurs virtuels :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\varphi_2 - \psi_2"] \arrow[d, "\varphi_1 - \varphi_1'"'] & \mathcal{C}_2 \arrow[d, "\psi_2 - \psi_2'"] \\ \mathcal{C}_1 \arrow[r, "\psi_1 - \psi_1'"] & \mathcal{C}_{12} \end{tikzcd}$$

tels que :

$$\psi_1\varphi_1 + \psi_1'\varphi_1' \approx \psi_2\varphi_2 + \psi_2'\varphi_2'$$

$$\psi_1\varphi_1' + \psi_1'\varphi_1 \approx \psi_2\varphi_2' + \psi_2'\varphi_2$$

Soit h l'homomorphisme de $K(\varphi_1 - \varphi_1')$ dans $K(\psi_2 - \psi_2')$ défini comme suit :

$h(d(E,F;T;\alpha)) = d(\varphi_2E+\varphi_2'F\ ,\varphi_2F+\varphi_2'E\ ;\psi_1T+\psi_1'T\ ;\beta\ )$

Explicitons β . On a :

$$\psi_1\alpha : \psi_1\varphi_1E + \psi_1'\varphi_1'F + \psi_1T \longrightarrow \psi_1\varphi_1F + \psi_1\varphi_1'E + \psi_1T$$

$$\psi_1'\alpha^{-1} : \psi_1'\varphi_1F + \psi_1'\varphi_1E + \psi_1'T \longrightarrow \psi_1'\varphi_1E + \psi_1'\varphi_1'F + \psi_1'T$$

Par un procédé éprouvé $\psi_1\alpha + \psi_1'\alpha'^{-1}$ peut être considéré comme un isomorphisme de :

$(\psi_1\varphi_1+\psi_1'\varphi_1')E+(\psi_1\varphi_1'+\psi_1'\varphi_1)F+\psi_1T+\psi_1'T$ sur

$(\psi_1\varphi_1'+\psi_1'\varphi_1)E+(\psi_1\varphi_1+\psi_1'\varphi_1')F+\psi_1T+\psi_1'T$

En utilisant les isomorphismes fonctoriels donnés on obtient un isomorphisme de

$(\psi_2\varphi_2+\psi_2'\varphi_2')E+(\psi_2\varphi_2'+\psi_2'\varphi_2)F+\psi_1T+\psi_1'T$ sur

$(\psi_2\varphi_2'+\psi_2'\varphi_2)E+(\psi_2\varphi_2+\psi_2'\varphi_2')F+\psi_1T+\psi_1'T$

d'où l'isomorphisme β de :

$\psi_2\varphi_2E+\psi_2\varphi_2'F+\psi_2'\varphi_2F+\psi_2'\varphi_2'E+\psi_1T+\psi_1'T$ sur

$\psi_2'\varphi_2E+\psi_2'\varphi_2'F+\psi_2\varphi_2F+\psi_2\varphi_2'E+\psi_1T+\psi_1'T$.

<u>Remarque générale sur le paragraphe 2.4</u>

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories de Banach et si $\varphi-\psi$ est un foncteur virtuel de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, nous donnerons au § 2.6 une définition plus simple,mais moins "géométrique", du groupe $K(\varphi-\psi)$.

2.5 S-foncteurs et T-foncteurs linéaires continus

Il est possible de simplifier notablement la définition de $K(\varphi - \psi)$ pour certains foncteurs φ et ψ particuliers. C'est ce à quoi nous allons nous employer dans ce chapitre.

Définition 2.5.1 : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories additives et soit φ un foncteur additif de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Le foncteur φ est dit un T-foncteur si $\forall M' \in Ob\,\mathcal{C}'\ \exists M'_1 \in Ob\,\mathcal{C}'$ $\exists M \in Ob\,\mathcal{C}$ tels que $\varphi(M)$ soit isomorphe à $M' + M'_1$.

Exemple 1 : Soient deux anneaux A et A', $\mathcal{C} = \mathcal{P}(A)$, $\mathcal{C}' = \mathcal{P}(A')$ et soit φ le foncteur "extension des scalaires" associé à un homomorphisme de A dans A'. Alors φ est un T-foncteur.

En effet si M' est un A'-module projectif de type fini, il existe un A'-module N' projectif de type fini tel que M' + N' soit isomorphe à un A'-module libre A'^n. Alors $M' + N' \approx \varphi(A^n)$. C.Q.F.D.

Exemple 2 : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie vectorielle topologique. Soit X un espace compact et soit Y un sous-espace fermé. Alors le foncteur restriction associé à l'inclusion $Y \subset X$:

$$\mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$$

est un T-foncteur.

Soit E un $\mathcal{C}$-fibré localement trivial sur Y. Nous allons montrer qu'il existe un $\mathcal{C}$-fibré E' sur Y tel que E + E' soit trivial ; l'assertion en résultera. Soit $\{U_i\}$, $i = 1, \dots, n$, un recouvrement ouvert de Y tel que E_{U_i} soit trivial et soit $\varphi_i : (U_i, M_i) \longrightarrow E_{U_i}$

une trivialisation . Alors, quitte à décomposer X en sous-ensembles ouverts et fermés on peut supposer que $M_i = M$ quelque soit i . Désignons par q_i la projection de M^n sur son $i^{ème}$ facteur et par $\tilde{\varphi}_i$ le morphisme de (U_i, M^n) dans E_{U_i} défini par $\tilde{\varphi}_{iy} = \varphi_{iy} \cdot q_i$, $y \in Y$. On a alors un morphisme $\varphi : (X, M^n) \longrightarrow E$ défini par $\varphi_y = \sum \alpha_i(y) \tilde{\varphi}_{iy}$ où α_i est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$. Soit maintenant $\{V_i\}$, $\bar{V}_i \subset U_i$, un recouvrement ouvert de X tel que $\alpha_i(y) \neq 0$ $\forall y \in \bar{V}_i$ et soit $\psi_i : E_{V_i} \longrightarrow (V_i, M^n)$ le morphisme défini par $\psi_{iy} = (0, \dots, \alpha_i^{-1} \cdot \varphi_i^{-1}, 0, \dots, 0)$. Alors $\varphi \cdot \psi_i = Id_{E_{V_i}}$; Soit maintenant β_i une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{V_i\}$ et posons $\psi = \sum \beta_i \psi_i$. On a $\psi \cdot \varphi = Id_E$. D'autre part le morphisme φ admet un noyau car, pour chaque indice i, le morphisme $\varphi|_{U_i}$ admet un noyau isomorphe à (U_i, M^{n-1}) (Lemme 2.3.1) . On a donc une suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow T \xrightarrow{\varphi} E \longrightarrow 0$$

où T est le fibré trivial (Y, M^n) .

C.Q.F.D.

<u>Proposition 2.5.1</u> : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories vectorielles topologiques et soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un T-foncteur linéaire continu . Alors, si X est un espace compact, le foncteur $\varphi(X) : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}'(X)$ est aussi un T-foncteur .

D'après les considérations précédentes, si E est un objet de $\mathcal{C}'(X)$,il existe un objet E' de $\mathcal{C}'(X)$ tel que E + E' soit isomorphe à un fibré trivial (X ,M') , $M' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$. Comme φ est un T-foncteur il existe un objet M de $\mathcal{C}$ et un objet M" de $\mathcal{C}'$ tel que $M' + M'' \simeq \varphi(M)$. Donc $E + E' + (X,M'') \simeq (X,M'+M'') \simeq (X,\varphi(M)) \simeq \varphi(X,M)$.

C.Q.F.D.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories vectorielles topologiques et soient $\varphi,\psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ deux foncteurs linéaires continus . Considérons la sous-catégorie pleine $\Gamma'(\varphi-\psi)$ de $\Gamma(\varphi-\psi)$ formée des objets $(E,F;T;\alpha)$ avec T = 0 . Un objet de $\Gamma'(\varphi-\psi)$ est dit élémentaire si c'est un objet élémentaire de $\Gamma(\varphi-\psi)$ De même deux objets de $\Gamma'(\varphi-\psi)$ sont dits homotopes s'ils sont homotopes comme objets de $\Gamma(\varphi-\psi)$. Notons $K'(\varphi-\psi)$ l'ensemble quotient de $\mathrm{Ob}\,\Gamma'(\varphi-\psi)$ par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition d'objets élémentaires . Muni de la loi de composition induite par la somme des objets de $\Gamma(\varphi-\psi)$, $K'(\varphi-\psi)$ est un monoïde commutatif .

<u>Proposition 2.5.2</u> : Le monoïde $K'(\varphi-\psi)$ est un groupe abélien . Si $\varphi+\psi$ est un T-foncteur ,l'homomorphisme i de $K'(\varphi-\psi)$ dans $K(\varphi-\psi)$ induit par l'inclusion $\mathrm{Ob}\,\Gamma'(\varphi-\psi)$ $\mathrm{Ob}\,\Gamma(\varphi-\psi)$ est un isomorphisme .

Le fait que $K'(\varphi-\psi)$ est un groupe abélien se démontre à l'aide dd'une proposition analogue à la proposition 2.4.1 (on fait T=0 dans l'énoncé et la démonstration) . Supposons maintenant que $\varphi+\psi$ soit

un T-foncteur . On va définir un homomorphisme
$j : K(\varphi - \psi) \longrightarrow K'(\varphi - \psi)$ inverse de i . s Soit
$d(E,F;T;\alpha) \in K(\varphi - \psi)$; choisissons un objet T' de $\mathcal{C}'$ et
un objet G de $\mathcal{C}$ tel que $\varphi G + \psi G \simeq T + T'$. Alors
$d(E,F;T;\alpha) = d(E,F;T+T';\alpha + Id_{T'})$ où :
$\alpha + Id_{T'} : (\varphi E+\psi F+T)+T' \longrightarrow (\varphi F+\psi E+T)+T'$

soit $\alpha_1 : \varphi E+\psi F + \varphi G+\psi G \longrightarrow \varphi F+\psi E+\varphi G+\psi G$

Posons $\lambda = \eta^{-1}\alpha_1$ avec $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Alors ,par

$\overset{\lambda}{E}' = E + G$
$F' = F + G$

définition , $j(d(E,F;T;\alpha)) = d(E',F',\alpha')^{\lambda}$ (on note
$d(E,F,\alpha')$ l'élément $d(E',F';0;\alpha')$ de $K'(\varphi - \psi)$) . On
vérifie aussitôt que $j.i = Id$ et que $i.j = Id$.

Remarque 1 : L'hypothèse que $\varphi + \psi$ est un T-foncteur nul est essentielle . Ainsi soit 0 le foncteur de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Alors un calcul simple montre que $K(0)=Z \oplus Z_2$ et que $K'(0)=Z$.

Remarque 2 : La notation $K'(\varphi - \psi)$ est impropre . En effet $K'(\varphi - \psi)$ dépend du couple (φ, ψ) et pas seulement de la classe de $\varphi - \psi$ dans $K(\underline{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'))$. Ainsi si $\mathcal{C} = \mathcal{C}' = \mathcal{P}(R)$,$K'(0) \neq K(0)=K(Id-Id)=K'(Id-Id)$ (car Id+Id est un T-foncteur) . Cependant nous continuerons à écrire $K'(\varphi - \psi)$ dans les (rares) occasions où nous aurons à l'utiliser . Par contre si $\varphi + \psi$ est un T-foncteur , nous écrirons $d(E,F,\alpha)$ un élément quelconque de $K(\varphi - \psi) = K'(\varphi - \psi)$.

Proposition 2.5.3 : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories vectorielles topologiques et soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un S-foncteur linéaire continu . Alors ,pour que deux objets de $\Gamma'(\varphi) = \Gamma'(\varphi - 0)$ soient homotopes il faut et il suffit qu'ils soient isomorphes .

Il est clair que deus objets isomorphes sont homotopes . Soient donc (E_0, F_0, α_0) et (E_1, F_1, α_1) deux objets homotopes de $\Gamma'(\varphi)$. Lescouples(E_0, F_0) et (E_1, F_1) sont alors isomorphes et ,sans restreindre la généralité , on peut supposer que $E_0 = E_1$ et que $F_0 = F_1$. Les morphismes α_0 et α_1 sont alors homotopes dans $\mathrm{Iso}(\varphi(E_0)\ \varphi(F_0))$. Comme ,par hypothèse ,l'application $\mathrm{Aut}(E_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(u(E_0))$ est un fibré au sens de Serre , il existe une application $\omega : [0\ ,1] \rightarrow \mathrm{Aut}\ E_0$ telle que $\omega(0) = \mathrm{Id}$ et $u(\omega(1)) = \alpha_1^{-1}\alpha_0$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\varphi(E_0) \arrow[r, "\varphi(\omega(1))"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & \varphi(\;_0) \arrow[d, "\alpha_1"] \\
\varphi(F_0) \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & \varphi(F_0)
\end{tikzcd}$$

qui montre que les triples (E_0, F_0, α_0) et (E_1, F_1, α_1) sont isomorphes .

C.Q.F.D.

La proposition précédente nous permet de donner une nouvelle définition de $K(\varphi) = K(\varphi - 0)$ quand φ est un ST-foncteur linéaire continu (i.e. un foncteur linéaire coninu qui est à la fois un S-foncteur et un T-foncteur) : On considère la catégorie $\Gamma''(\varphi)$ dont les objets sont les triples (E, F, α) où E et F sont deux objets de $\mathcal{C}$ et où α est un isomorphisme de φE sur φF

et dont les morphismes de source (E, F, α) et de but (E', F', α') sont les couples (f,g) de $\mathcal{C}$-morphismes $f : E \longrightarrow E'$, $g : F \longrightarrow F'$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \varphi E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi f"'] & \varphi F \arrow[d, "\varphi g"] \\ \varphi E' \arrow[r] & \varphi F' \end{tikzcd}$$

Comme il est d'usage, un objet de $\Gamma''(\varphi)$ est dit élémentaire s'il est de la forme (E, E, Id). De même la somme de deux objets (E, F, α) et (E', F', α') de $\Gamma''(\varphi)$ est l'objet $(E + E', F + F', \alpha + \alpha')$. Alors $K(\varphi)$ est isomorphe au quotient de $Ob\, \Gamma''(\varphi)$ par la relation d'équivalence :

$\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow \exists\, \tau, \tau'$ éléméntaires tels que $\sigma + \tau$ soit <u>isomorphe</u> à $\sigma' + \tau'$. La structure de groupe abélien de $K(\varphi)$ est induite par la somme des objets de $\Gamma''(\varphi)$.

En fait cette situation est plus générale qu'en apparence. En effet considérons un T-foncteur quelconque de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. On a le diagramme commutatif à homotopie près (Cf § 1.6)

$$\begin{tikzcd} & M_\varphi \arrow[dl, "z"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\ \mathcal{C} \arrow[rr, "\varphi"] & & \mathcal{C}' \end{tikzcd}$$

où M_φ est le mapping-cylinder de φ. Il est clair (par fonctorialité) que $K(\varphi)$ et $K(\varphi_1)$ sont isomorphes et que φ_1 est un T-foncteur. L'étude du groupe K d'un T-foncteur linéaire continu se ramène donc à celle du groupe K d'un ST-foncteur.

Donnons maintenant quelques exemples de ur

S-foncteurs .

<u>Proposition 2.5.4</u> : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories prébanachiques et soit φ un foncteur linéaire continu de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Alors ,pour que φ soit un S-foncteur , il faut et il suffit que ,pour tout objet M de $\mathcal{C}$, l'application φ_M: End M $\longrightarrow$ End $\varphi(M)$,définie par $u \rightsquigarrow \varphi(u)$, soit surjective .

Avec les hypothèses de la proposition ,Aut M et Aut $\varphi(M)$ sont des groupes topologiques . Soit $(\mathrm{Aut}\,\varphi(M))^{\circ}$ la composante neutre de Aut $\varphi(M)$. Si φ est un S-foncteur , φ_M induit un homomorphisme surjectif de $(\mathrm{Aut}\ M)^{\circ}$ sur $(\mathrm{Aut}\,\varphi(M))^{\circ}$. Donc il existe un sous-ensemble A de End M tel que $\varphi_M(A) = B(0\ ,r)$ pour un certain $r > 0$, $B(0\ ,r)$ désignant la boule ouverte de centre 0 et de rayon r .

Réciproquement ,si φ_M est surjective , φ_M est une application ouverte en raison du théorème de Banach . Par conséquent φ_M(Aut M) est un sous-groupe ouvert ,donc fermé ,de Aut F(M) . Comme Aut M et (AutφM) sont des groupes de Lie-Banach et que φ_M(Aut M) est ouvert et fermé dans Aut $\varphi(M)$, φ_M définit un fibré au sens de Serre de Aut M sur Aut $\varphi(M)$.

C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prébanachique . Soit X un espace compact ,Y un sous espace fermé . Alors le foncteur restriction de $\mathcal{C}(X)$ dans $\mathcal{C}(Y)$ est un S-foncteur.

D'après la proposition précédente ,il suffit de montrer que tout morphisme f de $E_{|Y}$ dans $F_{|Y}$,où E et F sont deux fibrés sur X ,se prolonge en un morphisme de E dans F ,au-dessus de X tout entier . Pour cela considérons un recouvrement ouvert fini $\{U_i\}$ de X tel que $E|_{U_i}$ et $F|_{U_i}$ soient triviaux quel que soit i . Soient

$$\varphi_i : E|_{U_i} \longrightarrow (U_i, M_i) \quad \text{et} \quad \psi_i : F|_{U_i} \longrightarrow (U_i, N_i)$$

des trivialisations . Soit $[V_i]$,$V_i \subset U_i$,un recouvrement fermé essentiellement ouvert S de X . Posons $X_i = V_i \cap Y$ et soit $f_i = \psi_i|_{X_i} \cdot f \cdot \varphi_i^{-1}|_{X_i}$. Alors f_i est un morphisme de Y_i dans $\mathrm{Hom}(M_i, N_i)$. Comme $\mathrm{Hom}(M_i, N_i)$ est un espace localement convexe et que Y_i est fermé dans U_i ,il résulte d'un théorème bien connu de prolongement que f_i se prolonge en un morphisme $\widetilde{f_i}$ de W_i dans $\mathrm{Hom}(M_i, N_i)$ où W_i est un voisinage ouvert de Y_i dans U_i . Soit maintenant $[\alpha_i]$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $[W_i]$. Alors $f_x = \sum \alpha_i(x) \psi_{ix}^{-1} \widetilde{f}_{ix} \varphi_{ix}$ est le prolongement cherché (si on convient que $f_{ix} = 0$ pour $x \notin W_i$) .

<u>Proposition 2.5.5</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie vectorielle topologique . Soit X un polyèdre fini ,Y un sous-polyèdre . Alors le foncteur restriction de $\mathcal{C}(X)$ dans $\mathcal{C}(Y)$ est un S-foncteur .

Il faut montrer que si K est un polyèdre ,si E est un fibré sur X et si f : K $\longrightarrow$ Aut E_Y est une application continue qui se "relève" dans Aut E , alors toute homotopie de f se relève . Il résulte de l'homéomorphisme bien connu $F(K, F(Z,T)) \approx F(K \times Z, T)$ appliqué au polyèdre K , à un fermé de trivialisation Z et à $T = \mathrm{Hom}(M, N)$ où M et N sont des objets de $\mathcal{C}$, qu'on peut supposer que K est un point en considérant éventuellement des fibrés sur $K \times Y$ et $K \times X$. On est ainsi conduit au problème suivant : Si E est un fibré sur X et $\mathbb{E}$ son image inverse par la projection $X \times [0,1] \longrightarrow X$, alors tout automorphisme f de $E|X \times \{0\} \cup Y \times [0,1]$ se prolonge en un automorphisme $\tilde{f}$ de $\mathbb{E}$. Mais en effet X et Y étant des polyèdres , il existe une rétraction $r : X \times [0,1] \longrightarrow X \times \{0\} \cup Y \times [0,1]$. Alors l'automorphisme $\tilde{f}$ de $\mathbb{E}$ défini par $\tilde{f}_{x,t} = f_{r(x,t)}$, $x \in X$, $t \in [0,1]$, est le prolongement cherché .

C.Q.F.D.

<u>Proposition 2.5.6</u> : Soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un S-foncteur linéaire continu et soit X un polyèdre fini . Alors $\varphi(X) : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}'(X)$ est un S-foncteur .

Par un argument déjà utilisé , on est ramené à démontrer l'assertion suivante : Si E est un $\mathcal{C}$-fibré sur X et si α est un automorphisme de $\varphi(E)$ qui se relève en β dans Aut E , alors toute homotopie $\alpha(t)$ de α se relève . Considérons pour cela un recouvrement de X essentiellemnt ouvert de X par des sous-polyèdres finis X_i , $i = 1, \ldots, n$ tel que, quel que soit i, $E|X_i$ soit trivial (C'est possible quitte à prendre une triangulation plus fine de X) . Posons $Y_i = \bigcup_{j \leq i} X_j$ et raisonnons par récurrence sur i . Le foncteur $\varphi(Y_i)$ est

12

trivialement un S-foncteur pour i = 1 donc il existe un relèvement $\beta_1(t)$ de $\alpha_1(t) = \alpha(t)|_{Y_1}$. Soit maintenant $\beta_i(t)$ un relèvement de $\alpha_i(t) = \alpha(t)|_{Y_i}$; alors on peut prolonger $\beta_i(t)$ en un relèvement $\beta_{i+1}(t)$ de $\alpha_{i+1}(t) = \alpha(t)|_{Y_{i+1}}$, car $E|_{X_{i+1}}$ esttrivial,et en raison de la propriété PCHEP des fibrés de Serre (Cf Hu:Homotopy Theory p. 62) .

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie vectorielle topologique ,X un espace compact et Y un espace fermé ,on désigne par $K(X ,Y ;\mathcal{C})$ le groupe K du foncteur restriction $\mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$. Si $Y = \emptyset$,on note $K(X ;\mathcal{C})$ le groupe $K(X ,Y ;\mathcal{C})$. Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser plus particulièrement aux groupes $K(D^n ,S^{n-1};\mathcal{C})$, où D^n est la boule unité de R^n et S^{n-1} sa frontière , groupe qu'on notera encore $K_n(\mathcal{C})$. Si $\pi : D^n \longrightarrow$ Point (resp. $\rho : S^{n-1} \longrightarrow$ Point) ,on note $^-$ (resp. $^\circ$) le foncteur image inverse associé à π (resp. ρ) . Ainsi si E est un objet de $\mathcal{C}$,$\bar{E} = \pi^* E$,$\mathring{E} = \rho^* E$. Si α est un automorphisme de $\mathring{E}$,on dit qu'il est <u>normalisé</u> si $\alpha_{|\{e\}} = Id$ (e étant le point base de S^{n-1} de coordonnées (1,0 .. 0) . Si α est un automorphisme de $\mathring{E}$,son normalisé $\check{\alpha}$ est l'automorphisme $\alpha \cdot \mathring{\alpha}_{|\{e\}}$. Si E est un objet de $\mathcal{C}$ et si α est un automorphisme de $\mathring{E}$,on note $\bar{d}(E ,\alpha)$ l'élément $d(\bar{E} ,\bar{E} ,\alpha)$ de $K_n(\mathcal{C})$ (Le foncteur $\mathcal{C}(D^n) \longrightarrow \mathcal{C}(S^{n-1})$ est un T-foncteur : Exemple 2 de la définition 2.5.1) .

Proposition 2.5.7 : Tout élément de $K_n(\mathcal{C})^x$ s'écrit sous la forme $\bar{d}(E,\alpha)$ où E est un objet de $\mathcal{C}$ et où α est un automorphisme normalisé de $\hat{E}$. Pour que $\bar{d}(E,\alpha) = \bar{d}(E',\alpha')$ il faut et il suffit qu'il existe un objet F de $\mathcal{C}$ tel que $\alpha \oplus Id_{E'} \oplus Id_F$ soit homotope à $Id_{E'} \oplus \alpha' \oplus Id_F$ parmi les automorphismes normalisés de $E \oplus E' \oplus F$.

$n \geqslant 1$

La démonstration de cette proposition est laissée en exercice au lecteur.

Considérons maintenant deux catégories vectorielles topologiques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et soient $\varphi, \psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ deux foncteurs linéaires continus. Soit :

$$\partial : K_1(\mathcal{C}') \longrightarrow K(\varphi - \psi)$$

l'homomorphisme défini par $\partial(\bar{d}(T,\alpha)) = d(0,0;T;\alpha)$ et soient :

$$u : K(\varphi - \psi) \longrightarrow K(\mathcal{C})$$

$$\varphi_* - \psi_* : K(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\mathcal{C}')$$

$$\varphi_{*1} - \psi_{*1} : K_1(\mathcal{C}) \longrightarrow K_1(\mathcal{C}')$$

les homomorphismes déduits de la fonctorialité du groupe K. On a donc :

$u(d(E,F;T;\alpha)) = E - F$

$(\varphi_* - \psi_*)(E - F) = \varphi E + \psi F - \psi E - \varphi F$

$(\varphi_{*1} - \psi_{*1})(\bar{d}(E,\alpha)) = \bar{d}(\varphi E, \varphi\alpha) - \bar{d}(\psi E, \psi\alpha)$

Théorème 2.5.1 : Avec les notations précédentes la suite

$$K_1(\mathcal{C}) \xrightarrow{\varphi_{*1} - \psi_{*1}} K_1(\mathcal{C}') \xrightarrow{\partial} K(\varphi - \psi) \xrightarrow{u} K(\mathcal{C}) \xrightarrow{\varphi_* - \psi_*} K(\mathcal{C}')$$

est une suite exacte.

<u>Exactitude en $K(\mathcal{C})$</u> : $((\varphi_* - \psi_*) . u)(d(E,F;T;\alpha))$

$= (\varphi_* - \psi_*)(E - F) = \varphi E + \psi F - \psi E - \varphi F = (\varphi E + \psi F + T)$

$- (\varphi F + \psi E + T) = 0$. Réciproquement si $(\varphi_* - \psi_*)(E - F) = 0$,

$\varphi E + \psi F - \psi E - \varphi F = 0$ dans $K(\mathcal{C}')$. Par suite il existe

un objet T de $\mathcal{C}'$ et un isomorphisme α de

$\varphi E + \psi F + T$ sur $\psi E + \varphi F + T$. Donc $E - F = u(d(E,F;T;\alpha))$

<u>Exactitude en $K(\varphi - \psi)$</u> : $u(\partial(\bar{d}(T, \alpha)) = u(d(0,0;T;\alpha)) = 0$.

Réciproquement si $u(d(E,F;T;\alpha)) = E - F = 0$,il existe un

objet G de $\mathcal{C}$ et un $\mathcal{C}$-isomorphisme $\beta : E + G \longrightarrow F + G$.

Donc $d(E,F;T;\alpha) = d(E + G; F + G; T + \varphi G + \psi G ; \alpha')$

(avec $\alpha' = \alpha + Id_{\varphi G} + Id_{\psi G}$)

$= d(E + G , E + G ; T + \varphi G + \psi G ; \alpha'')$

(avec $\alpha'' = (\varphi(\beta^{-1}) + Id_{\psi(E+G)+T+\varphi G+\psi G}) . \alpha' . (Id_{\varphi(E+G)} + \psi(\beta) + Id_{T+\varphi G+\psi G}$

$= d(0 , 0 ; \varphi(E+G) + \psi(E+G) + T + \varphi G + \psi G ; \alpha'')$

$= \partial(\bar{d}(\varphi(E+G) + \psi(E+G) + T + \varphi G + \psi G ; \alpha''))$

<u>Exactitude en $K_1(\mathcal{C}')$</u> : $\partial(\varphi_{*1} - \psi_{*1})(\bar{d}(E , \alpha))$

$= \partial(\bar{d}(\varphi E , \varphi\alpha) - \bar{d}(\psi E , \psi\alpha)) = \partial(\bar{d}(\varphi E + \psi E, \varphi\alpha + \psi\alpha^{-1}))$

$= d(0 , 0 ; \varphi E + \psi E ; \varphi\alpha + \psi\alpha^{-1}) = d(E , E ; 0 ; \varphi\alpha + \psi\alpha^{-1})$

$= 0$ car l'objet $(E , E ; 0 ; \varphi\alpha + \psi\alpha^{-1})$ est isomorphe à

l'objet élémentaire $(E , E ; 0 ; Id)$. Réciproquement si

$\partial(\bar{d}(T , \alpha)) = d(0 , 0 ; T ; \alpha) = 0$ il existe un objet E de $\mathcal{C}$

et un objet U de $\mathcal{C}'$ tel que $(E , E ; T + U ; \alpha + Id)$ soit homotope à un objet élémentaire (H ,H ; V ;Id) . Il existe donc deux $\mathcal{C}$ -isomorphismes β, β' : E $\longrightarrow$ H tels que le diagramme suivant soit commutatif à honotopie près :

$$\begin{tikzcd}
\varphi E + \psi E + (T + U) \arrow[r, "\alpha + Id"] \arrow[d, "\varphi(\beta) + \psi(\beta^{-1}) + \gamma"'] & \varphi E + \psi E + (T + U) \arrow[d, "\varphi(\beta') + \psi(\beta'^{-1}) + \gamma"] \\
\varphi H + \psi H + V \arrow[r, "Id"] & \varphi H + \psi H + V
\end{tikzcd}$$

On a donc $\bar{d}(T ,\alpha) = \bar{d}(T + \varphi E + \psi E + U , \alpha + Id)$

$= \bar{d}(\varphi E + \psi E + (T + U) , \varphi (\beta'^{-1}\beta) = \psi(\beta'\beta^{-1}) + Id)$

$= \bar{d}(\varphi E , \varphi(\beta'^{-1}\beta)) - \bar{d}(\psi E , \psi(\beta'^{-1}\beta)) = (\varphi_{*1} - \psi_{*1})\, \bar{d}(E , \beta'^{-1}\beta)$.

C.Q.F.D.

<u>Remarque 1</u> : Il est clair que ,par l'image inverse des fibrés , $K(X ,Y ;\mathcal{C})$ est un foncteur du couple (X ,Y) . Posons $\tilde{K}(X ;\mathcal{C}) = \mathrm{Coker}\ (K(\mathrm{Point} ;\mathcal{C}) \longrightarrow K(X ;\mathcal{C}))$. On démontrera au § 2.10 que $K(X ,Y ;\mathcal{C}) \approx \tilde{K}(X/Y ; \mathcal{C})$. Ceci nous amène naturellement à poser les définitions suivantes : Soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur linéaire continu et soit X un espace compact . Alors on pose $K(X ;\varphi) = K(\varphi(X))$. Si Y est un sous-espace fermé de X on pose $K(X ,Y ;\varphi)$ $= \tilde{K}(X/Y ;\varphi) = \mathrm{Coker}\ (K(\mathrm{Point} ;\varphi) \longrightarrow K(X/Y ;\varphi))$. En particulier on désigne par $K_n(\varphi)$ le groupe $K(D^n ,S^{n-1};\varphi)$ $=\tilde{K}(S^n ;\varphi)$. On a alors une suite exacte :

$$(S_n) \quad K_{n+1}(\mathcal{C}) \longrightarrow K_{n+1}(\mathcal{C}') \longrightarrow K_n(\varphi - \psi) \longrightarrow K_n(\mathcal{C}) \longrightarrow K_n(\mathcal{C}')$$

qui généralise celle du théorème 2.5.1 . En fait il n'est pas bien difficile ,à l'aide des considérations qui précèdent ,de la déduire de la suite S_1 du théorème . Les suites (S_n) se recollent d'ailleurs entre elles et donnent une suite exacte (S) infinie à gauche . La suite (S) est un cas particulier d'une suite exacte très générale que nous établirons au § 2.9 .

Remarque 2 : Notre suite exacte (S_1) ressemble beaucoup à celle de Bass [ ]. Malheureusement sa définition de $K(\varphi)$ ne coïncide pas avec la notre dans les cas particuliers qu'il considère (Pour des raisons essentiellement topologiques) . Cependant en s'inspirant de ce paragraphe et du travail de Bass il est possible de définir un $K(\varphi - \psi)$ "algèbrique" qui généralise le groupe K de [ ]

. On obtient ainsi une suite exacte (S_1') qui généralise celle de Bass .

2.6 Les foncteurs $K(X\ ;\mathscr{C})$ et $K(X\ ,Y\ ;\mathscr{C})$

Soit X un espace topologique et soit $\mathscr{C}$ une catégorie vectorielle topologique. On définit le groupe $K(X\ ;\mathscr{C})$ comme le groupe K de la catégorie additive $\mathscr{C}(X)$. Il est clair que $K(X\ ;\mathscr{C})$ peut être considéré comme un foncteur contravariant de X et covariant de $\mathscr{C}$. Si X est paracompact et si Y est un sous ensemble fermé de X, on définit $K(X\ ,Y\ ;\mathscr{C})$ comme le groupe K du foncteur restriction $\mathscr{C}(X) \longrightarrow \mathscr{C}(Y)$; si $Y = \emptyset$, on retrouve la définition de $K(X\ ;\mathscr{C})$. Le groupe $K(X\ ,Y\ ;\mathscr{C})$ est un foncteur contravariant du couple $(X\ ,Y)$ et covariant de $\mathscr{C}$. E
Si X est compact, on retrouve la définition de $K(X\ ,Y\ ;\mathscr{C})$ donnée au paragraphe précédent. En fait, comme nous allons le voir dans ce paragraphe et surtout au chapitre suivant, le groupe $K(X\ ,Y\ ;\mathscr{C})$ n'est vraiment intéressant que dans le cas où X est compact. Nous remarquerons cependant, comme conséquence du théorème 2.5.1, l'exactitude de la suite :

$$K_1(X\ ;\mathscr{C}) \longrightarrow K_1(Y;\mathscr{C}) \longrightarrow K(X\ ,Y\ ;\mathscr{C}) \longrightarrow K(X;\mathscr{C}) \longrightarrow K(Y;\mathscr{C})$$

(où $K_1(X\ ;\mathscr{C}) = K_1(\mathscr{C}(X))$; $K_1(Y\ ;\mathscr{C}) = K_1(\mathscr{C}(Y))$)
sans hypothèse de compacité sur X. Par contre il est faux en général que les groupes $K(X\ ,Y\ ;\mathscr{C})$ et $K(X - U\ ,Y - U\ ;\mathscr{C})$, où U est un ouvert de X tel que $\overline{U} \subset \overset{\circ}{Y}$, soient isomorphes. C'est vrai si X est compact comme on le verra au § 2.10.

Définition 2.6.1 : Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{C}$ une catégorie vectorielle topologique . Un $\mathcal{C}$-fibré localement trivial ξ sur X est dit quasi-trivial s'il existe une partition $[X_i]$ de X en sous-ensembles ouverts (donc fermés) tels que $\xi|_{X_i}$ soit isomorphe à un fibré trivial.

Il est clair que ,si X est connexe ,tout fibré quasi trivial est isomorphe à un fibré trivial . Soit $T(X ;\mathcal{C})$ le sous groupe de $K(X ;\mathcal{C})$ engendré par les fibrés quasi triviaux : $T(X ;\mathcal{C})$ est isomorphe naturellement au groupe $F(X ,K(\mathcal{C}))$ formé des applications continues de X dans le groupe $K(\mathcal{C})$ muni de la topologie discrète ; c'est aussi $H^0(X ;K(\mathcal{C}))$.

Définition 2.6.2 : Soient X un espace topologique , $\mathcal{C}$ une catégorie vectorielle topologique . Un $\mathcal{C}$-fibré localement trivial ξ sur X est dit constant si toutes les fibres ξ_x ,$x \in X$, sont isomorphes entre elles .

On désigne par $\bar{K}(X ;\mathcal{C})$ le sous-groupe de $K(X ;\mathcal{C})$ engendré par les fibrés constants et par $\tilde{\bar{K}}(X ;\mathcal{C})$ le quotient de $\bar{K}(X ;\mathcal{C})$ par le sous-groupe engendré par les fibrés triviaux .

Lemme 2.6.1 : Soit X un espace compact , $\mathcal{C}$ une catégorie vectorielle topologique , ξ un $\mathcal{C}$ -fibré localement trivial sur X . Alors il existe un fibré quasi-trivial T tel que $\xi + T$ soit un fibré constant .

Il est clair que l'ensemble des points $x \in X$ tels que ξ_x soit isomorphe à un objet M fixé de $\mathcal{C}$ est ouvert et fermé dans X . Il existe donc une partition de X en sous-ensembles ouverts et fermés X_i telle que

$\xi|_{X_i}$ soit constant . Comme X est compact , on peut supposer que le recouvrement ouvert $[X_i]$ est fini . Choisissons des points $x_i \in X_i$ et soient $\pi_i : X_i \longrightarrow \{x_i\}$. Alors le fibré $\tilde{\xi}$ défini au-dessus de X_i par $C\xi \oplus \sum_{j \neq i} \pi_i^* \xi|_{\{x_i\}}$ est un fibré constant sur X . C.Q.F.D.

A l'aide du lemme 2.6.1 on peut définir , si X est compact , un homomorphisme $j : K(X ; \mathcal{C}) \longrightarrow \tilde{\bar{K}}(X ; \mathcal{C})$ comme suit : Si ξ est un $\mathcal{C}$ -fibré localement trivial soit T un fibré quasi trivial tel que $\xi + T = \bar{\xi}$ soit constant . Alors la classe de $\bar{\xi}$ dans $\tilde{\bar{K}}(X ; \mathcal{C})$ ne dépend pas de T . De plus $\overline{\xi + \eta} = \bar{\xi} + \bar{\eta}$ dans $\tilde{\bar{K}}(X ; \mathcal{C})$. D'après la propriété universelle de $K(X ; \mathcal{C})$, la correspondance $\xi \rightsquigarrow \bar{\xi}$ définit l'homomorphisme j cherché .

<u>Proposition 2.6.1</u> : Soit X un espace compact et soit $\mathcal{C}$ une catégorie vectorielle topologique . Alors la suite :

$$0 \longrightarrow T(X ; \mathcal{C}) \xrightarrow{i} K(X ; \mathcal{C}) \xrightarrow{j} \tilde{\bar{K}}(X ; \mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

où i est l'inclusion de $T(X ; \mathcal{C})$ dans $K(X ; \mathcal{C})$ est une suite exacte . De plus cette suite se scinde canoniquement.

Il est clair que j est surjectif et que i.j = 0. Soit $\xi - \xi'$ $K(X ; \mathcal{C})$ tel que $j(\xi - \xi') = 0$; si $\xi + T$ et $\xi' + T'$ sont des fibrés constants , il existe des fibrés triviaux T_1 et T_1' tels que $\xi + T + T_1 \approx \xi' + T' + T_1'$. Alors $\xi - \xi' = T' - T + T_1' - T_1 = i(T' + T_1' - T - T_1')$. Si r est l'homomorphisme de $K(X ; \mathcal{C})$ dans $T(X ; \mathcal{C})$ $= F(X ; K(\mathcal{C}))$ défini par $r(\xi)(x) = \xi_x$, on a r.i = Id

C.Q.F.D.

Avec les notations précédentes soit $\mathcal{C}^i$ la catégorie dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les monomorphismes directs de $\mathcal{C}$. Si E est un objet de $\mathcal{C}$, un E-fibré est un $\mathcal{C}$-fibré de fibre isomorphe à E . Soit $\Phi_E(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de E-fibrés de base un espace topologique X . Si $f : E \longrightarrow F$ est un morphisme de $\mathcal{C}^i$,f détermine une application $f^* : \Phi_E(X) \longrightarrow \Phi_F(X)$ définie en ajoutant à un E-fibré un E'-fibré trivial où E' est un supplémentaire de Im f dans F . Il est clair que $E \rightsquigarrow \Phi_E(X)$ peut être considéré comme un foncteur de $\mathcal{C}^i$ dans (Ens) . Soit $\Phi(X ;\mathcal{C}) = \varinjlim \Phi_E(X)$ et soit ι_E l'application canonique de $\Phi_E(X)$ dans $\Phi(X ;\mathcal{C})$. Alors les applications

$$\Phi_E(X) \times \Phi_F(X) \longrightarrow \Phi_{E+F}(X)$$

définies par la somme des fibrés définissent une structure de monoïde commutatif sur $\Phi(X ;\mathcal{C})$.

On a une application évidente $\rho_E : \Phi_E(X) \longrightarrow K(X ;\mathcal{C})$. Soit $x \in K(X ;\mathcal{C})$ l'image par p_E d'un élément ξ de $\Phi_E(X)$. Alors $(j\rho_E)(\xi)$ (si X est compact) ne dépend que de x . En effet si $x = p_E(\xi) = p_F(\xi')$ il existe G et G' ,objets de $\mathcal{C}$,tels que $\xi + \bar{G} \simeq \xi' + \bar{G}'$ en désignant par $\bar{G}$ (resp. $\bar{G}'$) le fibré trivial sur X de fibre G (resp. G') . Désignons par φ l'application de $\Phi(X ;\mathcal{C})$ dans $\tilde{K}(X ;\mathcal{C})$ déduite de $j.\rho_E$ par passage au quotient . Il est clair que φ est un homomorphisme .

<u>Proposition 2.6.2</u> : Si X est un espace compact et si $\mathcal{C}$ est une catégorie topologique , l'homomorphisme

$$\varphi : \phi(X ; \mathcal{C}) \longrightarrow K(X ; \mathcal{C})$$

est un isomorphisme . En particulier $\phi(X ; \mathcal{C})$ est un groupe abélien .

Puisque X est compact tout élément de $\overline{K}(X ; \mathcal{C})$ s'écrit $\xi - T$ où T est trivial et où ξ est constant de fibre E . Alors $j(\xi - T) = j(\xi) = j(\rho_E(\xi))$. Comme j est surjectif , φ est surjectif . Réciproquement soient $x , y \in \phi(X ; \mathcal{C})$, $x = i_E(\xi)$, $y = i_F(\eta)$, tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Alors il existe des fibrés triviaux $\overline{G}$ et $\overline{H}$ de fibre G et H tels que $\xi + \overline{G} \simeq \eta + \overline{H}$; ξ et η ont donc même image dans $\phi_{E+F+G+H}(X)$. Par suite $x = y$.

C.Q.F.D.

Nous avons ainsi ramené le problème de la détermination de $K(X ; \mathcal{C})$, pour X compact , à celui de la détermination de l'ensemble $\phi_E(X)$. C'est ce que nous allons faire maintenant pour des espaces X plus généraux . Cependant, par la suite nous supposerons que

<u>$\mathcal{C}$ est une catégorie prébanachique</u> .

Soit donc E un objet de $\mathcal{C}$ et soient A l'algèbre de Banach End E et GL(E) le groupe topologique A^* des éléments inversibles de A . Il est clair que $\phi_E(X)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés au sens de Steenrod de groupe strucural A^* (par exemple les fibrés principaux de groupe A^*) ou encore à l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés en modules de Banach de fibre isomorphe à A (Cf appendice) .

Soit $B_{GL(E)}$ l'espace classifiant de Milnor du groupe topologique GL(E) . Alors ,d'après Milnor [ ], si X est un CW-complexe , $\Phi_E(X)$ est isomorphe naturellement à l'ensemble $[X , B_{GL(E)}]$ formé des classes d'homotopie d'applications continues de X dans le classifiant $B_{GL(E)}$. En fait on va démontrer une proposition plus générale :

<u>Proposition 2.6.2</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prébanachique et soit E un objet de $\mathcal{C}$. Soit A l'algèbre de Banach End E et soit GL(E) le groupe topologique des éléments inversibles de A . Alors il existe un espace normal $B_{GL(E)}$ et un fibré en modules de Banach $\mathcal{X}$ de fibre isomorphe à A et de base $B_{GL(E)}$ tel que l'application

$$[X , B_{GL(E)}] \longrightarrow \Phi_E(X)$$

qui ,à toute classe d'homotopie d'applications continues $f : X \longrightarrow B_{GL(E)}$ associe la classe d'isomorphie des fibrés $f^*\mathcal{X}$, est ,pour X paracompact ,une application bijective .

Commençons par construire explicitement l'espace classifiant $B_{GL(E)}$ qui sera noté $\mathcal{G}(\infty)$ par la suite .

Soit A^n (n fini ou infini) la limite inductive du système inductif formé des A^p $(p \leq n)$ et des inclusions canoniques $A^p \subset A^q$ pour $p \leq q \leq n$; A^n est donc la somme (finie ou infinie) A + A + A ... . On désigne par A_i ,$i \leq n$, le sous A-module de A^n formé des vecteurs $(x_1 , x_2 , \dots)$ tels que $x_j = 0$ $\forall j \neq i$ et par p_i la projection canonique de A^n sur A_i , $i \leq n$. Considérons l'ensemble $\mathcal{G}(n)$, que nous noterons brièvement $\mathcal{G}$, formé des sous-modules M de A^n qui jouissent de la propriété suivante :

(P_i) : Il existe un entier i , $i \leq n$, tel que $p_{i|M}$ soit un isomorphisme .

Un tel M est donc caractérisé par les graphes $C_{i,r}(M)$ d'homomorphismes $\varphi_{r,i}(M)$ de A_i dans A_r , $r \leq n$, $r \neq i$ qu'on obtient en composant les homomorphismes :

$$A_i \xrightarrow{p_i^{-1}} M \xrightarrow{p_r} A_r$$

De manière précise , si $\mathcal{G}_i$ est le sous-ensemble de formé des M vérifiant (P_i) , on a une bijection ψ_i, de $\mathcal{G}_i$ sur $\bigoplus_{r \neq i} \mathrm{Hom}(A_i, A_r) \approx A$, définie par $M \rightsquigarrow \varphi_{i,r}(M)$. Si on munit $\bigoplus_{r \neq i} \mathrm{Hom}(A_i, A_r)$ de la topologie somme , la bijection précédente permet de définir une topologie τ_i sur $\mathcal{G}_i$. D'autre part les topologies τ_i et τ_j coïncident sur $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{G}_j$. En effet $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{G}_j$ s'applique bijectivement sur

$$\mathrm{Iso}(A_i, A_j) \oplus (\bigoplus_{r \neq i} \mathrm{Hom}(A_i, A_r)) \text{ par } \psi_i \text{ et sur}$$

$$\mathrm{Iso}(A_j, A_i) \oplus (\bigoplus_{r \neq j} \mathrm{Hom}(A_j, A_r)) \text{ par } \psi_j .$$

Sur $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{G}_j$, l'application $\psi_{ji} = \psi_j \psi_i^{-1}$ est alors : définie par $(g , u_r) \rightsquigarrow (g^{-1} , u_r \circ g^{-1})$. On peut donc munir $\mathcal{G}$ de la topologie unique τ dont la restriction à chaque $\mathcal{G}_i$ soit la topologie τ_i . De plus , comme $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{G}_j$ est ouvert dans $\mathcal{G}_i$ (car $\mathrm{Iso}(A_i, A_j)$ est ouvert dans $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)$, $\mathcal{G}_i$ est ouvert dans $\mathcal{G}$.

Montrons maintenant que $\mathcal{G}(n)$ est paracompact pour n fini . Pour cela montrons d'abord que $\mathcal{G}(n)$ est séparé . Si deux points x et y de $\mathcal{G}$ sont dans un même sous espace $\mathcal{G}_i$, $\bigoplus_{r\neq i} \mathrm{Hom}(A_i ,A_r)$ étant métrisable et donc séparé ,on peut séparer x et y par deux ouverts de $\mathcal{G}_i$ qui sont des ouverts de $\mathcal{G}$ car $\mathcal{G}_i$ est ouvert dans $\mathcal{G}$. Supposons que $x\in \mathcal{G}_i$,$y \in \mathcal{G}_j$,$x \notin \mathcal{G}_i \cap \mathcal{G}_j$,$y\notin \mathcal{G}_i \cap \mathcal{G}_j$. Alors $\Psi_{ji}(x) \in \mathrm{Hom}(A_i ,A_j)$, $\Psi_{ji}(x) \notin \mathrm{Iso}(A_i ,A_j)$ et

tout revient à démontrer qu'il existe un voisinage V de $\Psi_{ji}(x)$ dans $\mathrm{Hom}(A_i ,A_j)$ et un voisinage W de $\Psi_{ji}(y)$ dans $\mathrm{Hom}(A_j ,A_i)$ tel que $\Psi_{ji}(V \cap \mathrm{Iso}(A_i ,A_j)) \cap W = \emptyset$ i.e. tel que $\forall g \in V \cap \mathrm{Iso}(A_i ,A_j)$,$g^{-1} \notin W$. Ceci est une conséquence immédiate du lemme suivant qu'on laisse en exercice au lecteur :

<u>Lemme 2.6.1</u> : Soit B une algèbre de Banach et soit $x \in \mathrm{End}\ B$,$x\notin \mathrm{Aut}\ B$. Alors $\forall\ N\ \exists$ un voisinage V de x tel que $\forall\, y \in V \cap \mathrm{Aut}\ B$, $\|y^{-1}\| > N$.

Le fait de (n) ,n fini ,résulte alors du lemme classique suivant :

<u>Lemme 2.6.2</u> : Soit X un espace topologique <u>séparé</u> ,réunion finie d'ouverts U_i qui sont paracompacts pour la topologie induite . Alors X est paracompact .

<u>Corollaire</u> : $\mathcal{G}(\infty)$ est un espace normal

En effet $\mathcal{G}(\infty)$ est limite inductive stricte des espaces paracompacts donc normaux $\mathcal{G}(n)$.

Nous allons maintenant construire un fibré $\mathcal{X}(n)$,n fini ou infini ,en algèbres de Banach sur $\mathcal{G}(n)$. Comme espace topologique $\mathcal{X}(n)$ est le sous espace de

$\mathcal{G}(n) \times A^n$ formé des couples (X, x) tels que $x \in X$.
On a une projection continue $\pi : \mathcal{X}(n) \longrightarrow \mathcal{G}(n)$ définie par $\pi(X, x) = X$ et on peut munir chaque fibre de la structure de A-module de X. Montrons que $(\mathcal{X}(n), \pi, \mathcal{G}(n))$ est un fibré localement trivial.
Soit $X_0 \in \mathcal{G}(n)$ et soit $\varphi_i : \pi^{-1}(\mathcal{G}_i) \longrightarrow \mathcal{G}_i \times A_i$ l'application définie par $\varphi_i(X, x) = (X, p_i(x))$. Alors φ_i est une application continue et son inverse φ_i^{-1} est continue car, en identifiant $\mathcal{G}_i$ à $\bigoplus_{r \neq i} \mathrm{Hom}(A_i, A_r)$ on a $\varphi_i^{-1}(\Psi_{ri}, x) = (\Psi_{ri}, \Psi_{ri}(x))$.

Considérons maintenant un fibré (E, q, X) tel que E_x soit un A-module de rang un, et soit (F, f) un morphisme strict cartésien de (E, q, X) dans $(\mathcal{X}(n), \pi, \mathcal{G}(n))$. Alors F détermine une application continue $\widetilde{F}$ de E dans A^n définie par $\widetilde{F}(y) = z$ si $F(y) = (Y, z)$. De plus $\widetilde{F}$ est linéaire sur chaque fibre et $\forall x \in X$, il existe un voisinage V de x et un entier i tel que $q_i \cdot (\widetilde{F}_{|V})$ soit un isomorphisme sur chaque fibre. Désignons par $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications continues $\widetilde{F} : E \longrightarrow A^n$ qui jouissent de la propriété précédente. Réciproquement remarquons que si $\widetilde{F} \in \mathcal{A}$, $\widetilde{F}$ détermine un morphisme cartésien (F, f) $F : E \longrightarrow \mathcal{X}(n)$ défini par $F(y) = (\widetilde{F}(E_{\pi(y)}), y)$.
Il faut s'assurer que F est continue. Pour cela, la question étant locale, on peut supposer que $E = U \times A$ et que $\widetilde{F}$ est de la forme $\widetilde{F}(u, y) = (\alpha_1(u)y, \ldots, \alpha_n(u)y)$, où α_r est $\forall r$ une application continue de U dans $\mathrm{Hom}(A, A_r)$, et où $\alpha_i(u)$ est inversible pour un certain i.
Mais alors $\widetilde{F}(E_{\pi(y)}) = \widetilde{F}(E_u)$ est représenté dans

$\mathrm{Hom}(A_i\ , A_r)$ par les graphes $\psi_{ir}(u) = (\alpha_r(u)\alpha_i^{-1}(u))$.

Après tous ces préliminaires nous pouvons enfin commencer la démonstration proprement dite de la proposition 2.6.2 .

Soit $(E\ , q, X\ )$ un fibré en A-modules de rang un et de base paracompacte X . Alors on démontre aisément (Cf [ ] ou [ ]) qu'il existe un recouvrement ouvert dénombrable $[U_r]$ de X tel que , $\forall\, r\ , E|_{U_r}$ soit trivial . Considérons une trivialisation :

$$\begin{tikzcd} q^{-1}(U_r) \arrow[rr, "\theta_r"] \arrow[dr, "q"'] & & U_r \times A \arrow[dl] \\ & U_r & \end{tikzcd}$$

et soit α_r le composé de Θ_r et de la projection de $U_r \times A$ sur A ; soit enfin $[\beta_r]$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $[U_r]$. On a une application continue $\tilde{g} : E \longrightarrow A^n$ définie par

$\tilde{g}(v) = (\beta_1(q(v))\alpha_1(v)\ , \ldots .\ ,$) . Cette écriture a bien un sens si on convient que β_r est nulle en dehors d'un fermé contenu dans U_r . Par ailleurs $\tilde{g}$ appartient à $\mathfrak{A}$ (pour chaque v on choisit i tel que $\beta_i(q(v)) \neq 0$,alors $\beta_i(x) \neq 0$ pour x suffisamment voisin de q(v)). L'application $\tilde{g}$ va donc déterminer un morphisme cartésien de $(E\ , q\ , X\ )$ dans $(\lambda(\infty)\ , \pi\ , \mathcal{G}(\infty))$.
Ceci démontre que l'application u est <u>surjective</u> .

Soient maintenant $(F_0\ , f_0)$ et $(F_1\ , f_1)$, $F_0, F_1 : E \longrightarrow \lambda(\infty)$; $f_0, f_1 : X \longrightarrow \mathcal{G}(\infty)$,deux morphismes cartésiens du fibré $(E\ , q\ , X)$ dans $(\lambda(\infty)\ , \pi\ , \mathcal{G}(\infty))$ et montrons que f_o et f_1 sont homotopes . Ceci revient à démontrer que les applications dans A^∞ associées $\widetilde{F}_o$ et $\widetilde{F}_1$ sont homotopes . Soit :

$$\widetilde{F}_i(v) = (\alpha_{i1}(v) , \alpha_{i2}(v) , \dots \quad) \quad , i = 1,2$$

On a alors :

$$(\alpha_{01} , \alpha_{02} , \alpha_{03} , \dots) \sim (\alpha_{01} , 0, \alpha_{02} , 0, \alpha_{03} , \dots)$$

$$\sim (\quad , \alpha_{11} , 0, \alpha_{12} , 0, \alpha_{13} , \dots \quad)$$

$$\sim (\alpha_{11} , \alpha_{12} , \alpha_{13} , \dots \quad)$$

Ceci démontre que u est <u>injective</u> et achève ainsi la démonstration de la proposition 2.6.2 .

<u>Remarque</u> : La proposition 2.6.2 est bien connue lorsque A = R ou C (Cf Milnor [ ]) . En fait sa démonstration est largement inspirée de celle de Milnor [ ] dans ces cas particuliers .

Revenons maintenant à la catégorie prébanachique $\mathcal{C}$ et soit $f : E \longrightarrow F$ un monomorphisme direct de $\mathcal{C}$. Soit $p : F \longrightarrow E$ un morphisme de $\mathcal{C}$ tel que $p.f = Id_E$. Alors l'application $u \rightsquigarrow f.u.p + (1 - f.p)$ est un homomorphisme de GL(E) dans GL(F) dont la classe d'homotopie ne dépend que de f . Cet homomorphisme va induire une application $f^*: B_{GL(E)} \longrightarrow B_{GL(F)}$ entre les espaces classifiants et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [X, B_{GL(E)}] & \xrightarrow{u} & \Phi_E(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle [X, f']} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^*} \\ [X, B_{GL(F)}] & \xrightarrow{u} & \Phi_F(X) \end{array}$$

Dans la suite nous allons employer une convention commode : Si $Y = \{Y_\alpha\}$ est un système inductif d'espaces topologiques et de classes d'homotopie d'applications continues nous noterons $[X, Y]$

la limite inductive du système inductif des $[X, Y_\alpha]$. En particulier, si $\mathcal{C}$ est une catégorie prébanachique, on peut lui associer le système inductif $B(\mathcal{C})$ formé des espaces classifiants $B_{GL(E)}$ et des classes d'homotopie des applications f_*.
Si on note $K(\mathcal{C}) \times B(\mathcal{C})$ le système inductif formé des $K(\mathcal{C}) \times B_{GL(E)}$, on peut enfin énoncer le théorème que nous avions en vue :

<u>Théorème 2.6.1</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prébanachique. Alors il existe un système inductif $B(\mathcal{C})$ formé d'espaces topologiques et de classes d'homotopie d'applications continues tel que, pour tout espace compact X, on a un isomorphisme naturel :

$$K(X;\mathcal{C}) \approx [X, K(\mathcal{C}) \times B(\mathcal{C})]$$

Le système inductif $B(\mathcal{C})$ est appelé le <u>système inductif classifiant</u> de la catégorie $\mathcal{C}$.

Remarque 1 : Nous n'avons pas précisé la loi de monoïde sur le membre de droite ; mais c'est évidemment le produit de la loi de groupe de $K(\mathcal{C})$ par la loi de composition induite par les applications évidentes :

$$B_{GL(E)} \times B_{GL(F)} \longrightarrow B_{GL(E+F)}$$

Remarque 2 : La construction explicite de $B(\mathcal{C})$ montre que $B(\mathcal{C})$ dépend fonctoriellement de $\mathcal{C}$. En effet si $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur continu ,il induit ,pour tout objet E de $\mathcal{C}$,un homomorphisme continu de GL(E) dans $GL(\varphi(E))$ donc une application continue de $B_{GL(E)}$ dans $B_{GL(\varphi(E))}$ compatible avec les applications f^* .

L'isomorphisme du théorème peut donc être interprété comme un isomorphisme naturel par rapport à X et $\mathcal{C}$.

Remarque 3 : Le théorème 2.6.1 est bien connu dans le cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels complexes de dimension finie . Si $B_{U(n)}$ désigne le classifiant du groupe unitaire de rang n , on peut prendre pour système inductif classifiant le système inductif BU formé des espaces $B_{U(n)}$ et des applications canoniques de $B_{U(n)}$ dans $B_{U(n+p)}$. Dans ce cas particulier à vrai dire, on peut dire mieux : Le foncteur ($K(X ;\mathcal{C})$ est représentable et son représentant est $K(\mathcal{C}) \times BU = Z \times BU$ en désignant encore par BU (par abus de langage)la limite inductive du système BU .

Remarque 4 : La remarque précédente nous suggère la question suivante : $K(X ;\mathcal{C})$ est-il un foncteur représentable ? C'est vrai dans les deux cas particuliers que voici :

1 . La catégorie $\mathcal{C}$ possède un générateur , i.e. il existe un objet T de $\mathcal{C}$ tel que tout objet E de $\mathcal{C}$ soit isomorphe à un facteur direct de T^n pour n assez grand . Le représentant n'est autre alors que $\varinjlim_n K(\mathcal{C}) \times B_{GL(T^n)}$.

2 . Supposons que ,pour tout entier n ,le groupe $\widetilde{K}(S^n)$ soit un ensemble dénombrable . Alors , d'après Brown [ ] ,le foncteur $\widetilde{K}(X ;\mathcal{C})$,donc $K(X ;\mathcal{C})$, est représentable du moins si X est un CW-complexe fini .

Le problème dans le cas général reste donc ouvert . Cependant ,sauf dans des cas très particuliers , le fait que $K(X ;\mathcal{C})$ soit seulement une limite inductive de foncteurs représentables sera suffisant pour les applications .

Remarque 5 : Supposons la catégorie $\mathcal{C}$ pseudo-abélienne . Alors ,d'après le § 2.2 ,on a $K(\mathcal{C}) = \varinjlim K(E)$. La formule du théorème s'écrit donc dans ce cas :

$$K(X ;\mathcal{C}) = \varinjlim \left[X ,K(E) \times B_{GL(E)} \right]$$

Remarque 6 : L'espace $B_{GL(E)}$ a un point base canonique : C'est le point de $\mathcal{G}_1$ de graphe $\psi_{i1} = 0 \quad \forall\, i$. On peut donc définir le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie $\pi_n(B_{GL(E)})$ de $B_{GL(E)}$ par rapport à ce point base . On pose $\pi_n(B(\mathcal{C})) = \varinjlim \pi_n(B_{GL(E)})$, définition valable d'ailleurs pour tout système inductif d'espaces à point base . Remarquons que $\pi_o(B(\mathcal{C})) = 0$ car $B_{GL(E)}$ est connexe. De même on posera $\Omega^n B(\ ) = (\Omega^n B_{GL(E)})$; alors $\pi_n(B(\mathcal{C}))$ $= \pi_o(\Omega^n B(\mathcal{C}))$. Au chapitre suivant on démontrera que $\pi_n(B(\mathcal{C})) \approx \pi_{n+2}(B(\mathcal{C}))$ (resp. $\pi_n(B(\mathcal{C})) \approx \pi_{n+8}(B(\mathcal{C}))$) si $\mathcal{C}$ est une catégorie prébanachique complexe (resp. réelle) et quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 1 .

2.7 Le foncteur $K(X ; \varphi - \psi)$

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories vectorielles topologiques ; $\varphi - \psi$ un foncteur linéaire continu virtuel de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ et X un espace paracompact . Alors le foncteur $\varphi(X) - \psi(X)$ est un foncteur linéaire continu virtuel de $\mathcal{C}(X)$ dans $\mathcal{C}'(X)$. Par définition le groupe $K(X ; \varphi - \psi)$ est le groupe K du foncteur $\varphi(X) - \psi(X)$. Si $\mathcal{C}' = 0$ on retrouve le groupe $K(X ; \mathcal{C})$. Si X est un espace compact, nous avons vu dans le paragraphe précédent que le foncteur (de X) $K(X ; \mathcal{C})$ est une limite inductive de foncteurs représentables ; nous allons voir qu'il en est de même pour le foncteur $K(X ; \varphi - \psi)$.

Avec les notations précédentes un objet $(E , F ; T ; \alpha)$ de $\Gamma(X ; \varphi - \psi) = \Gamma(\varphi(X) - \psi(X))$ est dit <u>trivial</u> si le quadruple $(E , F ; T ; \alpha)$ est homotope à l'image inverse d'un quadruple sur le point P par l'application $X \dashrightarrow P$. Un objet de $\Gamma(X ; \varphi - \psi)$ est dit <u>quasi-trivial</u> s'il existe une partition de X en sous-ensembles ouverts X_i de telle sorte que la restriction du quadruple $(E , F ; T ; \alpha)$ à X_i soit pour tout i un quadruple trivial . On désigne par $T(X ; \varphi - \psi)$ le sous-groupe de $K(X ; \varphi - \psi)$ engendré par les quadruples quasi-triviaux : C'est naturellement $\check{H}^0(X ; K(\varphi - \psi))$. Un quadruple $q = (E , F ; T ; \alpha)$ de $\Gamma(X ; \varphi - \psi)$ est dit <u>simple</u> si, pour tout point x de X , la restriction q_x de q à x est homotope à un quadruple élémentaire . On désigne par $\tilde{\bar{K}}(X ; \varphi - \psi)$ le sous-groupe de $K(X;\varphi-\psi)$ engendrée par les quadruples simples .

<u>Proposition 2.7.1</u> : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories prébanachiques et soit $\varphi-\psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur virtuel linéaire continu . Soit X un espace compact . Alors l'inclusion naturelle de $T(X;\varphi-\psi) + \tilde{\tilde{K}}(X;\varphi-\psi)$ dans $K(X;\varphi-\psi)$ est un isomorphisme . En particulier on a une suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow T(X;\varphi-\psi) \rightarrow K(X;\varphi-\psi) \longrightarrow \tilde{\tilde{K}}(X;\varphi-\psi) \rightarrow 0$$

La démonstration de cette proposition est tout à fait analogue à la démonstration de la proposition 2.6 et est laissée en exercice au lecteur .

Il nous reste à déterminer $\tilde{\tilde{K}}(X;\varphi-\psi)$. Dans le cas où $\mathcal{C}' = 0$,on a $\tilde{\tilde{K}}(X;\varphi-\psi) = \tilde{\tilde{K}}(X;\mathcal{C})$ $= \varinjlim_{\mathcal{C}^i} \Phi_E(X)$. Par la suite on aura besoin d'attacher à une catégorie prébanachique $\mathcal{C}$ une catégorie d'indices $I(\mathcal{C})$ plus précise que la catégorie $\mathcal{C}^i$ et qui est la suivante :

- Les objets de $I(\mathcal{C})$ sont des objets de $\mathcal{C}$ choisis au hasard dans chaque classe d'isomorphie d'objets de $\mathcal{C}$ (les objets de $I(\mathcal{C})$ ne sont donc pas $\mathcal{C}$-isomorphes deux à deux) .

- Un morphisme de $I(\mathcal{C})$ de source i et de but j est la donnée (e,m) d'un $\mathcal{C}$-monomorphisme direct $m : i \longrightarrow j$ et d'un $\mathcal{C}$-morphisme $e : j \longrightarrow i$ tels que $e.m = Id_i$. Les morphismes se composent suivant la formule $(e',m').(e,m) = (e'.e , m.m')$.

Un morphisme $(e,m) : i \longrightarrow j$ induit une application parfaitement déterminée de GL(i) dans GL(j) ($u \rightsquigarrow m.u.e + (1-m.e)$) donc de $B_{GL(i)}$ dans $B_{GL(j)}$.

Il est clair qu'on a tout aussi bien $\tilde{\tilde{K}}(X\ ;\mathcal{C})$

$= \varinjlim_{I(\mathcal{C})} \left[X\ , B_{GL(i)}\right]$.

Les ensembles $\Phi_{G,H,u,v}(X)$: Soient G et H des groupes topologiques formés des éléments inversibles d'une algèbre de Banach ,et soient $u,v : G \longrightarrow H$ des homomorphismes continus . On désigne par $\Phi_{G,H,u,v}(X)$ l'ensemble des classes d'homotopie de couples $(E\ ,\alpha)$ où E est un G-fibré principal sur X , et où α est un isomorphismes de u_*E sur v_*E ,u_*E et v_*E étant les H-fibrés principaux induits par u et v . On désigne par $\tilde{\Phi}_{G,H,u,v}(X)$ le sous-ensemble de $\Phi_{G,H,u,v}(X)$ formé des classes d'homotopie de couples (E,α) tels que $\forall x\in X, (E_x,\alpha_x)$ soit homotope à (E_x, Id)

<u>Lemme 2.7.1</u> : Soit X un espace compact . Alors tout élément de $\tilde{\tilde{K}}(X\ ;\varphi - \psi)$ s'écrit sous la forme $d(E\ ,\theta\ ;\theta'\ ;\alpha)$ où θ et θ' sont des fibrés triviaux . Pour que $d(E\ ,\theta\ ;\theta'\ ;\alpha) = 0$ il faut et il suffit qu'il existe des fibrés triviaux θ_1 et θ'_1 tels $\alpha + Id_{\varphi\theta_1} + Id_{\psi\theta_1} + Id_{\theta'_1}$ soit homotope à un isomorphisme de la forme $\varphi(\beta) + \psi(\beta^{-1}) + \gamma$ où $\beta : E + \theta_1 \longrightarrow \theta + \theta_1$, $\gamma : \theta' + \theta'_1 \longrightarrow \theta' + \theta'_1$.

La démonstration de ce lemme est immédiate : et résulte de la définition de $K(X\ ;\varphi - \psi)$.

Nous utiliserons le lemme sous la forme suivante : Pour tout couple $(i,i') \in \mathrm{Ob}\, I(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}\, I(\mathcal{C}')$, posons :

$G_{ii'} = GL(i)$

$H_{ii'} = GL(\varphi(i) + \psi(i) + i')$

$u_{ii'} : GL(i) \xrightarrow{u \to \varphi(u)} GL(\varphi(i)) \xrightarrow{u \to u+1+1} GL(\varphi(i) + \psi(i) + i')$

$$v_{ii'} : GL(i) \xrightarrow{u \rightsquigarrow \psi(u)} GL(\psi(i)) \xrightarrow{u \rightsquigarrow 1+u+1} GL(\varphi(i) + \psi(i) + i')$$

$$\Phi_{ii'}(X) = \widetilde{\Phi}_{G_{ii'}, H_{ii'}, u_{ii'}, v_{ii'}}(X)$$

Alors $\Phi(X ; \varphi - \psi) = \varinjlim_{I(\mathcal{C}) \times I(\mathcal{C}')} \Phi_{ii'}(X)$,muni de la loi de composition induite par les applications évidentes $GL(i) \times GL(j) \longrightarrow GL(i+j)$,etc ... est un groupe abélien. De plus l'application canonique de $\Phi(X ; \varphi - \psi)$ dans $\widetilde{K}(X ; \varphi - \psi)$ est un isomorphisme de groupes .

On est ainsi amené à déterminer les ensembles $\Phi_{G,H,u,v}(X)$ en toute généralité .

<u>Lemme 2.7.2</u> : Soit X un espace compact et soient E_o et E_1 deux H-fibrés principaux sur X et α un isomorphisme de E_o sur E_1 . Soit $\mathbb{E}$ le H-fibré principal sur $X \times [0,1]$ obtenu par recollement des fibrés $E_o \times [0,1[$ et $E_1 \times]0,1]$ par l'isomorphisme $\alpha \times]0,1[$. On a donc $\mathbb{E}|_{\{0\}} = E_o$, $\mathbb{E}|_{\{1\}} = E_1$. Soient maintenant f_o et f_1 deux applications classifiantes de E_o et de E_1 respectivement dans le classifiant B_H . Alors il existe une application classifiante $f : X \times [0,1] \longrightarrow B_H$ du fibré $\mathbb{E}$ telle que $f|_{X \times \{0\}} = f_o$ et $f|_{X \times \{1\}} = f_1$. De plus une telle application f est unique à homotopie près (les conditions $f|_{X \times \{0\}} = f_o$ et $f|_{X \times \{1\}} = f_1$ restant vérifiées durant l'homotopie) .

Le lemme 2.7.2 est une conséquence immédiate du lemme général que voici :

<u>Lemme 2.7.3</u> : Soit Y un espace compact ,B un sous-espace fermé et soit E un H-fibré principal sur Y . Soit $g : B \longrightarrow B_H$ une application classifiante du fibré $E_{|B}$. Alors il existe une extension de g en une application classifiante $G : Y \longrightarrow B_H$ du fibré E tout entier . De plus deux telles extensions sont homotopes parmi les applications continues de Y dans B_H dont la restriction à B est l'application g donnée .

(Pour avoir le lemme 2.7.2 on fait $Y = X \times [0\ ,1]$ et $B = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$) .

<u>Démonstration du lemme 2.7.3</u> : Comme H est formé des éléments inversibles d'une algèbre de Banach ,il existe un voisinage compact V de B et un prolongement de g en une application classifiante $g : V \longrightarrow B_H$ du fibré $E_{|V}$. Soit d'autre part $G' : Y \longrightarrow B_H$ une application classifiante quelconque de E . Alors $G'_{|V}$ et g sont deux applications homotopes . Cette homotopie et l'application G' définissent une application classifiante h(y,t) de $\mathbb{E}_{|V \times [0\ ,1] \cup Y \times \{0\}}$ avec $\mathbb{E} = E \times [0\ ,1]$. Soit r une application continue de $Y \times [0\ ,1]$ dans $V \times [0\ ,1] \cup \ \times \{0\}$ qui est égale à l'identité sur $B \times [0\ ,1] \cup X \times \{0\}$. Alors u(y,1) est le prolongement de g cherché .

Soient maintenant G_o et G_1 deux prolongements de g et soit $g' : B \times [0\ ,1] \longrightarrow B_H$ l'application définie par $g'(y,t) = g(y)$. Alors G_o ,G_1 et g' définissent une application classifiante de $\mathbb{E}_{|Y \times \{0\} \cup B \times [0\ ,1] \cup Y \times \{1\}}$ et tout revient à démontrer que cette application se prolonge en une application classifiante de $\mathbb{E}$ tout entier ce qui est clair d'après ce qui précède .

<u>Remarque</u> : Le lemme 2.7.3 vaut pour H groupe topologique quelconque à condition de supposer que Y est un polyèdre et B un sous polyèdre .

Revenons à la détermination de l'ensemble $\phi_{G;H,u,v}$ et soit B_u ,B_v : $B_G \longrightarrow B_H$ les applications induites par les homomorphismes u et v . Alors si F est un H-fibré principal et si g : X $\longrightarrow B_G$ est une application classifiante de F ,les applications $f_o = B_u \circ g_v$ et $f_1 = B_v \circ g$ sont des applications classifiantes de $u_* F$ et de $v_* F$. L'isomorphisme α détermine ,à homotopie près, une application continue f : $X \times [0\ ,1] \longrightarrow B_H$ telle que $f|_{X \times \{0\}} = f_o$ et $f|_{X\times\{1\}} = f_1$ d'après le lemme 2.7.2 . Désignons par $\Omega(B_u\ ,B_v)$ l'ensemble des couples $(x\ ,\sigma)$ $x\in X$, $\sigma : [0\ ,1] \longrightarrow B_H$ tels que $\sigma(0) = B_u(x)$, $\sigma(1) = B_v(x)$. Si on munit $\Omega(B_u\ ,B_v)$ de la topologie induite par $B_G \times B_H^{[0\ ,1]}$,le couple (f,g) définit une application continue de X dans $\Omega(B_u\ ,B_v)$. Donc ,en définitive ,on a défini une application ω de $\phi_{G,H,u,v}(X)$ dans $[X\ ,\Omega(B_u\ ,B_v)]$.

<u>Proposition 2.7.2</u> : L'application ω de $\phi_{G,H,u,v}(X)$ dans $[X\ ,\Omega(B_u\ ,B_v)]$ précédemment définie est une bijection.

D'après ce qui précède il suffit de démontrer que ω est surjective . Considérons donc une application continue de X dans $\Omega(B_u\ ,B_v)$,ou ,ce qui revient au même ,un couple (f,g) -f : $X \times [0\ ,1] \longrightarrow B_H$,g : $X \longrightarrow B.$ d'applications continues telles que $f|_{X \times\{0\}} = B_u(g)$,

$f|_{X \times \{1\}} = B_v(g)$. Alors, par image inverse des fibrés universels, le couple (f,g) définit un couple $(E, \mathbb{F})$ où E est un G-fibré sur X et où $\mathbb{F}$ est un H-fibré sur $X \times [0,1]$ tels que $\mathbb{F}|_{X \times \{0\}} = u_* E$, $\mathbb{F}|_{X \times \{1\}} = v_* E$.
En vertu du théorème de prolongement des homotopies, il existe un isomorphisme de $u_* E \times [0,1]$ sur $\mathbb{F}$ qui va prolonger l'application identique de $\mathbb{F}|_{X \times \{0\}}$.
On obtient ainsi un isomorphisme $\alpha : u_* E \longrightarrow v_* E$ bien déterminé à homotopie près et il est clair que $(f,g) = \omega(\underline{E}, \alpha)$.

C.Q.F.D.

<u>Théorème 2.7.1</u> : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories prébanachiques et soit $\varphi - \psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur linéaire continu virtuel . Alors il existe un système inductif classifiant $B(\varphi - \psi)$ tel que, pour tout espace compact X , on a une bijection naturelle :

$$K(X ; \varphi - \psi) \approx [X , K(\varphi - \psi) \times B(\varphi - \psi)$$

où $K(\varphi - \psi)$ est muni de la topologie discrète .

En effet il résulte de la proposition 2.7.2 que $\Phi_{G,H,u,v}(X)$ est isomorphe à $[X , \Omega_0(B_u , B_v)]$ où $\Omega_0(B_u , B_v)$ désigne la composante connexe de $\Omega(B_u , B_v)$. On a donc $\Phi_{ii'}(X) \approx \Omega_0(B_{u_{ii'}} , B_{v_{ii'}})$. Le système inductif $B(\varphi - \psi)$ est le système formé des $\Omega_0(B_{u_{ii'}} , B_{v_{ii'}})$.
Le théorème résulte alors de la proposition 2.7.1 .

<u>Remarque</u> : Les applications évidentes $B_{u_{ii'}} \times B$

$\Omega_0(B_{u_{ii'}}, B_{v_{ii'}}) \times \Omega_0(B_{u_{jj'}}, B_{v_{jj'}}) \to \Omega_0(B_{u_{i+j,i'+j'}}, B_{v_{i+j,i'+j'}})$

définissent une structure de groupe commutatif sur $[X , K(\varphi - \psi) \times B(\varphi - \psi)]$. La bijection du théorème apparait alors comme un isomorphisme de groupes .

Au paragraphe 2.4 nous avons démontré l'exactitude d'une suite :

(1) $K_1(\mathcal{C}) \longrightarrow K_1(\mathcal{C}') \longrightarrow K(\varphi - \psi) \longrightarrow K(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\mathcal{C}')$

On a donc aussi une suite exacte :

(2) $K_1(X;\mathcal{C}) \longrightarrow K_1(X;\mathcal{C}') \to K(X;\varphi-\psi) \longrightarrow K(X;\mathcal{C}) \longrightarrow K(X;\mathcal{C}')$

qui induit une suite exacte :

(3) $\widetilde{\widetilde{K}}_1(X;\mathcal{C}) \longrightarrow \widetilde{\widetilde{K}}_1(X;\mathcal{C}') \to \widetilde{\widetilde{K}}(X;\varphi-\psi) \longrightarrow \widetilde{\widetilde{K}}(X;\mathcal{C}) \longrightarrow \widetilde{\widetilde{K}}(X;\mathcal{C}')$

Nous allons donner ,à l'aide du théorème 2.7.1 une deuxième démonstration de l'exactitude de (3) . Cette démonstration nous sera fort utile au chapitre suivant . Nous allons d'abord énoncer quelques sorites classiques de la théorie de l'homotopie .

Soient X et Y deux espaces topologiques à point base x_o et y_o respectivement et soient $f,g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues d'espaces à point base . Soit $\Omega(f,g)$ le sous-ensemble de $X \times Y^{[0\,,1]}$ formé des couples (x,σ) , $\sigma : [0\,,1] \longrightarrow Y$ tels que $\sigma(0)=f(x)$ et $\sigma(1) = g(x)$. Si $\widetilde{y}_o$ désigne le chemin dégénéré au point y_o le point $(x_o\,,\widetilde{y}_o)$ peut être choisi comme point base de $\Omega(f,g)$. Soit $u : \Omega(f,g) \longrightarrow X$ l'application définie par $u(x,\sigma)= x$. Soit $\delta : \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(f,g)$ l'application définie par $\delta(\sigma) = (x_o\,,\sigma)$. Soit enfin $h : \Omega X \longrightarrow \Omega Y$ l'application définie par $h(\sigma) = (g.\sigma)^{-1}(f.\sigma)$.

Proposition 2.7.3 : Avec les notations précédentes ,considérons la suite :

$$\Omega X \xrightarrow{h} \Omega Y \xrightarrow{\delta} \Omega(f,g) \xrightarrow{u} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$$

Alors les suites $\Omega X \xrightarrow{h} \Omega Y \xrightarrow{\delta} \Omega(f,g)$ et $\Omega Y \xrightarrow{\delta} \Omega(f,g) \xrightarrow{u} X$ sont homotopes à des fibrations de Hurewicz (i.e. qui vérifient le théorème de relèvement des homotopies pour tout espace topologique) . Si X et Y sont des H-espaces possédant des inverses continus (par exemple des espaces de lactte) et si f et g sont compatibles avec la structure de H-espace ,alors la suite $\Omega(f,g) \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f \times g^{-1}} Y$ est aussi une fibration de Hurewicz . Dans tous les cas ,quel que soit l'espace topologique Z ,la suite que voici est une suite exacte d'ensembles pointés :

$$[Z,\Omega X] \xrightarrow{[Z,h]} [Z,\Omega Y] \xrightarrow{[Z,\delta]} [Z,\Omega(f,g)] \xrightarrow{[Z,u]} [Z,X] \underset{[Z,g]}{\overset{[Z,f]}{\rightrightarrows}} [Z,Y]$$

Démonstration :

a) Fibration $\Omega Y \xrightarrow{\delta} \Omega(f,g) \xrightarrow{u} X$: évidente .

b) Fibration $\Omega X \xrightarrow{h} \Omega Y \xrightarrow{\delta} \Omega(f,g)$:

Soit $\Omega'(X,Y)$ le sous ensemble de $(\Omega(f,g))^{[0,1]} \times \Omega Y$ formé des couples (α,β) tels que $\alpha|_{\{0\}} = \delta(x)$. L'espace $\Omega'(X,Y)$ s'identifie au sous espace de $X^{[0,1]} \times Y^{[0,1]\times[0,1]}$ formé des couples $(\bar{x}, \bar{\sigma})$ où $\bar{x} : [0,1] \longrightarrow X$ et $\bar{\sigma}(t,u) : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow Y$ avec $\bar{\sigma}(0,u) = f(\bar{x}(u))$, $\bar{\sigma}(1,u) = g(\bar{x}(u))$,$\bar{\sigma}(0,0) = \bar{\sigma}(1,0) = y_0$, $\bar{x}(o) = x_0$.(fig. 1)

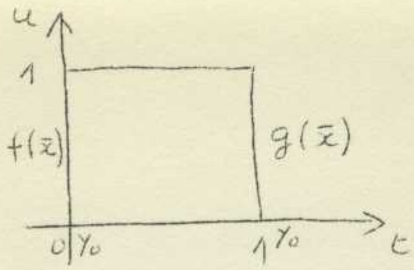


fig 1

Soit d : $\Omega'(X,Y) \longrightarrow \Omega(f,g)$ l'application définie par $d(\alpha,\beta) = \alpha|_{\{1\}}$. Alors d est une fibration de Serre dont la fibre $\Omega''(X,Y)$ s'identifie au sous-ensemble de $\Omega'(X,Y)$ formé des couples $(\bar{x},\bar{\sigma})$ vérifiant les conditions supplémentaires : $\bar{\sigma}(t,1) = y_o$, $\bar{x}(1) = x_o$.

Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Omega''(X,Y) \arrow[r, "h'"] & \Omega'(X,Y) \arrow[r, "d"] & \Omega(f,g) \\ \Omega X \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "h"] & \Omega Y \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r, "\delta"] & \Omega(f,g) \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

où $\varepsilon(\sigma) = (\bar{x},\bar{\sigma})$ avec $\bar{x}(t) = x_o$ et $\bar{\sigma}(t,u) = \sigma(t)$.
Alors ε est une équivalence d'homotopie et le carré de droite du diagramme précédent est commutatif .

Soit $\eta : \Omega X \longrightarrow \Omega''(X,Y)$ l'application suivante : Soit $r : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{1\} \cup \{1\} \times [0,1]$ la rétraction du carré $[0,1] \times [0,1]$ sur trois de ses côtés (fig. 2) et soit $\bar{x}$ un lacet de X . On lui associe

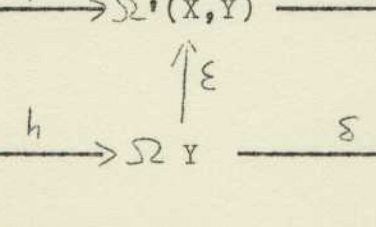


fig. 2

l'élément $(\bar{x},\bar{\sigma})$ de $\Omega'(X,Y)$ où

$$\bar{\sigma} : [0,1] \times [0,1] \xrightarrow{r} \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{1\} \cup \{1\} \times [0,1] \xrightarrow{f(\bar{x}) \cup y_o \cup g(\bar{x})} Y$$

Il est clair que le carré :

$$\begin{tikzcd} \Omega''(X,Y) \arrow[r, "h'"] & \Omega'(X,Y) \\ \Omega X \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "h"] & \Omega Y \arrow[u, "\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif à homotopie près .

Montrons que η est une équivalence d'homotopie. Soit donc $\eta' : \Omega''(X,Y) \longrightarrow \Omega X$ l'application définie par $\eta'(\bar{x},\bar{\sigma}) = \bar{x}$. Alors $\eta' \circ \eta = \mathrm{Id}_{\Omega X}$. D'autre part $f_t(\bar{x},\bar{\sigma}) = (\bar{x}, \bar{\sigma}(tv + (1-t)r(v)))$, $v \in [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, $t \in [0,1]$ définit une homotopie f_t de $\mathrm{Id}_{\Omega''(X,Y)}$ à $\eta' \circ \eta$.

c) Fibration $\Omega(f,g) \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f \times g^{-1}} Y$

(dans le cas où X et Y sont des H-espaces)

Dans ce cas on est ramené au cas où g = Id en considérant $f \times g^{-1}$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Omega(f,\mathrm{Id}) \arrow[r, "u'"] & E(f) \arrow[r, "f'"] & Y \\ \Omega(f,1) \arrow[u, equal] \arrow[r, dash, "u"] & X \arrow[u, "e"'] \arrow[r, dash, "f"] & Y \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

où E(f) est le sous ensemble de $X \times Y^{[0,1]}$ formé des couples (x,σ) tels que $\sigma(0) = f(x)$ et où

$u'(x,\sigma) = (x,\sigma)$

$f'(x,\sigma) = \sigma(1)$

$e(x) = (x,\widetilde{f(x)})$

Il est clair que e est une équivalence d'homotopie .

d) Suite exacte

$$[Z,\Omega X] \xrightarrow{[Z,h]} [Z,\Omega Y] \xrightarrow{[Z,\delta]} [Z,\Omega(f,g)] \xrightarrow{[Z,u]} [Z,X] \overset{[Z,f]}{\underset{[Z,g]}{\rightrightarrows}} [Z,Y]$$

L'exactitude en $[Z,\Omega Y]$ et $[Z,\Omega(f,g)]$ est évidente et résulte de la définition des fibrés de Hurewicz. D'autre part si on a $f.u = g.u$ ~~donc~~ $[Z,f.u]=[Z,g.u]$ et si $h : Z \longrightarrow X$ est une application continues telle que $f.h$ soit homotope à $g.h$: Il existe donc une application continue $F(z,t) : Z \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que $F(z,0)=f.h$ et $F(z,1)=g.h$. Alors l'application $F : Z \longrightarrow Y^{[0,1]}$ définie par $F(z)(t) = F(z,t)$ est une application continue. Les applications f, h et F définissent donc une application continue $G : Z \longrightarrow \Omega(f,g)$ telle que $u.G = h$

C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u> : L'indice $_o$ désignant la composante connexe par arcs du point base des espaces considérés, la suite

$$\Omega_o X \xrightarrow{h} \Omega_o Y \xrightarrow{\delta} \Omega_o(f,g) \xrightarrow{u} X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$$ (Z connexe à point base)

vérifie les mêmes conclusions que la suite initiale.

<u>Proposition 2.7.4</u> : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories prébanachiques et soit $\varphi - \psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur linéaire continu virtuel. Alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\tilde{\tilde{K}}_1(X;\mathcal{C}) & \longrightarrow & \tilde{\tilde{K}}_1(X;\mathcal{C}') & \longrightarrow & \tilde{\tilde{K}}(X;\varphi-\psi) & \longrightarrow & \tilde{\tilde{K}}(X;\mathcal{C}) & \longrightarrow & \tilde{\tilde{K}}(X;\mathcal{C}') \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
[X,\Omega B(\mathcal{C})] & \longrightarrow & [X,\Omega B(\mathcal{C}')] & \longrightarrow & [X,B(\varphi-\psi)] & \longrightarrow & [X,B(\mathcal{C})] & \longrightarrow & [X,B(\mathcal{C}')]
\end{array}$$

Les lignes sont exactes et les flèches verticales sont des isomorphismes .

<u>Démonstration</u> : C'est une conséquence immédiate des considérations qui précèdent .

2.8 Le groupe K d'une grille carrée (première définition)

Nous appellerons grille carrée la donnée d'un diagrammes carré de catégories vectorielles topologiques et de foncteurs linéaires continus virtuels

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\varphi_2 - \varphi_2'"] \arrow[d, "\varphi_1 - \varphi_1'"'] & \mathcal{C}_2 \arrow[d, "\psi_2 - \psi_2'"] \\ \mathcal{C}_1 \arrow[r, "\psi_1 - \psi_1'"] & \mathcal{C}_{12} \end{tikzcd}$$

tels que :

$$\psi_1\varphi_1 + \psi_1'\varphi_1' \approx \psi_2\varphi_2 + \psi_2'\varphi_2'$$

$$\psi_1\varphi_1' + \psi_1'\varphi_1 \approx \psi_2\varphi_2' + \psi_2'\varphi_2$$

Le problème que nous allons essayer de résoudre partiellement dans ce chapitre est d'essayer de définir de manière "raisonnable " un groupe $K(\mathcal{D})$ qui coïncide avec $K(\varphi_1 - \varphi_1')$ quand $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{12} = 0$. Ce problème apparait naturellement quand on veut définir le groupe $K(X ,Y ;\varphi_1 - \varphi_1')$. On est alors amené à considérer la grille carrée :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1(X) - \varphi_1'(X)"'] & \mathcal{C}(Y) \arrow[d, "\varphi_1(Y) - \varphi_1'(Y)"] \\ \mathcal{C}_1(X) \arrow[r] & \mathcal{C}_1(Y) \end{tikzcd}$$

Le groupe $K(X ,Y ;\varphi_1 - \varphi_1')$ cherché sera le groupe K de cette grille .

Le problème général sera résolu à la fin du chapitre suivant . Dans ce paragraphe ,nous contenterons d'examiner un cas particulier ,celui où la grille $\mathcal{D}$ est de la forme :

2.8
2

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & \mathcal{C}_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\
\mathcal{C}_1 \arrow[r, "\psi_1"'] \arrow[ur, phantom, "c_{21}"] & \mathcal{C}_{12}
\end{tikzcd}$$

où φ_1 ,φ_2 ,ψ_2 sont des T-foncteurs ,où ψ_1 est un S-f S-foncteurs et où $c_{21} : \psi_1\varphi_1 \longrightarrow \psi_2\varphi_2$ est un isomorphisme fonctoriel . Soit

Soit $\mathcal{C}'$ la catégorie vectorielle topologique formée des triples (E_1 ,E_2 , ε) où $E_1 \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}_1$,$E_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_2$, et $\varepsilon : \psi_1 E_1 \xrightarrow{\approx} \psi_2 E_2$ et dont les morphismes de source (E_1 ,E_2 ,ε) et de but $(E_1' ,E_2' ,\varepsilon')$ sont les couples (f_1,f_2) ,$f_1 : E_1 \longrightarrow E_1'$ et $f_2 : E_2 \longrightarrow E_2'$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\psi_1 E_1 \arrow[r, "\psi_1 f_1"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \psi_1 E_1' \arrow[d, "\varepsilon'"] \\
\psi_2 E_2 \arrow[r, "\psi_2 f_2"] & \psi_2 E_2'
\end{tikzcd}$$

Soit $\varphi(\mathcal{D}) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ le foncteur linéaire continu défini par $\varphi(\mathcal{D})(E) = (\varphi_1 E ,\varphi_2 E ,c_{21}(E))$ (resp. $\varphi(\mathcal{D})(\alpha)$ $= (\varphi_1\alpha ,\varphi_2\alpha)$ sur les objets (resp. les morphismes)de $\mathcal{C}$. On définit alors le groupe K de la grille $\mathcal{D}$ comme le groupe K du foncteur $\varphi(\mathcal{D})$. Comme φ_1 et φ_2 sont des T-foncteurs ,on peut donner une description directe simple du groupe $K(\mathcal{D})$ qui est la suivante : On considère la catégorie $\Gamma(\mathcal{D})$ dont les

107
118

objets sont les quadruples $(E,F;\alpha_1,\alpha_2)$ où $E,F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,

$\alpha_1 : \varphi_1 E \xrightarrow{\approx} \varphi_1 F$, $\alpha_2 : \varphi_2 E \xrightarrow{\approx} \varphi_2 F$,tels que

$\psi_2\alpha_2 = c_{21}(\psi_1\alpha_1) = (c_{21}(F)).(\psi_1\alpha_1).(c_{21}(E))^{-1}$ et

dont les morphismes de source $(E,F;\alpha_1;\alpha_2)$ et de but $(E',F';\alpha_1',\alpha_2')$ sont les couples (f,g) ,$f : E \longrightarrow E'$, $g : F \longrightarrow F'$ tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} \varphi_1 E \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi_1 f"'] & \varphi_1 F \arrow[d, "\varphi_1 g"] \\ \varphi_1 E' \arrow[r, "\alpha_1'"] & \varphi_1 F' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varphi_2 E \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varphi_2 f"'] & \varphi_2 F \arrow[d, "\varphi_2 g"] \\ \varphi_2 E' \arrow[r, "\alpha_2'"] & \varphi_2 F' \end{tikzcd}$$

Un objet de $\Gamma(\mathcal{D})$ est dit élémentaire s'il est de la forme $(E,E;Id,Id)$. Le groupe $K(\mathcal{D})$ est alors le quotient de $\mathrm{Ob}\,\Gamma(\mathcal{D})$ par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition d'objets élémentaires .

Comme annoncé plus haut ,cette définition nous permet de parler du groupe K_n ,$n \geqslant 0$,d'unTfoncteur linéaire continu $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ comme le groupe K de la grille :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(D^n) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(D^n)"'] & \mathcal{C}(S^{n-1}) \arrow[d, "\varphi(S^{n-1})"] \\ \mathcal{C}'(D^n) \arrow[r] & \mathcal{C}'(S^{n-1}) \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{D}$ est une grille carrée on définit de même le groupe K_n de cette grille comme le groupe K_n du foncteur $\varphi(\mathcal{D})$.

<u>Théorème 2.8.1</u> : Considérons une grille carrée

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & \mathcal{C}_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\ \mathcal{C}_1 \arrow[r, "\psi_1"] & \mathcal{C}_{12} \end{tikzcd}$$

où φ_1, φ_2 et ψ_2 sont des T-foncteurs et où ψ_1 est un S-foncteur . Alors la suite :

$$K_1(\varphi_1) \xrightarrow{v_1} K_1(\psi_2) \xrightarrow{\partial} K(\mathcal{D}) \xrightarrow{u} K(\varphi_1) \xrightarrow{v} K(\psi_2)$$

où les homomorphismes v_1 , ∂ ,u et v sont définis ci-dessous,est une suite exacte .

a) <u>Définition des homomorphismes</u> v_1 , <u>∂ ,u et v</u>

Notons $^-$ (resp. $^\circ$) le foncteur image inverse de $f : D^1 \longrightarrow$ Point (resp. $f : S^0 \longrightarrow$ Point) . Alors $K_1(\varphi_1) = K(\mathcal{D}^1_{\varphi_1})$ et $K_1(\psi_2) = K(\mathcal{D}^1_{\psi_2})$ où $\mathcal{D}_{\varphi_1}$ et $\mathcal{D}^1_{\psi_2}$ s ont les grilles carrées :

$$\begin{tikzcd} \bar{\mathcal{C}} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\varphi}_1"'] & \mathring{\mathcal{C}} \arrow[d, "\mathring{\varphi}_1"] \\ \bar{\mathcal{C}}_1 \arrow[r] & \mathring{\mathcal{C}}_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bar{\mathcal{C}}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\psi}_2"'] & \mathring{\mathcal{C}}_2 \arrow[d, "\mathring{\psi}_2"] \\ \bar{\mathcal{C}}_{12} \arrow[r] & \mathring{\mathcal{C}}_{12} \end{tikzcd}$$

Alors ,par définition , $v_1(d(E,F;\alpha,\beta)) = d(\bar{\varphi}_2E,\bar{\varphi}_2F;\bar{\psi}_1\alpha,\mathring{\varphi}_2\beta)$ (où on note par d les classes dans K) . De même $u(d(E\ ,F;\alpha_1,\alpha_2)) = d(E,F,\alpha_1)$ et $v(d(E,F,\alpha))$ $= d(\varphi_2E,\varphi_2F,\psi_1\alpha)$ (avec l'abus de langage consistant à écrire $\psi_2\varphi_2 = \psi_1\varphi_1$) ,abus de langage que nous utiliserons souvent par la suite) . La construction de ∂ est plus délicate : Tout élément de $K_1(\psi_2)$ s'écrit sous la forme $d(\bar{\varphi}_2(\theta)\ ,\bar{\varphi}_2(\theta);\alpha,\beta)$ où $\alpha(t) : \bar{\psi}_2\bar{\varphi}_2(\theta) \longrightarrow \bar{\psi}_2\bar{\varphi}_2(\theta)$ $t \in D^1$,et $\beta : \mathring{\varphi}_2\theta \longrightarrow \mathring{\varphi}_2\theta$ sont des isomorphismes tels que $\mathring{\psi}_2(\beta) = \check{\alpha}$ et $\alpha_{|\{0\}} = \mathrm{Id}$ (ce qu'on peut supposer sans restreindre la généralité quitte à ajouter à $d(\mathring{\varphi}_2(\theta), \mathring{\varphi}_2(\theta), \alpha, \beta)$ l'élément $0 = d(\overline{\varphi_2}\theta, \overline{\varphi_2}\theta, \overline{\Psi_2\beta|_{\{0\}}}^{-1}, \overline{\alpha_{1|\{0\}}}^{-1})$

$\alpha(t)$ est donc une homotopie de $\mathring{\Psi}_2(\beta)|_{\{1\}}$ à l'identité.

Comme Ψ_1 est un S-foncteur, il existe $\varepsilon(t) \in \mathrm{Aut}\,\varphi_1(\theta)$ avec $\varepsilon(0) = 1$, $\alpha(t) = \Psi_1(\varepsilon(t))$ et on a $\alpha(1) = \Psi_1(\varepsilon(1)) = \Psi_2(\beta)|_{\{1\}}$. Alors par définition $\partial(d(\overline{\varphi_2}(\theta), \overline{\varphi_2}(\theta), \alpha, \beta) = d(\theta, \theta; \varepsilon(1), \beta|_{\{1\}})$. Cette définition ne dépend pas du choix de l'homotopie $\varepsilon(t)$ car si $\varepsilon'(t)$ en est une autre, on a : $d(\theta, \theta; \varepsilon(1), \beta|_{\{1\}}) - d(\theta, \theta; \varepsilon'(1), \beta|_{\{1\}})$

$= d(\theta, \theta; \varepsilon(1)\varepsilon'(1)^{-1}, \mathrm{Id}) = 0$ car $\varepsilon(1)\varepsilon'(1)^{-1}$ est homotope à l'identité par l'homotopie $\varepsilon(t)\,\varepsilon'(t)^{-1}$.

D'autre part elle ne dépend pas non plus du choix du "relèvement" de $\overline{\varphi_2}(\theta)$. Supposons en effet que $\overline{\varphi}_2\theta = \overline{\varphi}_2\theta'$; alors, en désignant par ' les constructions précédentes appliquées à θ', on a $d(\theta', \theta'; \varepsilon'(1), \beta|_{\{1\}})$

$= d(\theta' + \theta, \theta' + \theta; \varepsilon'(1) + \mathrm{Id}, \beta|_{\{1\}} + \mathrm{Id})$

$= d(\theta + \theta', \theta + \theta'; \mathrm{Id} + \varepsilon(1), \beta|_{\{1\}} + \mathrm{Id})$ (Cf remarque précédente)

$= d(\theta, \theta; \varepsilon(1), \beta|_{\{1\}})$.

b) <u>Démonstration de l'exactitude de la suite</u>

<u>Exactitude en $K(\varphi_1)$</u> : $(v \circ u)(d(E, F; \alpha_1, \alpha_2))$

$= d(\varphi_2 E, \varphi_2 F, \Psi_1(\alpha_1)) = d(\varphi_2 E, \varphi_2 F, \Psi_2\alpha_2) = 0$. Réciproquement si $v(d(E, F, \alpha)) = d(\varphi_2 E, \varphi_2 F, \Psi_1\alpha) = 0$, il existe un objet élémentaire de la forme $(\varphi_2\theta, \varphi_2\theta, \mathrm{Id})$, car φ_2 est un T-foncteur, tel que $(\varphi_2(E+\theta), \varphi_2(F+\theta), \Psi_1(\alpha + \mathrm{Id}))$ soit isomorphe à un objet $(\theta', \theta', \gamma')$, $\gamma' \in \mathrm{Aut}\,(\varphi_2\theta')$ étant homotope à l'identité .

$$\begin{tikzcd} \psi_1\varphi_1(E+\theta)=\psi_2\varphi_2(E+\theta) \arrow[r, "\psi_2 f"] \arrow[d, "\psi_1(\alpha+Id)"'] & \psi_2\theta' \arrow[d, "\gamma'"] \\ \psi_1\varphi_1(F+\theta)=\psi_2\varphi_2(F+\theta) \arrow[r, "\psi_2(g)"] & \psi_2\theta' \end{tikzcd}$$

Comme γ' est homotope à l'identité et que ψ_1 est un S-foncteur ,il existe β homotope à α + Id tel que $\psi_1(\beta) = \psi_2(g^{-1})\psi_2(f) = \psi_2(g^{-1}f)$. Alors $d(E,F,\alpha)$
$= d(E+\theta,F+\theta,\alpha+Id) = v(d(E+\theta,F+\theta;\beta,g^{-1}f)$.

<u>Exactitude en K(F)</u> : $(u\circ\partial)(d(\bar\varphi_2\theta,\bar\varphi_2\theta;\alpha,\beta) = u(d(\theta,\theta;\varepsilon(1),\beta|_{\{1\}})$ (où on suppose $\beta|_{\{0\}}$ = Id et $\psi_1(\varepsilon(t)) = \alpha(t)) = d(\theta,\theta,\varepsilon(1))$
= 0 puisque $\varepsilon(1)$ est homotope à l'identité . Réciproquement si $u(d(E,F;\alpha,\beta)) = d(E,F,\alpha) = 0$,il existe des objets θ et θ' de $\mathcal{C}$ et $\varepsilon\in Aut\,\theta'$, ε étant homotope à l'identité par une homotopie $\varepsilon(t)$ ($\varepsilon(0)$ = Id ,$\varepsilon(1) = \varepsilon$) ,de façon que$(E+\theta,F+\theta,\alpha+Id)$ soit isomorphe à $(\theta',\theta',\varepsilon)$,soit :

$$\begin{tikzcd} \varphi_1(E+\theta) \arrow[r, "\varphi_1(f)"] \arrow[d, "\alpha+Id"'] & \theta' \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \varphi_1(F+\theta) \arrow[r, "\varphi_1(g)"] & \theta' \end{tikzcd}$$

Alors $d(E,F;\alpha,\beta) = d(E+\theta,F+\theta;\alpha+Id,\beta+Id)$
$= d(\theta',\theta';\varepsilon,\varphi_2(g)(\alpha+Id)\varphi_2(g^{-1})) = \partial(d(\bar\varphi_2\theta',\bar\varphi_2\theta';\varepsilon(t),\beta)$
où $\beta|_{\{0\}}$ = Id et $\beta|_{\{1\}} = \varphi_2(g)(\alpha+Id)\varphi_2(g^{-1})$.

<u>Exactitude en $K_1(\psi_2)$</u> : Soit $d(\bar\theta,\bar\theta;\alpha,\beta)$ où $\beta|_{\{0\}}$ = Id un élément de $K_1(\psi_2)$. Alors $\partial\,(v_1(d(\bar\theta,\bar\theta;\alpha,\beta)))$
$= \partial(d(\bar\varphi_2\theta,\bar\varphi_2\theta;\psi_1\alpha,\varphi_2\beta) = d(\theta,\theta;\gamma,\varphi_2(\beta)|_{\{1\}})$

Soit $\gamma(t)$ une homotopie de γ ($\gamma(0)$ = Id ,$\gamma(1) = \gamma$);

On a donc $d(\theta,\theta;\gamma,\varphi_2\beta|_{\{1\}})$
$= d(\theta,\theta;\gamma(t),\varphi_2\beta|_{\{t\}}) = d(\theta,\theta;\gamma(0),\varphi_2\beta|_{\{0\}}) = d(\theta,\theta;Id,Id) = 0$.

Réciproquement soit $d(\bar\theta,\bar\theta;\alpha,\beta)\in K_1(\psi_2)$ avec $\bar\varphi_2(\bar\theta') = \bar\theta$ ce qui est loisible, φ_2 étant un T-foncteur, et tel que $\partial(d(\bar\theta,\bar\theta;\alpha(t),\beta) = d(\theta',\theta';\varepsilon(1),\beta|_{\{1\}}) = 0$ (où $t\in D^1$, $\alpha(t) = \psi_1(\varepsilon(t))$, $\beta|_{\{0\}} = Id$). Il existe donc θ'' et $\theta'''\in Ob\,\mathcal{C}$ et des homotopies $\gamma(u)\in Aut\,(\varphi_1\theta'')$ et $\gamma'(u)$ Aut $(\varphi_2\theta''')$, $u\in[0,1]$, avec $\gamma(0) = Id$, $\gamma'(0) = Id$, $\psi_2(\gamma'(t)) = \psi_1(\gamma(t))$, tels que $(\theta'+\theta'', \theta'+\theta'', \varepsilon(t)+Id, \beta|_{\{1\}}+Id)$ soit isomorphe à $(\theta''', \theta''', \gamma(1), \gamma'(1))$ soit

$$\begin{tikzcd}
\varphi_1(\theta'+\theta'') \arrow[r, "\varphi_1(f)"] \arrow[d, "\varepsilon(1)+Id"'] & \varphi_1(\theta''') \arrow[d, "\gamma(1)"] \\
\varphi_1(\theta'+\theta'') \arrow[r, "\varphi_1(g)"] & \varphi_1(\theta''')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\varphi_2(\theta'+\theta'') \arrow[r, "\varphi_2(f)"] \arrow[d, "\beta_{\{1\}}+Id"'] & \varphi_2\,\theta''' \arrow[d, "\gamma'(1)"] \\
\varphi_2(\theta'+\theta'') \arrow[r, "\varphi_2(g)"] & \varphi_2(\theta''')
\end{tikzcd}$$

Donc $d(\bar\theta,\bar\theta;\alpha,\beta) = d(\bar\varphi_2(\theta'+\theta''), \bar\varphi_2(\theta'+\theta''), \alpha(t)+Id, \beta+Id)$;
or $\alpha(t)+Id = \psi_1(\varepsilon(t)+Id)$ et $(\alpha(t)+Id)_{t=1}$
$= (\psi_2(\mathring\varphi_2(g^{-1})\gamma'(1)\mathring\varphi_2(f))|_{\{1\}} = \omega(1)$. Soit $\beta(t,u)$, $t\in D^1$, $u\in[0,1]$, un prolongement de $\omega(u) = (\psi_2(\mathring\varphi_2(g^{-1})\gamma'(u)\mathring\varphi_2(f))$ à D^1 tout entier qui coïncide avec $\alpha(t)+Id$ pour $u = 1$ et qui est égal à l'identité pour $t = 0$. Un tel prolongement existe toujours car l'ensemble formé par deux cotés consécutifs d'un carré est rétracte du carré tout entier.
Comme maintenant $\alpha(t) + Id = \psi_1(\varepsilon(t) + Id)$ et comme ψ_1 est un S-foncteur, il existe $\delta(t,u)\in Aut\,(\bar\varphi_1(\theta'+\theta''))$ tel que $\delta(t,1) = \varepsilon(t) + Id$ et tel que $\psi_1(\delta(t,u))|_{S^0}$
$= \mathring\varphi_2(g^{-1})\gamma'(u)\mathring\varphi_2(f)$. Alors $d(\bar\theta,\bar\theta;\alpha,\beta)$

$= d(\bar{\varphi}_2(\theta'+\theta''),\bar{\varphi}_2(\theta'+\theta'');\beta(t,u),\mathring{\varphi}_2(g^{-1})\gamma'(u)\mathring{\varphi}_2(f))$

($t= D^1$,u fixé)

$= d(\bar{\varphi}_2(\theta'+\theta''),\bar{\varphi}_2(\theta'+\theta'');\psi_1(\delta(t,o)),\mathring{\varphi}_2(g^{-1}f))$

$= v(d(\bar{\theta}' +\bar{\theta}'',\bar{\theta}'+\bar{\theta}'';\delta(t,o),\eta)$ avec $\eta|_{\{1\}} = g^{-1}f$ et $\eta_{\{0\}} = \mathrm{Id}$

C.Q.F.D.

<u>Théorème 2.8.2 (Excision)</u> : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories vectorielles topologiques et soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un T-foncteur linéaire continu . Soient X un espace compact et Y un sous-espace fermé . Envisageons l'une des deux situations suivantes :

a) $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des catégories prébanachiques

b) X est un polyèdre ,Y un sous-polyèdre .

Alors la projection :

$$p : (X ,Y) \longrightarrow (X/Y ,\{y\})$$

induit un isomorphisme :

$$p^* : K(X/Y , y;\varphi) \longrightarrow K(X ,Y ;\varphi)$$

Pour démontrer le théorème on est amené à considérer la grille carrée :

$$\mathcal{D}(X,Y) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}(X) \arrow[r, "\psi_2 = \varphi(X)"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & \mathcal{C}'(X) \arrow[d, "\varphi_2"] \\ \mathcal{C}(Y) \arrow[r, "\psi_1 = \varphi(Y)"] & \mathcal{C}'(Y) \end{tikzcd}$$

Un objet de $\Gamma(\mathcal{D}(X,Y))$ est déterminé à isomorphisme près par le quadruple $(E,F;\alpha_1,\alpha_2)$ formé de deux $\mathcal{C}$-fibrés E et F sur X et de deux isomorphismes

$\alpha_1 : \varphi_1(E) \longrightarrow \varphi_1(F)$ (soit $\alpha_1 : E|_Y \longrightarrow F|_Y$)

$\alpha_2 : \varphi_2(E) \longrightarrow \varphi_2(F)$

tels que $\psi_1(\alpha_1) = \psi_2(\alpha_2)$ (avec l'abus de langage signalé plus haut) .

Un objet $(E,F;\alpha_1,\alpha_2)$ de $\Gamma(\mathcal{D}(X,Y))$ est dit <u>pseudo-élémentaire</u> si :

a) $E = F$,$\alpha_1 = \mathrm{Id}$

b) Il existe une homotopie $\alpha_2(t)$,$t\in[0\ ,1]$, telle que $\alpha_2(0) = \alpha_2$,$\alpha_2(1) = \mathrm{Id}$,$\alpha_2(t)|_Y = \mathrm{Id}$.

Pour démontrer le théorème 2.8.2 nous aurons besoin de deux lemmes :

<u>Lemme 2.8.1</u> : Soit $\sigma = (E,F;\alpha_1,\alpha_2)$ un objet de $\Gamma(\mathcal{D}(X,Y))$.
Pour que l'image de σ dans $K(X\ ,Y\ ;\varphi)$ soit nulle ,il faut et il suffit qu'il existe un objet pseudo-élémentaire $\tau = (\theta\ ,\theta\ ;\mathrm{Id}\ ,\alpha_2)$ et un objet élémentaire $\tau' = (\theta',\theta';\mathrm{Id},\mathrm{Id})$ tels que $\sigma + \tau$ soit <u>isomorphe</u> à τ' .

D'après la définition de $K(X\ ,Y\ ;\mathcal{D})$,il existe un objet $\tau'' = (\theta\ ,\theta\ ;\omega,\gamma)$ et un objet $\tau' = (\theta'\ ,\theta';\mathrm{Id}\ ,\mathrm{Id})$ tels que :

a) On a des homotopies $\gamma(t)$, $\omega(t)$ avec $\gamma(0) = \mathrm{Id}$,$\gamma(1) = \gamma$, $\omega(0) = \mathrm{Id}$,$\omega(1) = \omega$,
$\psi_1(\omega(t)) = \psi_2(\gamma(t)) = \gamma(t)|_Y$

b) $\sigma + \tau''$ est isomorphe à τ' .

Comme le foncteur φ_1 est un S-foncteur ,il existe $\omega'(t) \in \mathrm{Aut}\,\theta$ tel que $\varphi_1(\omega'(t)) = \omega(t)$. Soit $\beta = \varphi_2((\omega'(t))^{-1})\gamma$. Alors si $\tau = (\theta,\theta;\mathrm{Id},\ )$,$\sigma + \tau'$ est isomorphe à τ .

<u>Lemme 2.8.2</u> : Tout élément de $\Gamma(\mathcal{D}(X,Y))$ est homotope à la restriction à (X,Y) d'un élément de $\Gamma(\mathcal{D}(X,V))$,V voisinage de Y ,pour V assez petit .

Pour fixer les idées nous envisagerons seulement l'hypotèse a) du théorème 2.8.2 .

Donnons nous $(E,\theta;\alpha_1,\alpha_2) \in \mathrm{Ob}\,\Gamma(\mathcal{D}(X,Y))$ avec θ trivial . Alors α_1 se prolonge en un isomorphisme $\tilde{\alpha}_1 : E|_W \longrightarrow \theta|_W$ car $\mathrm{Iso}(E,\theta)$ est ouvert dans $\mathrm{Hom}(E,\theta)$ et que l'application $\mathrm{Hom}(E,\theta) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E|_Y ,\theta|_Y)$ est surjective . Pour W assez petit ,$\varphi_2(\tilde{\alpha}_1)$ et $\alpha_{2\,W}$ sont donc homotopes par l'homotopie $t\varphi_{2W}(\tilde{\alpha}_1) + (1-t)\alpha_{2W}$. Soit $\pi : X \times [0\ ,1] \longrightarrow X$ la première projection . On a un isomorphisme f_2 de $\pi^*\varphi_{2X}(E)$ sur $\pi^*\varphi_2(\theta)$ défini au-dessus des points $(x,t) \in X \times \{0\} \cup W \times [0\ ,1]$ par α_{2W} au-dessus de $X \times \{0\}$ et par $t\,\varphi_{2W}(\tilde{\alpha}_1) + (1-t)\alpha_{2W}$ au-dessus de $W \times \{t\}$.
Si r est une application continue de $X \times [0\ ,1]$ dans $X \times \{0\} \cup W \times [0\ ,1]$ qui induit l'identité sur $X\ V \times [0\ ,1]$, V voisinage de Y dans X ,alors l'isomorphisme précédent , restreint à $V \times [0\ ,1]$,se prolonge en un isomorphisme :

$$F_2 : \pi^*\alpha_{2X}(E) \longrightarrow \pi^*\alpha_{2X}(\theta)$$

défini par $F_2(x,t) = f_2(r(x,t))$. On obtient ainsi un isomorphisme $\tilde{\alpha}_2 = F_2(x,1)$ homotope à α_2 et un s isomorphisme $\tilde{\alpha}_1 : E|_V \longrightarrow \theta|_V$ tels que $\psi_1(\tilde{\alpha}_1) = \psi_2(\tilde{\alpha}_2)$ (ces égalités restant vraies durant l'homotopie d'après la formule donnant $F_2(x,t)$) .

Pour démontrer le lemme dans l'hypotèse b) ,on utilise le fait que Y est rétracte de voisisnage dans X . Les détails sont laissés au lecteur .

<u>Démonstration du théorème 2.8.2</u> :

1 . <u>p^* est injectif</u> : Soit $d(E,\theta;\alpha_1,\alpha_2) \in K(X,Y;\varphi)$ avec θ trivial et tel que $p^*(d(E,\theta;\alpha_1,\alpha_2))$ $= d(p^*E,p^*\theta\,;p^*\alpha_1,p^*\alpha_2) = 0$. Il existe donc deux fibrés triviaux sur X ,qu'on peut supposer de la forme $p^*\theta'$ et $p^*\theta''$,ainsi qu'un isomorphisme :

$$(p^*(E+\theta'),p^*(\theta+\theta'),p^*(\alpha_1+\mathrm{Id}),p^*(\alpha_2+\mathrm{Id})) \longrightarrow (p^*\theta'',p^*\theta'';\mathrm{Id},\varepsilon_2)$$

ε_2 étant homotope à l'identité par une homotopie $\varepsilon_2(t)$ telle que $\varepsilon_2(t)|_Y = \mathrm{Id}$ (Cf Lemme 2.8.1)

$$\begin{tikzcd} p^*(E+\theta') \arrow[r, "f|Y"] \arrow[d, "p^*(\alpha_1+Id)"'] & p^*\theta'' \arrow[d, "Id"] \\ p^*(\theta+\theta') \arrow[r, "g|Y"] & p^*\theta'' \end{tikzcd}$$

Donc $d(E,\theta;\alpha_1,\alpha_2) = d(E+\theta',\theta+\theta';\alpha_1+\mathrm{Id},\alpha_2+\mathrm{Id}\,)$

$= d(E+\theta',\theta+\theta';(g^{-1}f)|_{\{y\}},\varphi_{2X}(g^{-1})\varepsilon_2(t)\varphi_{2X}(f))$

$= d(E+\theta',\theta+\theta';(g^{-1}f)|_{\{y\}},\varphi_{2X}(g^{-1}f)) = 0$.

2 . <u>p^* est surjectif</u> : Soit $d(E\,,\theta;\alpha_1,\alpha_2) \in K(X,Y;\varphi)$ avec θ trivial et soit θ' un fibré trivial sur X/Y tel que $p^*\theta' = \theta$. On peut supposer ,d'après le lemme 2.8.2 , que l'isomorphisme α_1 est la restriction à Y d'un isomorphisme ,noté encore α_1 , de $E|_V$ sur $\theta|_V$ où V est un voisinage de Y . Soit E' le fibré sur X/Y obtenu par

recollement de $E|_{X-Y}$ et de $\theta'|_{V/Y}$ au moyen de $\alpha_1|_{V-Y}$. Soit α_1' l'isomorphisme de $E'|_{V/Y}$ sur $\theta'|_{V/Y}$ égal à α_1 sur V-Y et à l'identité sur $\{y\}$ et soit α_2' l'isomorphisme de $\varphi_2(E)$ sur $\varphi_2(\theta)$ égal à α_2 sur X-Y et à l'identité sur $\{y\}$. Alors $d(E,\theta;\alpha_1,\alpha_2) = d(p^*E',p^*\theta';p^*\alpha_1',p^*\alpha_2')$ $= p^*(d(E',\theta';\alpha_1',\alpha_2'))$.

C.Q.F.D.

<u>Proposition 2.8.1</u> : Avec les hypotèses a) ou b) du théorème 2.8.2 on a une suite exacte infinie à gauche :

$$\dots \to K_{n+1}(X,Y;\varphi_1) \to K_{n+1}(X,Y;\psi_2) \to K_n(X,Y;\mathcal{D}) \to K_n(X,Y;\varphi_1)$$
$$\dots \text{—} \; K(X,Y;\psi_2)$$

La démonstration de la proposition va reposer sur les théorèmes 2.8.1 et 2.8.2 ainsi que sur les lemmes ci-dessous .

<u>Lemme 2.8.3</u> : Avec les hypotèses a)* ou b) du théorème 2.8.2 , on a une suite exacte :

$$K_1(X;\varphi_1) \to K_1(X;\psi_2) \to K(X;\mathcal{D}) \to K(X;\varphi_1) \to K(X);\psi_2)$$

On considère en effet la grille carrée :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(X) \arrow[r, "\varphi_2(X)"] \arrow[d, "\varphi_1(X)"'] & \mathcal{C}_2(X) \arrow[d, "\psi_2(X)"] \\
\mathcal{C}_1(X) \arrow[r, "\psi_1(X)"] & \mathcal{C}_{12}(X)
\end{tikzcd}$$

<u>Lemme 2.8. 4</u>: Avec les hypothèses a) ou b) du théorème 2.8.2 on a une suite exacte :

---

* Toutes les catégories vectorielles topologiques considérées sont prébanachiques .

$$K_1(X,Y;\mathcal{C}_1) \longrightarrow K_1(X,Y;\mathcal{C}_2) \longrightarrow K(X,Y;\mathcal{D}) \longrightarrow K(X,Y;\mathcal{C}_1) \rightarrow K(X,Y;\mathcal{C}_2)$$

Pour démontrer le lemme on peut supposer que Y est réduit à un point $\{y\}$,grace au théorème d'excision . Considérons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
K_1(X,\{y\};\mathcal{C}_1) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(X,\{y\};\mathcal{C}_2) \arrow[r] \arrow[d] & K(X,\{y\};\mathcal{D}) \arrow[r] \arrow[d] & K(X,\{y\};\mathcal{C}_1) \arrow[r] \arrow[d] & K(X,\{y\};\mathcal{C}_2) \arrow[d] \\
K_1(X;\mathcal{C}_1) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(X;\mathcal{C}_2) \arrow[r] \arrow[d] & K(X;\mathcal{D}) \arrow[r] \arrow[d] & K(X;\mathcal{C}_1) \arrow[r] \arrow[d] & K(X;\mathcal{C}_2) \arrow[d] \\
K_1(\{y\};\mathcal{C}_1) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(\{y\};\mathcal{C}_2) \arrow[r] \arrow[d] & K(\{y\};\mathcal{D}) \arrow[r] \arrow[d] & K(\{y\};\mathcal{C}_1) \arrow[r] \arrow[d] & K(\{y\};\mathcal{C}_2) \arrow[d] \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme les suites verticales sont exactes scindées et les deux dernières suites horizontales sont exactes . Le lemme 2.8.3 est alors conséquence du lemme trivial :

<u>Lemme 2.8.5</u> : Considérons un diagramme commutatif . de groupes abéliens et d'homomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
A'' \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

où toutes les suites sont exactes sauf peut être la suite :

$$A' \longrightarrow B' \longrightarrow C'$$

Alors ,si la suite :

$$0 \rightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \rightarrow 0$$

est exacte scindée ,la suite :

$$A' \longrightarrow B' \longrightarrow C'$$

est une suite exacte .

La proposition 2.8.1 se déduit maintenant du lemme 2.8.4 en remplaçant X par $X \times D^n$ et Y par $X \times S^{n-1} \cup Y \times D^n$.

<u>Corollaire</u> : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories vectorielles topologiques et soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un T-foncteur linéaire continu . On a alors un suite exacte infinie à gauche

$$K_{n+1}(\mathcal{C}) \rightarrow K_{n+1}(\mathcal{C}') \longrightarrow K_n(\varphi) \longrightarrow K_n(\mathcal{C}) \longrightarrow K_n(\mathcal{C}')$$

C'est en effet une conséquence de la proposition 2.8.1 en y faisant X = Point et Y = $\emptyset$. C'est aussi une conséquence du théorène 2.8.1*: Considérer la grille :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(D^n) \arrow[r, "\varphi(D^n)"] \arrow[d] & \mathcal{C}'(D^n) \arrow[d] \\
\mathcal{C}(S^{n-1}) \arrow[r, "\varphi(S^{n-1})"] & \mathcal{C}'(S^{n-1})
\end{tikzcd}$$

<u>Proposition 2.8.2</u> : Avec les hypothèses a) ou b) du théorène 2.8.2 ,on a une suite exacte infinie à gauche :

---

* Si φ est un ST foncteur

$$\ldots\ K_{n+1}(X,Y;\varphi) \longrightarrow K_{n+1}(X;\varphi) \longrightarrow K_{n+1}(Y;\varphi) \longrightarrow K_n(X,Y;\varphi)$$

$$\longrightarrow K_n(X;\varphi)\ \ldots \longrightarrow K(Y;\varphi)$$

(suite exacte de"cohomologie ")

C'est une conséquence de la proposition 2.8.1 :
Considérer la grille :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(X)"'] & \mathcal{C}(Y) \arrow[d, "\varphi(Y)"] \\ \mathcal{C}'(X) \arrow[r] & \mathcal{C}'(Y) \end{tikzcd}$$

<u>Proposition 2.8.3</u> : Soit

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathcal{C}' \xrightarrow{\ \psi\ } \mathcal{C}''$$

une suite de catégories vectorielles topologiques et de T-foncteurs linéaires continus . On a alors une suite exacte infinie à gauche :

$$\ldots\ K_{n+1}(\psi.\varphi) \longrightarrow K_{n+1}(\psi) \longrightarrow K_n(\varphi) \longrightarrow K_n(\psi.\varphi) \longrightarrow K_n(\psi)$$

$$\ldots \longrightarrow K(\psi)$$

C'est une conséquence du théorème 2.8.1 :
On considère la grille :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi.\varphi"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, "\psi"] \\ \mathcal{C}'' \arrow[r, "Id"] & \mathcal{C}'' \end{tikzcd}$$

<u>Corollaire</u> : Sous les hypothèses a) ou b) du théorème 2.8.2 ,on a une suite exacte :

$$\ldots \longrightarrow K_{n+1}(X,Y;\psi.\varphi) \longrightarrow K_{n+1}(X,Y;\psi) \longrightarrow K_n(X,Y;\varphi)$$

$$K_n(X,Y;\psi\varphi) \to K_n(\psi)\ \ldots\ K(\psi)$$

Remarque générale sur le § 2.8

Comme il a été signalé au début de ce paragraphe ,les résultats que nous venons d'obtenir seront généralisés dans le paragraphe suivant ,tout au moins dans le cadre des catégories prébanachiques . Cette généralisation ne pourra se faire que modulo une définitionconvenabledu groupe K d'une grille carrée . Ainsi ,pour ne citer qu'un exemple ,la proposition 2.8.3 vaut plus généralement si φ et ψ sont des foncteurs linéaires continus virtuels (sans hypothèse T) .

CHAPITRE III

Cohomologie des catégories de Banach

Table des matières

CHAPITRE III

Cohomologie des catégories de Banach

3.1 Algèbres de Clifford

Soient k un anneau commutatif ,E un k-module et Q une forme quadratique sur E . Soit $T(E) = \sum_{i=0}^{\infty} T^i(E)$ $= k \oplus E \oplus (E \otimes E) + \dots$ l'algèbre tensorielle de E et soit I(Q) l'idéal bilatère de T(E) engendré par les éléments de la forme $x \otimes x - Q(x).1$ dans T(E) . Alors l'algèbre quotient T(E)/I(Q) est <u>l'algèbre de Clifford</u> de E pour la forme quadratique Q . On la note C(E,Q) ou ,plus simplement , C(E) ou C(Q) . On définit aussi une application canonique $i_Q : E \longrightarrow C(E,Q)$ comme la composée des applications $E \longrightarrow T(E) \longrightarrow C(E,Q)$. Le couple $(i_Q, C(E,Q))$ est solution d'un problème d'applications universelles que voici : Soit $\varphi : E \longrightarrow A$ une application k-linéaire de E dans une k-algèbre A telle que ,quel que soit l'élément x de E , on ait $(Q(x))^2 = Q(x).1$; alors il existe une application $\tilde{\varphi} : C(E,Q) \longrightarrow A$ de k-algèbres,et une seule ,telle que $\tilde{\varphi}.i_Q = \varphi$.

Soit $C^0(E,Q)$ l'image de $\sum_{i=0}^{\infty} T^{2i}(E)$ dans C(E,Q) et soit de même $C^1(E,Q)$ l'image de $\sum_{i=0}^{\infty} T^{2i+1}(E)$ dans C(E,Q) . La décomposition

$$C(E,Q) = C^0(E,Q) \oplus C^1(E,Q) \quad ,0 \text{ et } 1 \in Z_2$$

définit une structure de k-algèbre Z_2-graduée sur C(E,Q) .

<u>Proposition 3.1.1</u> : Soient E_1 et E_2 deux k-modules munis respectivement de formes quadratiques Q_1 et Q_2 . Alors , $E_1 \oplus E_2$ étant muni de la forme quadratique somme $Q_1 \oplus Q_2$ définie par $(Q_1 \oplus Q_2)(x_1,x_2) = Q_1(x_1) \oplus Q_2(x_2)$,on a un isomorphisme d'algèbres Z_2-graduées :

$$C(E_1 \oplus E_2 ,Q_1 \oplus Q_2) \approx C(E_1,Q_1) \hat{\otimes} C(E_2,Q_2)$$

En effet soit $f : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow C(E_1)\hat{\otimes}C(E_2)$ l'application définie par $f(x_1,x_2) = i_{Q_1}(x_1)\otimes 1 + 1\otimes i_{Q_2}(x_2)$; alors$(f(x_1,x_2))^2 = (Q_1(x_1) + Q_2(x_2))\,(1\otimes 1)$ et f définit donc une application $\tilde{f} : C(E_1 \oplus E_2) \longrightarrow C(E_1)\otimes C(E_2)$.
En sens inverse soit $g_1 : C(E_1) \longrightarrow C(E_1 \oplus E_2)$,l = 1,2 , les applications évidentes qui reésultent de la "fonctorialité" de C(,) . Alors g_1 et g_2 définissent une application $g : C(E_1)\hat{\otimes}C(E_2) \longrightarrow C(E_1 \oplus E_2)$ par la formule $g(x_1\, x_2) = g_1(x_1)\, g_2(x_2)$. On vérifie que g est bien l'inverse de f .

Comme toute algèbre graduée ,l'algèbre de Clifford C(E,Q) possède une involution canonique ,notée σ ou $\bar{\ }$ définie par $\bar{x} = x$ (resp. $\bar{x} = -x$) si x est de degré 0 (resp. 1) . Explicitement si $x = x_1x_2 \cdots x_n$,$x_i \in E$, on a $\bar{x} = (-1)^n x$. Elle possède aussi une antiinvolution t définie par $\quad {}^t(x_1x_2 \ldots x_n) = x_n \ldots x_2x_1$,avec les notations précédentes ,sur les générateurs de C(E) . L'algèbre C(E) est donc isomorphe à son opposée .

La filtration $F^qT(E) = \sum_{i\leq q} T^iE$ sur T(E) induit une filtration de l'algèbre de Clifford C(E) et l'algèbre graduée associée est isomorphe à l'algèbre extérieure de E . Par conséquent ,si E est un k-module libre de dimension n ,C(E) est un k-module libre de dimension 2^n.

Explicitement ,si $e_1 ,\ldots ,e_n$ est une base de E ,les produits $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}$,$i_1 < i_2 \ldots < i_k$,ainsi que 1 , forment une base de C(E) . Dans ce cas particulier ,il n'est d'ailleurs pas difficile de vérifier que l'application i_Q est une injection .

Dans ce paragraphe on est surtout intéressé par le cas particulier où $E = k^n$ et où Q est la forme quadratique non dégénérée définie par

$$Q(x_1 ,\ldots,x_n) = -x_1^2 -x_2^2 - \ldots -x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

(le cas dégénéré sera étudié plus tard .)

On notera $C_{p,q}(k)$,ou simplement $C_{p,q}$ l'algèbre de Clifford correspondante . Pour p entier positif ,on note C_p(resp. C_{-p}) l'algèbre de Clifford C_{p0} (resp. C_{0p}) . L'application répétée de la proposition 3.1.1 montre que C_{pq} est isomorphe à $\underbrace{C_1 \hat{\otimes} C_1 \ldots \hat{\otimes} C_1}_{p} \hat{\otimes} \underbrace{C_{-1} \hat{\otimes} C_{-1} \ldots \hat{\otimes} C_{-1}}_{q}$

Pae exemple ,si $k = \mathbb{R}$,on a

$$C_1 \approx \mathbb{C} \qquad C_{-1} \approx \mathbb{R} + \mathbb{R}$$
$$C_2 \approx \mathbb{H}$$

D'une manière générale ,l'algèbre C_{pq} peut être identifiée à la k-algèbre universelle engendrée par l'élément unité 1 et des symboles e_i ,ε_k , i = 1 ,.. ,p ,k = 1 ,...,q soumis aux relations :

$$e_i^2 = -1 \quad , \; e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad , \forall\, i \neq j$$

$$\varepsilon_k^2 = +1 \quad , \; \varepsilon_k \varepsilon_l + \varepsilon_l \varepsilon_k = 0 \quad , \forall\, k \neq l$$

$$e_i \varepsilon_k + \varepsilon_k e_i = 0$$

On convient que $C_{o,o} = k$.

Remarquons enfin ,toujours comme corollaire de la proposition 3.1.1 ,que l'on a un isomorphisme

$$C_{p,q} \otimes C_{p',q'} \approx C_{p+p',q+q'}$$

Par analogie avec le cas $k = R$,on note k_C et k_H respectivement les algèbres k_1 et k_2 . Avec certaines hypothèses sur k ,on se propose maintenant d'exprimer les algèbres $C_{p,q}$ en fonction d'algèbres graduées de matrices sur k ,k_C et k_H . Il est commode pour cela d'introduire les définitions suivantes :

Soit A une k-algèbre graduée . Alors on note $A_{p,q}$ la k-algèbre graduée $A \hat{\otimes} C_{p,q}$. De même , pour p positif ,on note A_p (resp. A_{-p}) la k-algèbre graduée $A_{p,o}$ (resp. $A_{O,p}$) . En particulier A_1 (resp. A_{-1}) est l'<u>algèbre complexifiée</u> (resp. <u>décomplexifiée</u>) de A . L'algèbre $A_{p,q}$ est obtenue évidemment par p complexifications et q décomplexifications successives . Si A et B sont deux algèbres graduées l'application

$$\theta : A \hat{\otimes} B \longrightarrow B \hat{\otimes} A$$

définie par $\theta(x \otimes y) = (-1)^{\deg x . \deg y} (y \otimes x)$ est un isomorphisme d'algèbres graduées . En particulier on a

$C_1 \hat{\otimes} A \approx A \hat{\otimes} C_1$ et $A \hat{\otimes} C_{-1} \approx C_{-1} \hat{\otimes} A$,ce qui permet d'effectuer les complexifications et décomplexifications dans un ordre quelconque .

Si A est une k-algèbre Z_2-graduée ,considérons le A-module Z_2-graduée A^n défini par

$$(A^n)_o = A_o + A_1 + A_o + A_1 + \dots \qquad \text{(n facteurs)}$$
$$(A^n)_1 = A_1 + A_o + A_1 + A_o + \dots$$

La graduation de A^n induit une graduation sur $A(n) = \mathrm{Hom}(A^n ,A^n)$. L'involution canonique σ_n associée à cette graduation est définie par $\sigma_n((a_{ij})) =((-1)^{i+j}\sigma(a_{ij}))$ où σ désigne l'involution canonique de A . En particulier k peut être considéré comme une algèbre graduée en posant $k_o = k$,$k_1 = 0$ et l'algèbre k(n) est ainsi munie d'une structure d'algèbre graduée non triviale si $n > 1$.

<u>Proposition 3.1.2</u> : Avec les notations précédentes ,les algèbres graduées $k(n) \hat{\otimes} k(p)$ et $k(np)$ sont isomorphes .

En choisissant un ordre convenable sur le produit tensoriel des bases canoniques de k^n et de k^p on voit que le module gradué $k^n \hat{\otimes} k^p$ est isomorphe au module gradué k^{np} . Nous identifierons k^{np} à $k^n \hat{\otimes} k^p$ au moyen de cet isomorphisme . Définissons alors une application linéaire

$$\varphi : k(n) \hat{\otimes} k(p) \longrightarrow k(np) \approx \mathrm{Hom}(k^n \hat{\otimes} k^p , k^n \hat{\otimes} k^p)$$

par la formule :

$$\varphi(\alpha\hat{\otimes}\beta)(x\otimes y) = (-1)^{\deg\beta \deg x}\, \alpha x \otimes \beta y$$

où $\alpha \in k(n)$, $\beta \in k(p)$, $x \in k^n$, $y \in k^p$ et où on suppose α , β , x et y homogènes . Avec des notations évidentes on a alors :

$$\varphi((\alpha\hat{\otimes}\beta)(\alpha'\hat{\otimes}\beta'))(x\otimes y) = (-1)^{\deg\beta \deg\alpha'}\varphi(\alpha\alpha'\hat{\otimes}\beta\beta')(x\otimes y)$$

$$= (-1)^{\deg\beta \deg\alpha' + (\deg\beta + \deg\beta')\deg x}\, \alpha\alpha' x \otimes \beta\beta' y$$

D'autre part :

$$\varphi(\alpha\hat{\otimes}\beta)\,(\,\varphi(\alpha'\hat{\otimes}\beta')(x\otimes y))$$

$$= \varphi(\alpha\hat{\otimes}\beta)((-1)^{\deg\beta'\deg x}\alpha' x\otimes\beta' y)$$

$$= (-1)^{\deg\beta'\deg x + \deg\beta(\deg\alpha' + \deg x)}\, \alpha\alpha' x \otimes \beta\beta' y$$

$$= \varphi(\,(\alpha\hat{\otimes}\beta)(\alpha'\hat{\otimes}\beta'))(x\otimes y)$$

Par conséquent φ est un homomorphisme de k-algèbres . Si $\alpha_{ij}^{i'j'} \in k(np)$ est l'application linéaire définie par $\alpha_{ij}^{i'j'}(e_k\otimes\varepsilon_l) = \delta_i^k \delta_j^l\, e_{i'}\otimes\varepsilon_{j'}$, où δ désigne le symbole de Kronecker, alors on a ,avec des notations évidentes $\alpha_{ij}^{i'j'} = (-1)^{i(j+j')}\varphi(\alpha_i^{i'}\hat{\otimes}\alpha_j^{j'})$.

Ceci montre que φ est surjectif . Comme $k(n)\otimes k(p)$ et k(np) sont des k-modules libres de même dimension ~~de type fini~~ , φ est un isomorphisme .

C.Q.F.D.

<u>Proposition 3.1.3</u> : Soit k un a nneau commutatif et soit A une algèbre Z_2-graduée . Alors les algèbres graduées $A\hat{\otimes} k(n)$ et A(n) sont isomorphes .

Ecrivons $A^n \approx A\hat{\otimes} k^n$ et soit

$$\psi : A \hat{\otimes} k(n) \longrightarrow A(n) \approx \mathrm{Hom}(A \hat{\otimes} k^n , A \hat{\otimes} k^n)$$

l'application linéaire définie par

$$\psi(a \otimes \alpha)(x \otimes y) = (-1)^{\deg \alpha \deg x} ax \otimes \alpha y \quad .$$

Alors ,comme pour la proposition 3.1.2 ,on démontre que φ est un homomorphisme de k-algèbres . Il est clair que c'est une bijection . C'est donc un isomorphisme.

C.Q.F.D.

<u>Proposition 3.1.4</u> : Soit A une algèbre graduée . Alors $A_{n,n}$ est isomorphe à l'algèbre graduée $A(2^n)$ si 2 est inversible dans k .

<u>Corollaire</u> : $A_{p,q} \approx A_{p-q}(2^q)$ si $p \geqslant q$

$A_{p,q} \approx A_{p-q}(2^p)$ si $p \leqslant q$

D'après ce qui précède ,il suffit de démontrer la proposition pour $A = k$ et $n = 1$. Soit f l'application de $C_{1,1}$ dans $k(2)$ définie par

$$f(a + be_1 + c\varepsilon_1 + d\,\varepsilon_1 e_1) = \begin{pmatrix} a + d & c - b \\ c + b & a - d \end{pmatrix}$$

Alors f est un homomorphisme injectif . Il est surjectif car le système :

$$a + d = \alpha \qquad a - d = \beta$$

$$b + c = \gamma \qquad c - b = \delta$$

admet une solution(et une seule)dans k qui est donnée par les formules :

$$a = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad d = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$b = \tfrac{1}{2}(\gamma+\delta) \qquad c = \tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)$$

Disons que k est un anneau <u>complexe</u> si -1 admet une racine carrée dans k . On a alors la proposition suivante :

<u>Proposition 3.1.3</u> : Soit A une algèbre graduée sur k . Alors les algèbres graduées A_4 et A_{-4} sont isomorphes . Si k est complexe il en est de même des algèbres graduées A_1 et A_{-1}.

On peut supposer que A = k . Alors si i est une racine carrée de -1 ,l'application $x + ye_1 \rightsquigarrow x + iy\varepsilon_1$ est un isomorphisme de C_1 sur C_{-1} . Dans le cas général ,l'homomorphisme f défini par

$$f(e_1) = \varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4 \quad ,f(e_2) = \varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_1 \quad ,f(e_3) = \varepsilon_4\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad ,$$

$f(e_4) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est l'isomorphisme de C_4 sur C_{-4} cherché .

<u>Théorème 3.1.1</u> : Soit k un anneau commutatif quelconque (resp. complexe) où 2 est inversible . Alors ,si k est un entier $\geqslant 0$,les algèbres graduées C_{k+8} et $C_k(16)$ (resp. C_{k+2} et $C_k(2)$) sont isomorphes . Si $k \leqslant 0$,il en est de même des algèbres graduées C_{k-8} et $C_k(16)$ (respectivement C_{k-2} et $C_k(2)$) .

Raisonnons dans le cas où k est quelconque et n positif, pour fixer les idées . On a alors les isomorphismes :

$C_{k+8} \approx (C_{k+4})_4 \approx (C_{k+4})_{-4}$ (proposition 3.1.3)

$\approx C_k(16)$ (proposition 3.1.2) .

Pour calculer explicitement les algèbres C_n , $0 \leqslant n < 8$,ce qui ,d'après le théorème précédent et la proposition 3.1.2 ,déterminera entièrement les algèbres C_{pq} ,on a besoin de la proposition suivante :

<u>Proposition 3.1.4 (Cf [ ])</u> : Soit k un anneau commutatif où 2 est inversible ,alors on a des isomorphismes :

a) $k_C \otimes_k k_C \approx k_C + k_C$

$k_H \otimes_k k_C \approx k_C(2)$

$k_H \otimes_k k_H \approx k(4)$

b) $C_k \hat{\otimes} C_{-2} \approx C_{-p-2}$ $\qquad (p \geqslant 0)$

$C_{-p} \hat{\otimes} C_2 \approx C_{p+2}$

Les isomorphismes a) sont bien connus . Pour démontrer les isomorphismes b) considérons l'application $\psi : k^{p+2} \longrightarrow C_p \hat{\otimes} C_{-2}$ définie par

$$\psi(\varepsilon_i) = \begin{cases} e_{i-2} \otimes \varepsilon_1 \varepsilon_2 & 2 \leq i \leq k+2 \\ 1 \otimes \varepsilon_i & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

où ε_i représente la base canonique de k^{p+2} .
Alors ψ satisfait à la propriété universelle des algèbres de Clifford et définit un homomorphisme d'algèbres graduées $\tilde{\psi} : C_{-p-2} \longrightarrow C_p \hat{\otimes} C_{-2}$. Cette application étant surjective d'une manière évidente et les k-modules C_{-p-2} et $C_p \otimes C_{-2}$ étant libres de type fini ,c'est un isomorphisme . Le deuxième isomorphisme se démontre de manière analogue .

La proposition 3.1.4 nous permet de dresser la table suivante :

p	$C_p(k)$	$C_{-p}(k)$	$C_p(k_C)=C_{-p}(k_C)$
0	k	k	k_C
1	k_C	$k + k$	$k_C + k_C$
2	k_H	$k(2)$	$k_C(2)$
3	$k_H + k_H$	$k_C(2)$	$k_C(2) + k_C(2)$
4	$k_H(2)$	$k_H(2)$	$k_C(4)$
5	$k_C(4)$	$k_H(2)+k_H(2)$	$k_C(4)+k_C(4)$
6	$k(8)$	$k_H(4)$	$k_C(8)$
7	$k(8)+k(8)$	$k_C(8)$	$k_C(8)+k_C(8)$
8	$k(16)$	$k(16)$	$k_C(16)$

(11)

3.2 Catégories graduées

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive . Une Z_2-graduation sur $\mathcal{C}$ est la donnée ,pour tout couple (M,N) d'objets de $\mathcal{C}$,d'une Z_2-graduation $\mathrm{Hom}^0(M,N) \oplus \mathrm{Hom}^1(M,N)$ sur le groupe abélie n Hom(M,N) des morphismes de $\mathcal{C}$ de source M et de but N . On suppose en outre que ,par composition des morphismes ,l'image de $\mathrm{Hom}^p(M,N) \times \mathrm{Hom}^q(N,P)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Hom}^{p+q}(M,P)$,p et $q \in Z_2$,quels que soient les objets M ,N et P de $\mathcal{C}$.

Une catégorie additive Z_2-graduée est ,par définition ,une catégorie additive munie d'une Z_2-graduation . On définit de manière analogue une catégorie Z-graduée ou Z_m-graduée . Cependant seules les catégories Z_2-graduées nous intéresserons par la suite ; aussi les désignerons nous simplement sous le nom de catégories additives graduées par la suite .

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive graduée . On désigne par $\mathcal{C}^0$ la catégorie additive (non graduée) dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{C}$ de degré zéro . La catégorie additive graduée $\mathcal{C}$ est dite pseudo-abélienne si la catégorie $\mathcal{C}^0$ est pseudo-abélieene . On se gardera alors de penser que la catégorie sous-jacente à $\mathcal{C}$ est pseudo--abélienne ; il est facile de construire des contre-exemples .

Introduisons une définition commode : Soit k un anneau commutatif et soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive . Alors une structure de k-module sur $\mathcal{C}$ est la donnée , pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathcal{C}$, d'une structure de k-modules sur $\mathrm{Hom}(M, N)$ de manière compatible avec la composition des morphismes : i.e. l'application

$$\mathrm{Hom}(M, N) \times \mathrm{Hom}(N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, P)$$

est, pour tout triple (M, N, P) une application k-bilinéaire. Une <u>k-catégorie</u> est une catégorie additive munie d'une structure de k-module. On laisse au lecteur le soin de définir de même la notion de k-catégorie graduée. Remarquons qu'une Z-catégorie est simplement une catégorie additive. Dans la suite de ce paragraphe toutes les catégories additives considérées (graduées ou pas) sont supposées implicitement munies d'une structure de k-module, k étant un anneau comutatif fixé une fois pour toutes.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories additives graduées et soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur additif compatible avec les structures de k-modules. Alors le foncteur φ est dit <u>gradué</u> (de degré zéro) si, pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathcal{C}$ on a

$\varphi(\mathrm{Hom}^p(M,N)) \subset \mathrm{Hom}^p(\varphi(M)\, \varphi(N))$, $p = 0, 1$. On laise au lecteur le soin d'expliciter les notions d'isomorphisme et d'équivalence de catégories graduées.

Considérons maintenant une catégorie additive $\mathcal{C}$. On peut lui associer de manière canonique une catégorie additive graduée $\hat{\mathcal{C}}$ définie de la manière suivante :

- Les objets de $\hat{\mathcal{C}}$ sont les couples (E_o, E_1) d'objets de $\mathcal{C}$.

- On pose $\mathrm{Hom}^n_{\hat{\mathcal{C}}}((E_o,E_1),(F_o,F_1)) = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(E_p, F_q)$

Si $\mathcal{C}$ est pseudo-abélienne et si 2 est inversible dans k on a une description équivalente de $\hat{\mathcal{C}}$ qui nous sera aussi utile que la précédente :

- Les objets de $\hat{\mathcal{C}}$ sont les couples (E, ε) où E est un objet de $\mathcal{C}$ et où ε est un automorphisme de E de carré 1 . En vertu des hypothèses sur $\mathcal{C}$ les objets $E_o = \operatorname{Ker} 1/2(\varepsilon - 1)$ et $E_1 = \operatorname{Ker} 1/2(\varepsilon + 1)$ existent .

- On pose $\operatorname{Hom}^n((E,\varepsilon), (F,\eta))$

$$= \left\{ f : E \longrightarrow F \;\middle|\; f.\varepsilon = (-1)^n \eta . f \right.$$

Soit maintenant $C_{p,q}(k)$,ou simplement $C_{p,q}$, l'algèbre de Clifford de k^{p+q} muni de la forme quadratique $-x_1^2 - \ldots -x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2$. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive ,on désigne par $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ la catégorie additive graduée formée des objets gradués de $\mathcal{C}$ où l'algèbre graduée $C_{p,q}$ opère :

- Un objet de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ est donc la donnée d'un couple (E, ρ) où E est un objet de $\hat{\mathcal{C}}$ et où

$$\rho : C_{p,q} \longrightarrow \operatorname{End} E$$

est un homomorphisme d'algèbres <u>graduées</u> . La donnée de ρ est donc équivalente à la donnée d'automorphismes de E de dgré 1 : e_i ,ε_k , $i = 1 ,\ldots ,p$,$k = 1 ,\ldots ,q$ satisfaisant aux conditions :

$$e_i^2 = -1 \quad ; \varepsilon_k^2 = +1 \quad \forall\, i ,k$$

$$e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad ; \varepsilon_k \varepsilon_l + \varepsilon_l \varepsilon_k = 0 \quad \forall\, i \neq j \;, \forall\, k \neq l$$

$$e_i \varepsilon_k + \varepsilon_k e_i = 0 \quad \forall\, i ,k$$

- Un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ de source (E, ρ) et de but (E', ρ') est un $\mathcal{C}$-morphisme $f : E \longrightarrow E'$ tel que $\forall \lambda \in C_{p,q}$, $f.\rho(\lambda) = \rho'(\lambda).f$ (condition qu'on écrira simplement $f.\lambda = \lambda.f$ par la suite en utilisant les notations classiques des modules) . Avec l'interprétation précédente ceci signifie aussi que l'on a les relations de commutation :

$$f.e_i = e_i.f \quad ; \quad f.\varepsilon_k = \varepsilon_k.f \quad \forall\, i, k$$

- Enfin la graduation des morphismes de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ est évidemment induite par la graduation des morphismes de $\hat{\mathcal{C}}$.

Il existe une autre description des catégories graduées $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ plus satisfaisante à certains points de vue et plus adaptée à l'étude des structures multiplicatives . Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive <u>graduée</u> désignons par $\mathcal{C}_{(p,q)}$ la catégorie additive graduée suivante :

- Les objets de $\mathcal{C}_{(p,q)}$ sont les couples (E, ρ) où E est un objet de $\mathcal{C}$ et où

$$\rho : C_{q,p} \longrightarrow \operatorname{End} E$$

est un homomorphisme d'algèbres graduées .

- Pour $n \in Z_2$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}(p,q)}((E,\rho),(E',\rho'))$

est le sous-groupe de $\operatorname{Hom}^n_{\mathcal{C}}(E, E')$ formé des morphisme f tel que quel que soit l'élément λ de degré m de $C_{q,p}$ on a les conditions de commutation :

$$f.\rho(\lambda) = (-1)^{mn}\, \rho'(\lambda).f$$

En particulier la catégorie $\mathcal{C}_{(1,0)}$ est dite la catégorie complexifiée de $\mathcal{C}$. De même la catégorie $\mathcal{C}_{(0,1)}$ est dite la catégorie décomplexifiée de $\mathcal{C}$. Il est clair que la catégorie graduée $\mathcal{C}_{(p,q)}$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}$ au moyen de p complexifications et q décomplexifications successives .

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive nous allons montrer que les catégories graduées $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ et $\hat{\mathcal{C}}_{(p,q)}$ sont isomorphes . Pour cela définissons d'abord deux foncteurs gradués :

$$d_{p,q} : \hat{\mathcal{C}}_{p,q} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}_{(p,q)} \qquad d'_{(p,q)} : \hat{\mathcal{C}}_{(p,q)} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}_{p,q}$$

Soit (E,ρ) un objet de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$; alors si $E = E_o + E_1$ est la décomposition de E en parties homogènes , ρ est entièrement déterminé par la donnée

$$\rho(v) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_v \\ \beta_v & 0 \end{pmatrix}$$

pour $v \in k^{p+q} \subset C_{p,q}$, α_v et β_v devant satisfaire aux conditions suivantes :

a) $\alpha_v : E_1 \longrightarrow E_o$ et $\beta_v : E_o \longrightarrow E_1$ sont des $\mathcal{C}$-morphismes .dépendant linéairement de v .

b) $\alpha_v \beta_v = Q(v)\, Id_{E_o}$ (ce qui implique avec a) que $\beta_v \alpha_v = Q(v)\, Id_{E_1}$) où $Q(v)$ désigne la forme quadratique donnée sur k^{p+q} qui donne naissance à l'algèbre de Clifford $C_{p,q}$. Remarquons que la forme quadratique $-Q$ donne naissance à l'algèbre de Clifford $C_{q,p}$.

Posons alors $d_{p,q}((E,\rho)) = (E,\tilde{\rho})$ où ,avec les notations précédentes ,

$$\tilde{\rho}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_v \\ \beta_v & 0 \end{pmatrix}$$

Si f : $(E,\rho) \longrightarrow (E',\rho')$ est un morphisme de $\mathcal{C}_{p,q}$,le morphisme $d_{p,q}(f) = (E,\tilde{\rho}) \longrightarrow (E',\tilde{\rho}')$ qui coïncide avec f comme morphisme de $\mathcal{C}$ sous-jacent est bien un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}_{(p,q)}$. Le foncteur $d_{(p,q)}$ se définit de la même manièr e par un changement de signe convenable .

<u>Proposition 3.2.1</u> : Les foncteurs $d_{p,q}$ et $d_{(p,q)}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre des catégories graduées $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ et $\hat{\mathcal{C}}_{(p,q)}$.

La démonstration est immédiate .

La proposition précédente nous permet ainsi d'avoir une définition récurrente des catégories graduées $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$. Ainsi on voit que la catégorie $\hat{\mathcal{C}}_{p+1,q}$ (resp. $\hat{\mathcal{C}}_{p,q+1}$) est isomorphe à la catégorie complexifiée (resp. décomplexifiée de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$) . Cette remarque justifie l'introduction ,à priori artificielle ,des algèbres de Clifford pour l'étude des catégories Z_2-graduées et ceci plus particulièrement en K-théorie ,comme nous le verrons au paragraphe suivant .

<u>Proposition 3.2.2</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive graduée munie d'une structure de k-module . Alors les catégories graduées $\mathcal{C}_{(4,0)}$ et $\mathcal{C}_{(0,4)}$ sont isomorphes . Si k est un anneau complexe il en est de même des catégories $\mathcal{C}_{(1,0)}$ et $\mathcal{C}_{(0,1)}$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.1.3 .

<u>Corollaire</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive munie d'une structure de k-module . Alors les catégories $\hat{\mathcal{C}}_{p+4,q}$ et $\hat{\mathcal{C}}_{p,q+4}$ sont isomorphes . Si k est un anneau complexe ,il en est de même des catégories $\hat{\mathcal{C}}_{p+1,q}$ et $\hat{\mathcal{C}}_{p,q+1}$.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive pseudo-abélienne munie d'une structure de k-module ,2 étant inversible dans k , on se propose de montrer à présent l'équivalence des catégories graduées $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ et $\hat{\mathcal{C}}_{p+1,q+1}$. Pour cela on va définir deux foncteurs

$$\chi_{p,q} : \hat{\mathcal{C}}_{p,q} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}_{p+1,q+1}$$

$$\chi'_{p,q} : \hat{\mathcal{C}}_{p+1,q+1} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}_{p,q}$$

quasi-inverses l'un de l'autre . Un objet de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ est caractérisé par un triple $\xi=(E\ ,v\ ,\varepsilon)$ où E est un objet de $\mathcal{C}$,où v représente l'action de $v \in k^{p+q} \subset C_{p,q}$ sur E et où ε représente la graduation de E . On a donc

$v^2 = Q(v).1$,Q représentant la forme quadratique canonique de type (q,p) sur k^{p+q} .

$\varepsilon^2 = 1$

$\varepsilon v = -v\varepsilon$

On pose alors $\chi_{p,q}(\xi) = (E+E\ ,v',e_{p+1}, \varepsilon_{p+1}, \varepsilon')$ où

$$v'=\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} \quad e_{p+1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{p+1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

représente l'action d'un vecteur de $k^{p+q+2} = k^{p+q} + k + k$ qui est déterminée quand on connait l'action d'un vecteur $v' \in k^{p+q}$ et des deux vecteurs de base e_{p+1} et $\mathcal{E}_{q+1}$ de k^2 et où $\mathcal{E}' = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & -\mathcal{E} \end{pmatrix}$ représente la graduation de $\chi_{p,q}(\xi)$.

Si f est un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ il est clair que
$\chi_{p,q}(f) = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ est un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}_{p+1,q+1}$.

En sens inverse considérons un objet $\xi' = (F, v', e_{p+1}, \mathcal{E}_{p+1}, \mathcal{E}')$ de $\hat{\mathcal{C}}_{p+1,q+1}$. Alors $\eta = e_{p+1}e_{q+1}$ est un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}$ de degré zéro et on a $\eta^2 = 1$. Soit $F_o = \mathrm{Ker}(\eta - 1)$ et $F_1 = \mathrm{Ker}(\eta + 1)$. Alors on a une décomposition de F en la somme directe $F_o + F_1$ et v' et $\mathcal{E}'$ sont de la forme

$$v' = \begin{pmatrix} v_o & 0 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{E}' = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_o & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix}$$

On pose alors $\chi'_{p,q}(\xi') = (F_o, v_o, \mathcal{E}_o)$. D'autre part si f' est un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}_{p+1,q+1}$, f' se présentera dans les décompositions précédentes sous la forme d'une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} f_o & 0 \\ 0 & f_1 \end{pmatrix}$$

et on posera évidemment $\chi'_{p,q}(f') = f_o$.

<u>Proposition 3.2.3</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive pseudo--abélienne munie d'une structure de k-module ,2 étant inversible dans k . Alors les foncteurs $\chi_{p,q}$ et $\chi'_{p,q}$ précé-

dents sont quasi-inverses l'un de l'autre et définissent une équivalence des catégories graduées $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ et $\hat{\mathcal{C}}_{p+1,q+1}$.

Il est clair qu'on a $\chi'_{p,q} \circ \chi_{p,q} = \mathrm{Id}_{\hat{\mathcal{C}}_{p,q}}$. Démontrons que l'on a aussi $\chi_{p,q} \circ \chi'_{p,q} \simeq \mathrm{Id}_{\hat{\mathcal{C}}_{p+1,q+1}}$.

Mais ,en revenant aux notations précédentes ,e_{p+1} est un automorphisme de $F_o + F_1$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Alors le morphisme de $F_o + F_o$ sur $F_o + F_1$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

induit un isomorphisme de $\chi_{p,q} \circ \chi'_{p,q}$ sur le foncteur identique .

<u>Théorème 3.2.1</u> : Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie pseudo-abélienne où k est un anneau commutatif tel que 2 soit inversible dans k . Alors $\forall\ n \in Z$,les catégories graduées $\hat{\mathcal{C}}_n$ et $\hat{\mathcal{C}}_{n+8}$ sont équivalentes . Si k est un anneau complexe il en est de même des catégories $\hat{\mathcal{C}}_n$ et $\hat{\mathcal{C}}_{n+2}$.

Raisonnons dans le cas général pour fixer les idées et choisissons des entiers positifs p et q assez grands pour que $p - q = n$. On a alors les équivalences successives : $\hat{\mathcal{C}}_n \sim \hat{\mathcal{C}}_{p,q} \sim \hat{\mathcal{C}}_{p+4,q+4} \sim \hat{\mathcal{C}}_{p+8,q} \sim \hat{\mathcal{C}}_{n+8}$.

C.Q.F.D.

<u>Remarque 1</u> : On a le diagramme commutatif (à isomorphisme près) :

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathcal{C}}_{p,q+4} \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\chi_{p,q+4}"] & \hat{\mathcal{C}}_{p+4,q} \arrow[d, "\chi_{p+4,q}"] \\ \hat{\mathcal{C}}_{p+1,q+5} \arrow[r, "\approx"] & \hat{\mathcal{C}}_{p+5,q+1} \end{tikzcd}$$

On en déduit que l'équivalence

$$\beta_n : \hat{\mathcal{C}}_n \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}_{n+8}$$

obtenue ne dépend pas du choix des entiers p et q tels que $p - q = n$ et est fonctorielle vis à vis de la catégorie additive $\mathcal{C}$.

<u>Remarque 2</u> : Pour démontrer le théorème précédent on aurait pu aussi utiliser le théorème 3.1.1 . Nous en laissons le soin au lecteur à titre d'exercice .

On va maintenant définir des"foncteurs de transition " $\omega_{p,q} : \hat{\mathcal{C}}_{p,q} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}^{\,o}_{p+1,q}$ de la manière suivante : Soit E un objet de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ c'est à dire un objet de $\hat{\mathcal{C}}$ muni d'automorphismes e_i , ε_k ,$i = 1 ,\ldots,p$, $k = 1 ,\ldots,q$,de degré un, satisfaisant aux conditions de commutation usuelles . Alors on pose $\omega_{p,q}(E) = E + E$ où $\omega_{p,q}(E)$ est muni de la graduation définie par $(E + E)_o = E + 0$,$(E + E)_1 = 0 + E$ et des automorphismes

$$e'_i = \begin{pmatrix} 0 & e_i \\ e_i & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon'_k = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_k \\ \varepsilon_k & 0 \end{pmatrix} \quad e'_{p+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(On a ainsi "oublié" la graduation initiale de E)

Si $f : E \longrightarrow F$ est un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$,il est clair que

$$\omega_{p,q}(f) = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

est un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}_{p+1,q}$ de degré zéro . Ceci achève la détermination des foncteurs $\omega_{p,q}$.

Il est particulièrement intéressant d'expliciter l'ensemble des morphismes de $\omega_{p,q}(E_1) = E_1 + E_1$ dans $\omega_{p,q}(E_2) = E_2 + E_2$. Un élément de cet ensemble est représenté par une matrice

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

où $t = x$,$z = -y$ et où x (resp. y) est un morphisme (resp. un antimorphisme i.e. anticommutant avec les générateurs de l'algèbre de Clifford $C_{p,q}$) de $C_{p,q}$-modules. Soit ε_i l'antiautomorphisme de carré un représentant la graduation de E_i et posons

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_i \\ \varepsilon_i & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $J_i^2 = -1$ et tout morphisme de $\omega_{p,q}(E_1)$ dans $\omega_{p,q}(E_2)$ s'écrit de manière unique $a + bJ_1 = a + J_2\bar{b}$ où a et b représentent des morphismes de $C_{p,q}$-modules de E_1 dans E_2 et où $\bar{\ }$ désigne l'involution définie par $\bar{b} = (-1)^n b$ si b est un morphisme homogène de degré n .

On peut aussi définir des foncteurs de transition

$$\omega'_{p,q+1} : \hat{\mathcal{C}}_{p,q+1} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}^{\circ}_{p,q}$$

comme le composé des foncteurs :

$$\hat{\mathcal{C}}_{p,q+1} \xrightarrow{\omega_{p,q+1}} \hat{\mathcal{C}}_{p+1,q+1} \xrightarrow{\chi'_{p+1,q+1}} \hat{\mathcal{C}}_{p,q}$$

En particulier si on pose $\omega_n = \omega_{n,0}$ pour $n \geqslant 0$ et $\omega_n = \omega'_{0,-n}$ pour $n \leqslant 0$, on obtient une suite :

$$\cdots \hat{\mathcal{C}}_{-n} - \cdots \rightarrow \hat{\mathcal{C}}_{-1} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}_0 \rightarrow \hat{\mathcal{C}}_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \hat{\mathcal{C}}_n \rightarrow \cdots$$

Cette suite est appelée la <u>résolution canonique</u> de la catégorie $\mathcal{C}$.

<u>Proposition 3.2.3</u> : Les diagrammes suivants sont commutatifs à isomorphisme près :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{C}}_{p,q} & \xrightarrow{\chi_{p,q}} & \hat{\mathcal{C}}_{p+1,q+1} \\ {\scriptstyle \omega_{p,q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_{p+1,q+1}} \\ \hat{\mathcal{C}}_{p+1,q} & \xrightarrow{\chi_{p+1,q}} & \hat{\mathcal{C}}_{p+2,q+1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{C}}_{p,q+1} & \xrightarrow{\chi_{p,q+1}} & \hat{\mathcal{C}}_{p+1,q+2} \\ \downarrow{\scriptstyle \omega'_{p,q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \omega'_{p+1,q+2}} \\ \hat{\mathcal{C}}_{p,q} & \xrightarrow{\chi_{p,q}} & {}_{p+1,q+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (\hat{\mathcal{C}}_{p,q})_4 & \xrightarrow{\approx} & (\hat{\mathcal{C}}_{p,q})_{-4} \\ \downarrow{\scriptstyle \omega_{p+4,q}} & & \downarrow{\scriptstyle \omega_{p,q+4}} \\ (\hat{\mathcal{C}}_{p+1,q})_4 & \longrightarrow & (\hat{\mathcal{C}}_{p+1,q})_{-4} \end{array}$$

<u>Démonstration</u> : Exercice

Corollaire : Les diagrammes suivants sont commutatifs à isomorphisme près :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathscr{C}}_n & \xrightarrow{\beta_n} & \hat{\mathscr{C}}_{n+8} \\ {\scriptstyle \omega_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_{n+8}} \\ \hat{\mathscr{C}}_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & \hat{\mathscr{C}}_{n+9} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} n & \text{———} & n+2 \\ & & \\ n+1 & \text{———} & n+3 \end{array}$$

(k complexe)

Si $\mathscr{C}$ est une catégorie additive désignons par $\mathscr{C}_{p,q}$ la catégorie additive formée des objets de $\mathscr{C}$ où l'algèbre de Clifford non graduée $C_{p,q}$ opère . Considérons le foncteur $\mathcal{U}_{p,q} : \mathscr{C}_{p,q} \longrightarrow \hat{\mathscr{C}}^{o}_{p+1,q}$ qu'on définit de la manière suivante : Si E est un objet de $\mathscr{C}$ muni d'automorphismes e_i , ε_k , $i = 1 ,\ldots,p$, $k = 1 ,\ldots,q$ satisfaisant aux conditions de commutativité usuelles, alors on pose $\mathcal{U}_{(p)}(E) = (E+E)$ muni des automorphismes

$$e_i' = \begin{pmatrix} 0 & e_i \\ e_i & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{p+1}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_k' = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_k \\ \varepsilon_k & 0 \end{pmatrix}$$

Si $f : E \longrightarrow E'$ est un morphisme de $\mathscr{C}_{p,q}$,il est clair que le morphisme $\mathcal{U}_{p,q}(f) = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ est un morphisme de $C_{p+1,q}$-modules gradués de degré zéro .

Proposition 3.2.5 : Le foncteur $\mathcal{U}_{p,q}$ est une équivalence de catégories . Soit $\sigma_{p,q} : \hat{\mathscr{C}}_{p,q} \longrightarrow \mathscr{C}_{p,q}$ le foncteur qui ,à un module gradué ,associe le module sans graduation sous-jacent . Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathcal{C}}_{p,q} \arrow[rr, "\omega_{p,q}"] \arrow[dr, "\sigma_{p,q}"'] & & \hat{\mathcal{C}}^{\circ}_{p+1,q} \\ & \mathcal{C}_{p,q} \arrow[ur, "u_{p,q}"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif . Si 2 est inversible dans k ,le foncteur $\sigma_{p,q}$ est un T-foncteur pleinement fidèle .

<u>Corollaire</u> : Le foncteur $\omega_{p,q}$ est un T-foncteur .

<u>Démonstration de la proposition</u> :

a) Commutativité du diagramme : évidente à partir des définitions .

b) Equivalence des catégories $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ et $\hat{\mathcal{C}}^{\circ}_{p+1,q}$

Il est clair que $u_{p,q}$ est pleinement fidèle .
Soit donc $F = F_o + F_1$ un $C_{p+1,q}$-module gradué muni d'automorphismes e_i ,ε_j ,$i = 1 ,\ldots,p+1$;$j = 1 ,\ldots,q$.
Munissons l'objet $E = F_o$ des automorphismes $e_i e_{p+1}$, $\varepsilon_j e_{p+1}$ et posons

$$e_{p+1} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

dans $\mathrm{Aut}(F_o + F_1)$. Alors l'isomorphisme

$$v : E + E \longrightarrow F_o + F_1$$

défini par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ induit un isomorphisme de $u_{p,q}(E)$ sur F de degré zéro .

c) Propriétés de $\sigma_{p,q}$

Il est clair que $\sigma_{p,q}$ est pleinement fidèle .
Vérifions que $\sigma_{p,q}$ est un T-foncteur si 2 est inversible

dans k . Soit donc E un objet de $\mathcal{C}_{p,q}$ et soient e_i , ε_j , $i = 1 ,\dots, p$; $\varepsilon_j = 1 ,\dots, q$ les automorphismes canoniques de E . Soit $\bar{E}$ l'objet "conjugué" de E , i.e. l'objet obtenu à partir de E en faisant opérer $C_{p,q}$ via son involution canonique . Soit $\alpha : E \longrightarrow \bar{E}$ l'antiisomorphisme égal à l'identité sur les objets de $\mathcal{C}$ sous-jacents . Alors le $\mathcal{C}$-morphisme $\eta : E + E \longrightarrow E + \bar{E}$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $C_{p,q}$-modules , son inverse étant défini par la matrice

$$1/2 \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

3.3 Les foncteurs K^n et $\hat{K}^n$.

Les généralités du paragraphe précédent s'appliquent en particulier aux catégories de Banach sur k (k = R ou C) . Par exemple on définit sans peine la notion de catégorie de Banach graduée . Ainsi si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach graduée ,les catégories $\mathcal{C}_{p,q}$ sont évidemment des catégories de Banach graduées . De même les foncteurs $\chi_{p,q}$,$\omega_{p,q}$,$\overline{\omega}_{p,q}$,$\theta_{p,q}$, définis au paragraphe précédent, sont linéaires continus .

On se propose à présent d'attacher à toute catégorie de Banach graduée $\mathcal{C}$ un groupe abélien $\hat{K}(\mathcal{C})$ isomorphe au groupe de Grothendieck de $\mathcal{C}'$ si $\mathcal{C} = \hat{\mathcal{C}}'$. Considérons donc la catégorie de Banach $\mathcal{C}^o$ dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{C}$ de degré zéro . Désignons par $\mathcal{C}$,par abus de langage ,la catégorie prébanachique sous jacente à la catégorie graduée $\mathcal{C}$. Alors $\mathcal{C}^o$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ et le foncteur d'inclusion :

$$\sigma : \mathcal{C}^o \longrightarrow \mathcal{C}$$

est linéaire continu et essentiellement surjectif . C'est donc à fortiori un T-foncteur mais non un S-foncteur en général .

<u>Définition 3.3.1</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach graduée . Alors ,avec les notations précédentes , on désigne par $\hat{K}(\mathcal{C})$ le groupe K du foncteur linéaire continu :

$$\sigma : \mathcal{C}^o \longrightarrow \mathcal{C}$$

En raison de l'importance de cette définition, il est bon de rappeler la construction du groupe abélien $K(\sigma)$. compte tenu que σ est un T-foncteur.

On considère la catégorie $\hat{\Gamma}(\mathcal{C})$ dont les objets sont les triples (E,F,α) où E et F sont deux objets de $\mathcal{C}$ et où $\alpha : E \longrightarrow F$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme et dont les morphismes de source (E,F,α) et de but (E',F',α') sont les couples (f,g) de $\mathcal{C}$-morphismes de degré zéro,

$f : E \longrightarrow E'$, $g : F \longrightarrow F'$ tels que $\alpha'.f = g.\alpha$

Un triple (E,F,α) est dit élémentaire si α est de degré zéro. Deux triples (E_o, F_o, α_o) et (E_1, F_1, α_1) sont dits homotopes s'il existe un triple de $\hat{\Gamma}(\mathcal{C}[0,1])$ dont les restrictions à $\hat{\Gamma}(\mathcal{C}\{0\}) \approx \hat{\Gamma}(\mathcal{C})$ et à $\hat{\Gamma}(\mathcal{C}\{1\}) \approx \hat{\Gamma}(\mathcal{C})$ soient les deux triples donnés : En d'autres termes il existe deux isomorphismes $f : E_o \longrightarrow E_1$ et $g : F_o \longrightarrow F_1$ de degré zéro tels que α_o et $g^{-1}\alpha_1 f$ soient homotopes dans $\mathrm{Iso}(E_o, F_o)$. D'autre part la catégorie $\hat{\Gamma}(\mathcal{C})$ est une catégorie additive, la somme de deux objets (E_o, F_o, α_o) et (E_1, F_1, α_1) étant notamment l'objet $(E_o + E_1, F_o + F_1, \alpha_o + \alpha_1)$. Considérons maintenant dans $\mathrm{Ob}\,\hat{\Gamma}(\mathcal{C})$ la relation d'équivalence $\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow \exists\, \tau$ et τ' élémentaires tels que $\sigma + \tau$ soit homotope à $\sigma' + \tau'$.

Alors l'ensemble quotient $\mathrm{Ob}\,\hat{\Gamma}(\mathcal{C})/\sim$, muni de la loi de composition définie par la somme des objets, est un groupe abélien : C'est par définition le groupe $\hat{K}(\mathcal{C})$.

Considérons maintenant une catégorie de Banach $\mathcal{C}$ et soit $\hat{\mathcal{C}}$ la catégorie de Banach graduée associée. A tout objet E de $\mathcal{C}$ associons dans $\hat{K}(\mathcal{C})$ la classe $g(E)$ $= d((E,0),(0,E),u)$ du triple $((E,0),(0,E),u)$ où $u = \begin{pmatrix} 0 & Id_0 \\ Id_E & 0 \end{pmatrix}$. On a $g(E+F) = g(E) + g(F)$ et g définit par conséquent un homomorphisme, noté encore g, de $K(\mathcal{C})$ dans $\hat{K}(\hat{\mathcal{C}})$. Explicitement on a $g(E-F) = d((E,F),(F,E),u)$ où $u = \begin{pmatrix} 0 & Id_F \\ Id_E & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Théorème 3.3.1</u> : L'homomorphisme g de $K(\mathcal{C})$ dans $\hat{K}(\hat{\mathcal{C}})$ défini précédemment est un isomorphisme.

On va construire un inverse g' de g. Posons : $g'(x) = E_o - F_o$ pour $x = d((E_o,E_1),(F_o,F_1),\alpha)$. Alors il est évident que $g'.g = Id_{K(\mathcal{C})}$. D'autre part on a :

$(gg')(d((E_o,E_1),(F_o,F_1),\alpha)) = d((E_o,F_o),(F_o,E_o),u)$

où $u = \begin{pmatrix} 0 & Id_{F_o} \\ Id_{E_o} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{oo} & \alpha_{o1} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} : E_o + E_1 \longrightarrow F_o + F_1$ la matrice représentant α . Alors $x = d(E_o+(E_1+E_o),F_o+(F_1+E_o),\alpha')$

avec $\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice α' est isotope à la matrice

$$\alpha'' = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{01} & \alpha_{00} \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{10} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

par la rotation : $\begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \theta \in [0, \pi/2]$

En utilisant l'isomorphisme $\beta \ : E_1 + E_0 \longrightarrow F_0 + F_1$

ainsi que l'isomorphisme $\beta' : F_1 + E_0 \longrightarrow E_0 + F_1$

définis respectivement par les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_{01} & \alpha_{00} \\ \alpha_{11} & \alpha_{10} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on trouve finalement $x = d((E_o+(F_o+F_1),F_o+(E_o+F_1), \delta)$

avec $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $x = (\gamma'\gamma)(x)$.

C.Q.F.D.

Soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur linéaire continu gradué . On dit que φ est un ST-foncteur si le foncteur déduit de φ par passage aux catégories topologiques sous jacentes est un S-foncteur et si $\varphi^{\circ} : \mathcal{C}^{\circ} \longrightarrow \mathcal{C}'^{\circ}$ est un T-foncteur . Dans ce cas on désigne par $\widehat{K}(\varphi)$ le groupe K de la grille

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\circ} & \xrightarrow{\varphi^{\circ}} & \mathcal{C}'^{\circ} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C}' \end{array}$$

Si $\mathcal{C}'$ est la catégorie nule on retrouve évidemment la définition du groupe $\widehat{K}(\mathcal{C})$.

Pour la commodité du lecteur ,nous allons rappeler la définition du groupe K de cette grille dans ce contexte . On considère la sous-catégorie pleine $\widehat{\Gamma}(\varphi)$ de $\widehat{\Gamma}(\mathcal{C})$ formée des triples (E ,F ,α) où $\alpha : \varphi E \longrightarrow \varphi F$ est de degré zéro . Un triple élémentaire de $\widehat{\Gamma}(\varphi)$ est un triple élémentaire de $\widehat{\Gamma}(\mathcal{C})$ et deux triples $\sigma_0 = (E_0 ,F_0 ,\alpha_0)$ et $\sigma_1 = (E_1 ,F_1 ,\alpha_1)$ de $\widehat{\Gamma}(\varphi)$ sont dits homotopes s'il existe un triple (E,F,α) de $\underline{\widehat{\Gamma}(\varphi[0,1])}$ dont les restrictions à $\{0\}$ et $\{1\}$ soient les triples σ_0 et σ_1 donnés . L'ensemble quotient de $\mathrm{Ob}\,\widehat{\Gamma}(\varphi)$ par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition d'objets élémentaires ,muni de la loi de composition induite par la somme des objets, est un groupe abélien : C'est par définition le groupe $\widehat{K}(\varphi)$. Bien que $\mathrm{Ob}\,\widehat{\Gamma}(\varphi)$ soit un sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\,\widehat{\Gamma}(\mathcal{C})$,$\widehat{K}(\varphi)$ n'est pas un sous-groupe de $\widehat{K}(\mathcal{C})$ en général .

En particulier , $\mathcal{C}$ étant une catégorie de Banach graduées on note $\widehat{K}_n(\mathcal{C})$ le groupe $\widehat{K}$ du foncteur

$$\mathcal{C}(D^n) \longrightarrow \mathcal{C}(S^{n-1}) \qquad (n \geqslant 0)$$

Plus généralement on désigne par $\hat{K}(X, Y; \mathcal{C})$ le groupe $\hat{K}$ du foncteur $\mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y) \qquad (Y \subset X)$

Considérons maintenant deux catégories de Banach $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un ST-foncteur linéaire continu . Alors $\hat{\varphi} : \hat{\mathcal{C}} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}'$ est un ST-foncteur linéaire continu gradué . On se propose de comparer les groupes $K(\varphi)$ et $\hat{K}(\hat{\varphi})$.

Soit $x = d(E_o + E_1, F_o + F_1, \alpha)$ un élément quelconque de $\hat{K}(\hat{\varphi})$. Alors $\alpha : E_o + E_1 \longrightarrow F_o + F_1$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme tel que $\varphi\alpha = \begin{pmatrix} \varphi_o\alpha & 0 \\ 0 & \varphi_1\alpha \end{pmatrix}$ soit de degré zéro . Posons $g'(x) = d(E_o, F_o, \varphi_o\alpha)$.

<u>Proposition 3.3.1</u> : L'application g' de $\hat{K}(\hat{\varphi})$ dans $K(\varphi)$ définie ci-dessus est un isomorphisme de groupes .

Commençons par démontrer la proposition dans un cas particulier : celui où φ est le foncteur restriction

$$\varphi_{X,Y} : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$$

associé à une catégorie de Banach graduée $\mathcal{C}$ à un espace compact X et un sous-espace fermé Y . Dans ce cas on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{K}(\varphi_{X,Y}) & \xrightarrow{g'_{X,Y}} & K(\varphi_{X,Y}) \\ \uparrow \approx & & \uparrow \approx \\ \hat{K}(\varphi_{X/Y,\{y\}}) & \xrightarrow{g'_{X/Y,\{y\}}} & K(\varphi_{X/Y,y}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes en raison du théorème d'excision. Il suffit donc de démontrer l'assertion quand Y se réduit à un point y, ce qui est clair (considérer le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{K}(\hat{\varphi}_{X/Y,y}) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{K}(\hat{\varphi}_{X/Y,y}) \arrow[r] \arrow[d, "g'_{X/Y}", "\approx"'] & \hat{K}(\hat{\varphi}_y) \arrow[r] \arrow[d, "g'_y", "\approx"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K(\varphi_{X/Y,y}) \arrow[r] & K(\varphi_{X/Y}) \arrow[r] & K(\varphi_y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

)

Revenons maintenant au cas général et considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
K_1(\mathscr{C}) \arrow[r] & K_1(\mathscr{C}') \arrow[r, "\partial"] & K(\varphi) \arrow[r] & K(\mathscr{C}) \arrow[r] & K(\mathscr{C}') \\
\hat{K}_1(\hat{\mathscr{C}}) \arrow[r] \arrow[u, "g'", "\approx"'] & \hat{K}_1(\hat{\mathscr{C}}') \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, "g'", "\approx"'] & \hat{K}(\hat{\varphi}) \arrow[r] \arrow[u, "g'"] & \hat{K}(\mathscr{C}) \arrow[r] \arrow[u, "g'", "\approx"'] & \hat{K}(\mathscr{C}') \arrow[u, "g'", "\approx"']
\end{tikzcd}$$

Tous les carrés de ce diagramme sont évidemment commutatifs sauf peut-être le carré :

$$\begin{tikzcd}
K_1(\mathscr{C}') \arrow[r, "\partial"] & K(\varphi) \\
\hat{K}_1(\hat{\mathscr{C}}') \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, "g'"] & \hat{K}(\hat{\varphi}) \arrow[u, "g'"']
\end{tikzcd}$$

Considérons un élément $d(\bar{\varphi}\bar{E}, \bar{\varphi}\bar{E}, \alpha(t))$, $t \in D^1$, de $\hat{K}_1(\hat{\mathscr{C}}')$ $= \hat{K}(D^1, S^0; \hat{\mathscr{C}}')$. Alors $\alpha(t)$ est un isomorphisme de $\bar{E}$ sur $\bar{E}$ tel que $\alpha|_0 = \mathrm{Id}$ et $\alpha|_1$ soit de degré zéro. Soit $\beta(t) : E \longrightarrow E$ un isomorphisme tel que $\beta(0) = \mathrm{Id}$ et $\varphi(\beta(t)) = \alpha(t)$: Un tel relèvement existe toujours, φ étant un S-foncteur. Alors on a =

$$(g'\partial)(d(\bar{\varphi}E, \bar{\varphi}F, \alpha(t))) = d(E_0, F_0, \varphi_0(\beta(1))) = d(E_0, E_0, \alpha(1)_0)$$
$$(\partial g')(d(\bar{\varphi}E, \bar{\varphi}E, \alpha(t))) = \partial(d(E_0, E_0, \alpha(t)_0)) = d(E_0, E_0, \alpha(1)_0).$$

D'autre part les deux isomorphismes de gauche sont des isomorphismes en raison du théorème 3.3.1 et il en est de même des deux morphismes de gauche d'après ce qui précède (où on fait $X = D^1$, $Y = S^0$) . La proposition 3.3.1 résulte alors du lemme des cinq .

Remarque 1 : La proposition 3.3.1 contient en fait comme cas particulier le théorème 3.3.1 : Faire $\mathcal{C}' = 0$

Remarque 2 : Nous allons construire effectivement un homomorphisme $g : K(\varphi) \longrightarrow \hat{K}(\hat{\varphi})$ inverse de g' .
Considérons un élément $y = d(E, F, \beta)$ de $K(\varphi)$ et le morphisme $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta^{-1} \end{pmatrix} : E + F \longrightarrow F + E$. C

Soit $h_\theta = \begin{pmatrix} \beta\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\beta^{-1}\cos\theta \end{pmatrix}_{\theta\in[0\ ,\ \pi/2]}$ une isotopie

de $h = h_0$. Comme φ est un S-foncteur il existe un $\mathcal{C}$-isomorphisme $k_\theta : E + F \longrightarrow F + E$ tel que $k_{\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

et $\varphi(k_\theta) = h_\theta$. Alors on pose $g\,(d(E,F,\alpha)) = d((E,F),(F,E),k_0)$
On vérifie aussitôt que $g'.g = \mathrm{Id}_{K(\varphi)}$. Comme g' est un isomorphisme on a aussi évidemment $g.g' = \mathrm{Id}_{\hat{K}(\hat{\varphi})}$.

Définition 3.3.2 : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach graduée et soit (p,q) un couple d'entiers positifs ou nuls . Alors on désigne par $\hat{K}^{p,q}(\mathcal{C})$ le groupe K de la catégorie graduée $\mathcal{C}_{p,q}$. En particulier si n est un entier positif ou nul on désigne par $\hat{K}^n(\mathcal{C})$ (resp. $\hat{K}^{-n}(\mathcal{C})$) le groupe $\hat{K}^{n,0}(\mathcal{C})$ (resp. $\hat{K}^{0,n}(\mathcal{C})$) . Si $\mathcal{C} = \hat{\mathcal{C}}'$ est la catégorie graduée associée à une catégorie de Banach ,on désigne par $K^{p,q}(\mathcal{C}')$ le groupe $\hat{K}^{p,q}(\hat{\mathcal{C}}')$. En particulier on écrit $K^n(\mathcal{C}')=K^{n0}(\mathcal{C}')$, $K^{-n}(\mathcal{C}') = K^{0,n}(\mathcal{C}')$ si $n \geqslant 0$.

D'après ce qui précède le groupe $K^o(\mathcal{C}')$ est isomorphe naturellement au groupe de Grothendieck de $\mathcal{C}'$. Un des buts de ce chapitre est de montrer que ces foncteurs K^n coïncident avec les foncteurs K^n d'Atiyah et Hirzebruch quand $\mathcal{C}'$ est la catégorie des fibrés vectoriels de dimension finie et de base compacte X .

D'autre part ces définitions se généralisent immédiatement aux foncteurs linéaires continus . Par exemple si $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur linéaire continu gradué , on désigne par $\hat{K}^{p,q}(\varphi)$ le groupe $\hat{K}$ du foncteur $\varphi_{p,q} : \mathcal{C}_{p,q} \longrightarrow \mathcal{D}_{p,q}$. Le lecteur définira lui-même aisément $\hat{K}^n(\varphi)$,$K^{p,q}(\psi)$ et $K^n(\psi)$ pour $\psi : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{D}'$ ST-foncteur linéaire continu . D'ailleurs ,par souci de simplicité , nous allons seulement étudier les groupes K^n et $\hat{K}^n$ de catégories de Banach en laissant au lecteur le soin de généraliser cette étude aux groupes K^n et $\hat{K}^n$ de foncteurs linéaires continus .

D'après le paragraphe précédent ,les groupes $K^{p,q}(\mathcal{C})$ jouissent des propriétés suivantes :

- $K^{p,q}(\mathcal{C}) \approx K^{p+1,q+1}(\mathcal{C})$
- $K^n(\mathcal{C}) \approx K^{n+8}(\mathcal{C})$ (resp. $K^n(\mathcal{C}) \approx K^{n+2}(\mathcal{C})$) si la catégorie de Banach $\mathcal{C}$ est réelle (resp. complexe) .

Pour déterminer entièrement (à isomorphisme près) les groupes $K^{p,q}(\mathcal{C})$,il nous suffit donc d'exprimer peut être

de manière plus simple les groupes $K^n(\mathcal{C})$, $-1 \leqslant n \leqslant +6$.
Nous aurons besoin pour cela de deux propositions d'ordre général qui ont d'ailleurs leur intéret propre .

<u>Proposition :3.3.2</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive pseudo-abélienne . Désignons par $\mathcal{C}(n)$ la catégorie formée des objets de $\mathcal{C}$ où l'algèbre Z(n) opère . Alors les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}(n)$ sont équivalentes .

Soit $u : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}(n)$ le foncteur additif suivant : On pose $u(E) = (E^n, \rho)$ où ρ définit l'action naturelle de Z(n) sur E^n ,E étant un objet de $\mathcal{C}$. De même si $\alpha : E \longrightarrow F$ est un morphisme de $\mathcal{C}$ on pose
$u(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}$. Alors il est évident que u est fidèle . il est presque aussi évident qu'il est pleinement fidèle . En effet si $\beta = (\beta_{ij}) : E^n \longrightarrow F^n$ est un morphisme de $\mathcal{C}(n)$ et si (a_{ij}) est un élément quelconque de Z(n) les matrice (β_{ij}) et (a_{ij}) doivent commuter . Ceci implique évidemment que (β_{ij}) est une matrice diagonale du type $u(\alpha)$.

Soit maintenant (F,ρ) un objet de $\mathcal{C}(n)$. Par restriction des scalaires ρ va définir une action de l'algèbre somme Z + ... + Z sur E : On fait simplement opérer les matrices diagonales sur F . Notons F_i l'image du projecteur p_i de F défini par $p_i = \rho[(0 , \ldots ,1 ,\ldots,0)]$.
Alors ,dans $\mathcal{C}$,F s'identifie à $F_1 + \ldots + F_n$, et Z^n opérant dans F par la formule

$$(\lambda_1 ,\ldots ,\lambda_n)(x_1 ,\ldots ,x_n) = (\lambda_1 x_1 ,\ldots ,\lambda_n x_n)$$

(avec l'abus de langage habituel) .

Soit maintenant g_{1i} l'automorphisme de F défini par

$$g_{1i} = \rho\left[\begin{array}{c} \overset{i}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & & \\ & 1 & \vdots & 0 & \\ 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

Alors $g_{1i} p_1 g_{1i}^{-1} = p_i$. Par conséquent ,dans $\mathcal{C}$, F_i est isomorphe à F_1 . A l'aide de cet isomorphisme on voit que (F,ρ) est isomorphe à (F_1^n, ρ') où ρ' est une représentation de Z(n) dans $F_1 + \dots + F_1$ qui coïncide avec l'action naturelle sur les matrices diagonales et sur les matrices de la forme :

$$\begin{array}{c} \overset{i}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & \cdots & 0 & & \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

La proposition résulte alors du fait que ces matrices engendrent Z(n) comme Z-algèbre .

C.Q.F.D.

Pour $n > 0$,on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{0}_{n,0} \arrow[rr, "\sigma"] & & \mathcal{C}_{n,0} \\ & \mathcal{C}_{n-1,0} \arrow[ul, "\approx"', "\bar{\omega}_{n-1}"] \arrow[ur, "c_{n-1} = \sigma\bar{\omega}_{n-1}"'] & \end{tikzcd}$$

qui montre que le groupe K^n d'une catégorie de Banach est naturellement isomorphe au groupe $K(\mathcal{C}_{n-1})$. On le notera simplement $K(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{C}_n)$.

D'autre part,pour $n \leqslant 0$, on a aussi un diagramme commutatif à isomorphisme prés :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{o}_{o,n} \arrow[rr, "\sigma"] & & \mathcal{C}_{o,n} \\
& \mathcal{C}_{o,n+1} \arrow[ul, "\omega'_{n-1}"] \arrow[ur, "c'_{n+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

où c'_{n+1} est le foncteur restriction des scalaires . En posant $\mathcal{C}'_n = \mathcal{C}_{-n}$,on voit ainsi que le foncteur $K^{-n}(\mathcal{C})$ est isomorphe naturellement au foncteur $K(c'_{n+1})$ qu'on notera simplement $K(\mathcal{C}'_{n+1}, \mathcal{C}'_n)$. En conclusion :

<u>Proposition 3.3.3</u> : Pour $n > 0$,le foncteur $K^n(\mathcal{C})$ est isomorphe au foncteur $K(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{C}_n)$ associé au foncteur "extension des scalaires" $\mathcal{C}_{n-1} \longrightarrow \mathcal{C}_n$. Pour $n \leqslant 0$,le groupe $K^{-n}(\mathcal{C})$ est isomorphe au groupe $K(\mathcal{C}'_{n+1}, \mathcal{C}'_n)$ associé au foncteur "restriction des scalaires "
$\mathcal{C}_{-n-1} \longrightarrow \mathcal{C}_{-n}$.

<u>Calcul des groupes K^n</u>

Un examen de la table des algèbres de Clifford ou un raisonnement général montre que $K^n(\mathcal{C}) \approx K^{n+4}(\mathcal{C}_H)$. Il suffit donc de calculer K^{-1} ,K^0 ,K^1 et K^2 . Les autres K^n s'obtiennent en remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}_H$ et en appliquant la a périodicité .

<u>Le groupe K^{-1}</u> : On a $K^{-1}(\mathcal{C}) \approx K(\mathcal{C}'_2, \mathcal{C}'_1) \approx K(\mathcal{C}(2), \mathcal{C} \times \mathcal{C})$. Compte tenu de l'équivalence $\mathcal{C}(2) \sim \mathcal{C}$,voici une description plus simple du groupe K^{-1} : On considère la catégorie $\Gamma^{-1}(\mathcal{C})$ formée des couples (E,α) où E est un objet de $\mathcal{C}$ et où α est un $\mathcal{C}$-automorphisme de E . Les morphismes de $\Gamma^{-1}(\mathcal{C})$ de source (E,α) et de but (E',α') sont les $\mathcal{C}$-morphismes $f : E \longrightarrow E'$ tels que $\alpha' f = f\alpha$. Un objet (E,α) est dit élémentaire si $\alpha = \mathrm{Id}$. Deux objets

(E_o, α_o) et (E_1, α_1) sont dits homotopes s'il existe un objet (E, α) de $\Gamma^{-1}(\mathcal{C}[0,1])$ tel que $(E, \alpha)|_{\{0\}} = (E_o, \alpha_o)$ et $(E, \alpha)|_{\{1\}} = (E_1, \alpha_1)$. Le groupe $K^{-1}(\mathcal{C})$ est alors isomorphe au quotient de $\mathrm{Ob}\,\Gamma^{-1}(\mathcal{C})$ par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition d'objets élémentaires (la somme de deux objets (E_o, α_o) et (E_1, α_1) étant l'objet $(E_o + E_1, \alpha_o + \alpha_1)$).

Il est facile de montrer que $K^{-1}(\mathcal{C}) \approx K_1(\mathcal{C})$. En fait, dans les paragraphes suivants, on montrera que $K^{-n}(\mathcal{C}) \approx K_n(\mathcal{C})$.

Le groupe K^1 : C'est le groupe $K(\mathcal{C}_o, \mathcal{C}_1)$: On considère la catégorie $\Gamma^1(\mathcal{C})$ formée des triples (E, F, α) où $E, F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ et où $\alpha : E_1 \longrightarrow F_1$ est un isomorphisme de leurs complexifiés. On a alors $K^1(\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}\,\Gamma^1(\mathcal{C})/\sim$, $\sim$ représentant la relation d'équivalence usuelle.

Le groupe K^2 : C'est le groupe $K(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \approx K(\mathcal{C}_C, \mathcal{C}_H)$: On s'intéresse à la catégorie formée des triples (E, F, α) où $E, F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_C$ et où $\alpha : E_2 \longrightarrow F_2$ est un isomorphisme entre leurs "quaternionisés" /.

Le groupe K^3 : $K^{-1}(\mathcal{C}_H) \approx K_1(\mathcal{C}_H)$

Le groupe K^4 : $K(\mathcal{C}_H)$

Le groupe K^5 : C'est le groupe $K(\mathcal{C}_H, \mathcal{C}_C)$ i.e le groupe K associé au foncteur restriction des scalaires de $\mathcal{C}_H$ dans $\mathcal{C}_C$.

Le groupe K^6 : C'est le groupe $K(\mathcal{C}_C, \mathcal{C})$ i.e. le groupe K associé au foncteur restriction des scalaires de $\mathcal{C}_C$ dans $\mathcal{C}$.

<u>Remarque 1</u> : Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach complexe, alors seuls évidemment les calculs de K^0 et de K^{-1} sont intéressants en raison de la périodicité deux.

<u>Remarque 2</u> : Les calculs précédents montrent que $K^0(\mathcal{C})$ et $K^4(\mathcal{C})$ ne dépendent pas de la topologie de $\mathcal{C}$.

<u>Exercice 1</u> : Si A est une algèbre de Banach désignons par $K^n(A)$ le groupe $K^n(\mathcal{P}(A))$. Alors démontrer que

$$K^1(C_{p,q}) = K^5(C_{p,q}) = 0$$

<u>Exercice 2</u> : Soit H un espace de Hilbert séparable et soit A l'algèbre de Banach End H, démontrer que

$$K^n(A) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

<u>Exercice 3</u> : Soit G un groupe de Lie compact et désignons par $R^n(G)$ les groupes K^n de la catégorie des représentations de dimension finie de G, démontrer que :

$$R^1(G) = R^5(G) = 0$$

3.4 Le théorème fondamental

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach et soit $d(E, F, \alpha)$ un élément quelconque de $K^{p,q}(\mathcal{C}) = \hat{K}^{p,q}(\hat{\mathcal{C}})$. Posons $E_1 = E + E^* = \omega_{p,q}(E)$ et $F_1 = F + F^* = \omega_{p,q}(F)$. D'après la remarque qui conclut le § 3.2 ,un morphisme de $C_{p+1,q}$-modules de E_1 dans F_1 s'écrit de manière unique $+ J$, x et y $\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{p,q}}(E, F)$. Considérons le demi-cercle $D^1 = \{ e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq /2$ et posons $x = \cos\theta/2$,$y = \sin\theta/2$,$v = x + yJ$. Alors $v \alpha v^{-1}$ est un morphisme de $\pi^* E_1$ dans $\pi^* F_1$, $\pi : D^1 \longrightarrow \text{Point}$.

<u>Théorème fondamental 3.4.1</u> : L'homomorphisme

$$w : K^{p,q}(\mathcal{C}) \longrightarrow K_1^{p+1,q}(\mathcal{C}) ,$$

défini par $w(d(E, F, \alpha)) = d(\pi^* E_1, \pi^* F_1, v \alpha v^{-1})$, est un isomorphisme .

La démonstration dd ce théorème est assez technique et nous occupera presque tout le paragraphe . Elle repose essentiellement sur la démonstration élémentaire des théorèmes de périodicité de Bott due à Atiyah ,Bott et Wood . En fait,les théorèmes de périodicité de Bott ,sous leur version "K-théorie",seront conséquence de notre théorème fondamental ,comme nous le verrons au paragraphe suivant .

La démonstration va se faire par réductions successives : On va factoriser w en cinq isomorphismes (!)

$$K^{p,q}(\mathcal{C}) \to K'^{p,q}(\mathcal{C}) \to K''^{p,q}(\mathcal{C}) \to {}^{Q}K_1^{p+1,q}(\mathcal{C}) \to {}^{P}K_1^{p+1,q}(\mathcal{C}) \to K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$$

cequi va nécessiter un certain nombre de définitions et de lemmes auxiliaires .

Considérons la catégorie additive $\Gamma^{,p,q}(\mathcal{C})$ formée des triples $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ où E est un objet de $\mathcal{C}_{p,q}$ et où ε^1 et ε^2 sont deux graduations sur E (i.e. deux antiautomorphismes de E de carré 1) ; un morphisme de $\Gamma^{,p,q}(\ \ )$ de source $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ et de but (F, η^1, η^2) est un $\mathcal{C}_{p,q}$-morphisme $f : E \longrightarrow F$ tel que

$$f \varepsilon^i = \eta^i f \qquad\qquad i = 1, 2$$

La somme de deux triples $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ et (F, η^1, η^2) est en particulier le triple $(E + F, \varepsilon^1 + \eta^1, \varepsilon^2 + \eta^2)$. UN triple $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^1)$ est dit élémentaires et deux triples $\sigma_0 = (E_0, \varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2)$ et $\sigma_1 = (E_1, \varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2)$ sont dits homotopes s'il existe un triple $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ de $\Gamma^{,p,q}(\mathcal{C}[0, 1])$ dont les restrictions à $\{0\}$ et à $\{1\}$ soient respectivement σ_0 et σ_1 . Par définition $K^{,p,q}(\mathcal{C})$ est le quotient de $\mathrm{Ob}\,\Gamma^{,p,q}(\ \ )$ par la relation d'équivalence usuelle .

<u>Lemme 3.4.1</u> : L'ensemble $K^{,p,q}(\mathcal{C})$,muni de la loi de composition définie par la somme des objets de $\Gamma^{,p,q}(\mathcal{C})$, est un groupe abélien .

Ce sera une conséquence du lemme 3.4.4 . Voici cependant une démonstration directe simple :

En effet soit $d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ un élément quelconque de $K^{,p,q}(\mathcal{C})$. Alors $d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2) + d(E, \varepsilon^2, \varepsilon^1)$ $= d(E + E, \varepsilon^1 + \varepsilon^2, \varepsilon^2 + \varepsilon^1)$. Mais alors l'homotopie :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est ,pour $\theta \in [0 ,\pi/2]$, un chemin entre $\varepsilon^1 + \varepsilon^2$ et $\varepsilon^2 + \varepsilon^1$, dans l'ensemble des antiautomorphismes de carré 1 de E + E .

C.Q.F.D.

<u>Lemme 3.4.2</u> : Soit $d(E ,\varepsilon^1 ,\varepsilon^2)$ un élément quelconque de $K'^{p,q}(\mathscr{C})$. Pour que $d(E ,\varepsilon^1 ,\varepsilon^2) = 0$,il faut et il suffit qu'il existe un objet (T ,η) de $\widehat{\mathscr{C}}_{p,q}$ (η est donc une graduation de T i.e. un antiautomorphisme involutif de E) tel que $\varepsilon^1 + \eta$ soit homotope à $\varepsilon^2 + \eta$ parmi les graduations de E + T .

En effet si $d(E ,\varepsilon^1 ,\varepsilon^2) = 0$,il existe deux objets (T ,η) et (T' ,η') de $\widehat{\mathscr{C}}_{p,q}$ et un isomorphisme $f : E + T \longrightarrow T'$ de $\mathscr{C}_{p,q}$-modules tels que les graduations $\varepsilon^1 + \eta$ et $\varepsilon^2 + \eta$ soient toutes deux homotopes à $f^{-1}\eta' f$. Donc $\varepsilon^1 + \eta$ et $\varepsilon^2 + \eta$ sont homotopes . La réciproque est immédiate .

<u>Lemme 3.4.3</u> : Pour que deux éléments quelconques $d(E ,\varepsilon^1 ,\varepsilon^2)$ et $d(E' ,\varepsilon'^1 ,\varepsilon'^2)$ soient égaux il faut et il suffit qu'il existe un objet (T ,η) de $\widehat{\mathscr{C}}_{p,q}$ tel que $\varepsilon^1 + \varepsilon'^2 + \eta$ et $\varepsilon^2 + \varepsilon'^1 + \eta$ soient homotopes parmi les graduations de E + E' + T .

En effet , d'après le lemme pré[illegible] on doit avoir $d(E + E' ,\varepsilon^1 + \varepsilon'^2 ,\varepsilon^2 + \varepsilon'^1) = 0$,d'où le résultat en appliquant le lemme précédent .

A tout objet (E, F, α) de $\Gamma^{p,q}(\mathcal{C})$ associons l'objet $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ de $\Gamma'^{p,q}(\mathcal{C})$ où ε^1 est la graduation naturelle de E et où $\varepsilon^2 = \alpha^{-1}\varepsilon^1\alpha = \alpha^{-1}\bar{\alpha}\,\varepsilon^1$. Si (E, F, α) est élémentaire, le triple $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ l'est aussi et si deux triples (E_o, F_o, α_o) et (E_1, F_1, α_1) sont homotopes les triples correspondant dans $\Gamma'^{p,q}(\mathcal{C})$ le sont aussi. Ceci définit donc un homomorphisme γ de $K^{p,q}(\mathcal{C})$ dans $K'^{p,q}(\mathcal{C})$.

<u>Lemme 3.4. 4</u>: L'homomorphisme

$$\gamma : K^{p,q}(\mathcal{C}) \longrightarrow K'^{p,q}(\mathcal{C})$$

précédemment défini est un isomorphisme.

On va définir un homomorphisme

$$\gamma' : K'^{p,q}(\mathcal{C}) \longrightarrow K^{p,q}(\mathcal{C})$$

inverse de γ. Soit donc $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ un objet de $\Gamma'^{p,q}(\mathcal{C})$. Désignons par E_1 (resp. E_2) le $C_{p,q}$-module E muni de la graduation ε^1 (resp. ε^2). Soit $\alpha : E_1 \longrightarrow E_2$ le morphisme égal au morphisme identique sur les modules sans graduation sous-jacent. Alors la classe de (E_1, E_2, α) dans $K^{p,q}(\mathcal{C})$ ne dépend que de la classe de $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ dans $K'^{p,q}(\mathcal{C})$. En effet si $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ est élémentaire, on a $E_1 = E_2$ et $\alpha = Id$. De même, si $(E_o, \varepsilon^1_o, \varepsilon^2_o)$ et $(E_1, \varepsilon^1_1, \varepsilon^2_1)$ sont homotopes, les triples correspondants sont homotopes par simple fonctorialité et car $\mathcal{C}([0,1])$ est une catégorie de Banach.

a) <u>$\gamma'\gamma = Id$</u> : On a un diagramme commutatif de morphismes de $\mathcal{C}_{p,q}$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{Id} & E_1 \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\eta \\ F & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & E_2 \end{array}$$

Le morphisme identique de E sur E_1 est évidemment gradué et le morphisme α^{-1} de F sur E_2 l'est aussi : On a en effet le relation $\alpha^{-1}\varepsilon^2 = (\alpha^{-1}\varepsilon^2\alpha)\alpha^{-1}$.

b) <u>$\delta\gamma' = Id$</u> : Immédiat .

Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{E}''_{p,q}$ des couples (E ,h) où $E \in Ob\ \hat{\mathcal{E}}_{p,q}$ et où h est un automorphisme <u>pseudo-involutif</u> de E ,i.e. un automorphisme vérifiant la relation :

$$h\bar{h} = 1$$

On définit dans $\mathcal{E}''_{p,q}$ la relation d'équivalence suivante :

$(E,h) \sim (E',h') \iff \exists\ T \in Ob\ \hat{\mathcal{E}}_{p,q}$ tel que $h + Id_{E'} + Id_T$ soit homotope à $Id_E + h' + Id_T$ parmi les pseudo-involutions de E + E' + T . Alors on désigne par $K''^{p,q}(\mathcal{E})$ l'ensemble quotient de $\mathcal{E}''_{p,q}$ par cette relation d'équivalence . En fait $K''^{p,q}(\mathcal{E})$ peut être muni d'une structure de monoîde abélien en posant :

$$d(E,h) + d(E',h') = d(E + E' ,h + h')$$

Soit $(F ,\varepsilon^1 ,\varepsilon^2)$ un objet de $\Gamma^{*p,q}(\mathcal{E})$ et soit $E = (F ,\varepsilon^1)$ l'objet de $\hat{\mathcal{E}}_{p,q}$ formé de F muni de la graduation ε^1 . Alors $\varepsilon^2\varepsilon^1$ est une pseudo-involution de E . En effet soit $E = E_0 + E_1$ la décomposition canonique de E relativement à la graduation ε^1 . Alors dans Aut E ,on a =

$$\varepsilon^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2_{00} & -\varepsilon^2_{01} \\ \varepsilon^2_{10} & \varepsilon^2_{11} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^2 \varepsilon^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2_{00} & \varepsilon^1_{01} \\ \varepsilon^2_{1} & \varepsilon^2_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2_{00} & -\varepsilon^2_{01} \\ \varepsilon^2_{10} & -\varepsilon^2_{11} \end{pmatrix} = \overline{\varepsilon^1 \varepsilon^2}$$

(Ce calcul est d'ailleurs valable pour tout porphisme ε^2)

On a donc $(\varepsilon^2\varepsilon^1)\ \overline{(\varepsilon^2\varepsilon^1)} = \varepsilon^2 \varepsilon^1 \varepsilon^1 \varepsilon^2 = 1$.

Les considérations précédentes montrent qu'on a une application de $\mathrm{Ob}\,\Gamma'^{p,q}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{E}''_{p,q}$ définie par

$$(F, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \rightsquigarrow ((F,\varepsilon^1), \varepsilon^2\varepsilon^1)$$

En fait ,en appliquant le lemme 3.4.3 ,il est clair que cette application définit par passage au quotient un homomorphisme δ de $K'^{p,q}(\mathcal{C})$ dans $K''^{p,q}(\mathcal{C})$.

<u>Lemme 3.4.5</u> : L'homomorphisme δ de $K'^{p,q}(\mathcal{C})$ dans $K''^{p,q}(\mathcal{C})$ pré ci-dessus est un isomorphisme .

a) <u>δ surjectif</u> : Si (E,h) est un élément de $\mathcal{E}''_{p,q}$ alors $d(E,h) = (d(F, \varepsilon^1, h\varepsilon^1))$ où $E = (F, \varepsilon^1)$ (Comme il est d'usage on note d la classe dans K ,K' ,K" , ...)

b) <u>δ injectif</u> : Immédiat d'après le lemme 3.4. 3.

<u>Corollaire</u> : $K''^{p,q}(\mathcal{C})$ est un groupe abélien .

Soit (E,h) un élément de $\mathcal{E}''_{p,q}$. Alors l'automorphisme $g = hJ$ de $E + E^* = \omega_{p,q}(E)$ vérifie la relation:

$$g^2 = -1$$

En revenant aux notations du début de ce paragraphe ,considérons l'élément $d(\pi^*E_1, \pi^*E_1, \beta)$ de $K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$ où $\beta(x,y) = (1x + hJy)(1x - Jy)$

Cet élément ne dépend que de la classe de (E,h) dans $K''^{p,q}(\mathcal{C})$ et cette correspondance définit donc un homomorphisme w' de $K''^{p,q}(\mathcal{C})$ dans $K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$.

Lemme 3.4.6 : Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} K^{p,q}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[rrr, bend right, "w"'] & K'^{p,q}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\delta"] & K''^{p,q}(\mathcal{C}) \arrow[r, "w'"] & K_1^{p+1,q}(\mathcal{C}) \end{tikzcd}$$

En effet :

$\gamma(d(E\ ,F\ ,\alpha\ )) = d(E\ ,\varepsilon^1\ ,\varepsilon^2)$ avec $\varepsilon^2 = \alpha^{-1}\ \varepsilon^1\ \alpha\ = \alpha^{-1}\bar{\alpha}\ \varepsilon^1$

$(\delta\gamma\ )(d(E\ ,F\ ,\alpha\ )) = d(E\ ,h)$ avec $h = \varepsilon^2\ \varepsilon^1 = \alpha^{-1}\bar{\alpha}$ et

$(w'\delta\gamma\ )(d(E\ ,F\ ,\alpha\ )) = d(E_1\ ,E_1\ ,\beta\ \ )$ avec

$$\beta\ (x,y) = (1x + \alpha^{-1}J\alpha\ y)(1x - Jy)$$

$= \alpha^{-1}(1x + Jy)\ \alpha\ (1x - Jy)$. Alors $d(E_1\ ,E_1\ ,\beta\ )$

$= d(E_1\ ,F_1\ ,\alpha\beta\ \ ) = w(d(E\ ,F\ ,\alpha\ ))$.

C.Q.F.D.

Après cette succession de lemmes ,pour démontrer le théorème fondamental ,il ne nous reste plus donc qu'à démontrer que w' est un isomorphisme . Pour cela nous allons utiliser essentiellement le travail de Wood [ ] . Ceci va nécessiter encore des lemmes et des définitions supplémentaires .

Soit $d(\pi^*E_1\ ,\pi^*E_1\ ,\alpha\ )$ un élément de $K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$. Alors α est un automorphisme de π^*E_1 de la forme $u(x,y) + v(x,y)\ J$ où $v(1,0) = v(0,1) = 0$. Un tel automorphisme α sera dit permis . D'autre part un automorphisme α est dit normalisé si $u(1,0) = 1$. Si α est un automorphisme normalisé permis de E_1 ,on note $\delta(E,\alpha)$ l'élément $d(\pi^* E_1, \pi^* E_1, \alpha)$ de $K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$.

<u>Lemme 3.4.7</u> : Tout élément de $K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$ s'écrit $\delta(E,\alpha)$ où α est un automorphisme normalisé permis de $\bar{E}_1$ (écriture abrégée pour $\pi^* E_1$) . Pour que $\delta(E,\alpha) = \delta(E',\alpha')$ il faut et il suffit qu'il existe un objet F de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ tel que $\alpha + Id_{\bar{E}'_1} + Id_{\bar{F}_1}$ soit homotope à $Id_{\bar{E}'_1} + \alpha' + Id_{\bar{F}_1}$. parmi les automorphismes normalisés permis de $\bar{E}_1 + \bar{E}'_1 + \bar{F}_1$.

La première partie du lemme est immédiate et résulte du fait que $\omega_{p,q} : \mathcal{C}_{p,q} \longrightarrow \mathcal{C}^{o}_{p+1,q}$ est un T-foncteur . Pour démontrer la duxième assertion plusieurs pas sont nécessaires :

a) <u>Supposons $\delta(E,\alpha) = 0$</u> : Alors ,d'après la définition de $K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$,il existe des objets T et T' de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ et et des isomorphismes $f : E + T \longrightarrow T'$, $g : E + T \rightarrow T'$ tels que $\pi^*(g^{-1} f)_1$ soit homotope à $\alpha +$ Id parmi les automorphismes permis de $\bar{E}_1 + \bar{T}_1$. Alors l'homotopie normalisée de cette homotopie $F(x,y,t)$,$t \in [0,1]$ (obtenue en considérant l'homotopie $F(x,y,t)\left(F(1,0,t)\right)^{-1}$) est une homotopie entre $\alpha + Id_{T_1}$ et $Id_{E_1 + T_1}$.

<u>Conclusion</u> : Pour que $\delta(E,\alpha) = 0$,il faut et il suffit qu'il existe un objet T de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ tel que $\alpha + Id_{\bar{T}_1}$ soit homotope à $Id_{\bar{E}_1 + \bar{T}_1}$ parmi les automorphismes normalisés permis de $\bar{E}_1 + \bar{T}_1$.

b) <u>Supposons $\delta(E, \alpha) = \delta(E', \alpha')$</u> : Alors

$\delta(E, \alpha) + \delta(E', \alpha'^{-1}) = \delta(E + E', \alpha + \alpha'^{-1}) = 0$. Donc ,

d'après a) il existe un objet T de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ tel que

$\alpha + \alpha'^{-1} + Id_{\bar{T}_1} \simeq Id_{\bar{E}_1} + \bar{E}'_1 + \bar{T}_1$ donc

$\alpha + Id_{\bar{E}'_1} + Id_{\bar{T}_1}$ est homotope à $Id_{\bar{E}_1} + \alpha' + Id_{\bar{T}_1}$ parmi

les automorphismes normalisés permis de $\bar{E}_1 + \bar{E}'_1 + \bar{T}_1$.

C.Q.F.D.

Pour démontrer l'isomorphisme w' on va ,comme annoncé ,procéder par réductions successives . On désigne par ${}^{P}\mathcal{E}_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$ (resp ${}^{Q}\mathcal{E}_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$) l'ensemble des couples (E, α) où $E \in Ob\,\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ et où $\alpha : \bar{E}_1 \longrightarrow \bar{F}_1$ est un ato automorphisme permis normalisé <u>polynomial</u> (resp. <u>quadratique</u>) i.e. de la forme

$$\alpha(x,y) = 1 + A_1 y^2 + \dots + A_m y^{2m} + xy(B_1 + B_2 y^2 + \dots + B_m y^{2m})$$

(resp. $\alpha(x,y) = 1x^2 + A_1 y^2 + B_1 xy$)

On définit de manière évidente les homotopies polynomiales et quadratiques $\simeq_P$, $\simeq_Q$ entre automorphismes normalisés permis . On désigne maintenant par ${}^{P}K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$ (resp. ${}^{Q}K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$) l'ensemble quotient de ${}^{P}\mathcal{E}_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$ (resp. ${}^{Q}\mathcal{E}_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$) par la relation d'équivalence :

$$(E, \alpha) \sim (E', \alpha') \Longleftrightarrow \exists\ T \in Ob\,\hat{\mathcal{C}}_{p,q} \text{ tel que}$$

$$\alpha + Id_{\bar{E}'_1} + Id_{\bar{T}_1} \simeq_P Id_{\bar{E}_1} + \alpha' + Id_{\bar{T}_1}$$

(resp. $\alpha + Id_{\bar{E}'_1} + Id_{\bar{T}_1} \simeq_Q Id_{\bar{E}_1} + \alpha' + Id_{\bar{T}_1}$)

On a une factorisation évidente de w' :

$$K^{p,q}(\mathcal{C}) \xrightarrow{w'_1} {}^{Q}K_1^{p,q}(\mathcal{C}) \xrightarrow{w'_2} {}^{P}K_1^{p+1,q}(\mathcal{C}) \xrightarrow{w'_3} K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$$

et ,suivant Wood ,on va démontrer successivement que w'_3 , w'_2 et w'_1 sont des isomorphismes .

Si E est un objet de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$,on note σ l'involution de End E_1 définie par $\sigma(u + vJ) = u - vJ$.

Lemme 3.4.8 [ ] w'_3 est une bijection .

Soit $\delta(E ,\alpha)$ un élément de $K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$. Alors α est une application continue de $[0 ,1]$ dans Aut E_1 . ou encore du quart de cercle $x^2 + y^2 = 1$,$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Prolongeons α en une application continue du cercle tout entier dans Aut E_1 en posant :

(i) $\alpha(x,y) = \alpha(-x,-y)$

(ii) $\alpha(x,-y) = \alpha(x,y)$

Alors le théorème d'approximation de Fejer montre qu'il existe une application polynomiale

$$p(x,y) = 1 + A_1y^2 + \ldots + A_ny^{2m} + xy(B_1 + B_2y^2 + \ldots + B_ny^{2m-2})$$

du cercle $x^2 + y^2 = 1$ dans End E_1 ,où les coefficients A_i et B_i sont des éléments de l'algèbre de Banach End E_1 vérifiant $\sigma A_i = A_i$, $\sigma B_i = -B_i$,telle que $tp(x,y) + (1-t)\alpha$,$t \in [0 ,1]$,soit un chemin dans Aut E_1 joignant α et p . On a donc $\delta(E ,\alpha) = \delta(E ,p)$ et ceci démontre que w'_3 est surjectif . Pour démontrer que w'_3 est surjectif ,on va utiliser un argument analogue pour la catégorie de Banach $\mathcal{C}[0 ,1]$. En effet si

$\delta(E,\alpha) = \delta(E',\alpha')$,il existe ,d'après le lemme 3.4.7 , un objet T de $\hat{\mathcal{C}}_{p,q}$ tel que $\alpha + Id_{\bar{E}'_1} + Id_{\bar{T}_1}$ soit homotope à $Id_{\bar{E}_1} + \alpha' + Id_{\bar{T}_1}$ parmi les automorphismes normalisés permis de $\bar{E}_1 + \bar{E}'_1 + \bar{T}_1$. Alors on peut approcher cette homotopie par une homotopie polynomiale G qui ,en $\{0\}$ et en $\{1\}$ (l'homotopie étant paramétrée par $t\in[0,1]$) induira des éléments g et g' aussi voisins qu'on le veut de $h = \alpha + Id_{\bar{E}'_1} + Id_{\bar{T}_1}$ et de $h' = Id_{\bar{E}_1} + \alpha' + Id_{\bar{T}_1}$.

Alors l'homotopie polynomiale entre les éléments polynomiaux α et α' sera obtenue

1) en joignant h et g linéairement

2) en suivant le chemin défini par l'homotopie G

3) en joignant h et h' linéairement

<u>Lemme 3.4.9</u> : w'_2 est une bijection [ ]

Soit $\delta(E,p)$ un élément de ${}^{P}K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$ où

$$p(x,y) = 1 + A_1y^2 + \dots + A_my^{2m} + xy(B_1 + B_2y^2 + \dots + B_my^{2m-2})$$

et considérons la matrice de Aut $(\bar{E}_1 + \dots + \bar{E}_1)$:

$$q(x,y) = \begin{pmatrix} 1+A_1y^2+B_1xy & A_2y^2+B_2xy & \cdots & A_my^2+B_mxy \\ -y^2 & 1 & & 0 \\ & -y^2 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \\ & & -y^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit de même $\alpha(y)$ la matrice de Aut $(\bar{E}_1 + \dots + \bar{E}_1)$:

$$\alpha(y) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ y^2 & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ y^{2m-2} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $q(x,y)\alpha(y) =$

$$\begin{pmatrix} p(x,y) & A_2 y^2 + B_2 xy & \cdots & \cdots & A_m y^2 + B_m xy \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Maintenant $\alpha(y)$ peut être déformé en l'identité et $q(x,y)\alpha(y)$ peut être déformé en $p(x,y) + (Id_{\bar{E}_1})^{m-1}$.

Ceci démontre que w_2' est surjectif. D'autre part si $p(x,y)$ est de la forme :

$$p(x,y) = 1 + A_1 y^2 + B_1 xy$$

alors le chemin quadratique associé est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 + A_1 y^2 + B_1 xy & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -y^2 & 1 & & 0 & \\ & -y^2 & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & -y^2 & 1 \end{pmatrix}$$

et peut être déformé "quadratiquement" en $p(x,y) + Id_{\bar{E}_1}^{m-1}$.

On voit alors que w_2' est injectif en appliquant la construction précédente à la catégorie de Banach $\mathcal{C}[0,1]$.

Comme remarqué au début de ce paragraphe ,si h est une pseudo-involution d'un objet E de $\widehat{\mathcal{C}}_{p,q}$,l'élément $g = hJ$ vérifie la relation

$$(ii) \qquad g^2 = -1$$

Ceci nous amène à considérer l'ensemble $\hat{\mathcal{E}}''^{p,q}$ formé des couples (E ,g) où E est un objet de $\widehat{\mathcal{C}}_{p,q}$ et où g est un automorphisme de E_1 vérifiant :

(i) $\sigma g = -g$ (donc g est de la forme hJ)

(ii') Le s pectre de g ne rencontre pas l'axe réel .

On définit alors sans peine une ensemble $\widetilde{K}''^{p,q}(\mathcal{C})$ comme ensemble quotient de $\mathcal{E}''^{p,q}$ par la relation d'équivalence :

$(E,g) \sim (E',g') \Leftrightarrow$ Il existe $T \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathcal{C}}_{p,q}$ tel que

$g + J + J \approx J + g' + J$ parmi les automorphismes de $\overline{E}_1 + E'_1 + T_1$ vérifiant (i) et (ii') . On a alors une factorisation évidente de w'_1 :

$$K''^{p,q}(\mathcal{C}) \xrightarrow{w''_1} \widetilde{K}''^{p,q}(\mathcal{C}) \xrightarrow{w''_2} {}^{Q}K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$$

où $w''_1(d(E,h)) = d(E,hJ)$ et $w''_2(d(E,g)) = \delta(E,\alpha)$ avec

$$\alpha(x,y) = (1x + gy)(1x - Jy)$$

Lemme 3.4.12 : w''_1 est une bijection

Soit d(E,g) un élément de $\widetilde{K}''^{p,q}(\mathcal{C})$. Nous allons montrer que g est homotope à un élément $\hat{g}$ vérifiant (i) et (ii) donc de la forme hJ où h est une pseudo-involution de E . En effet supposons d'abord que End $\bar{E}_1$ soit une algèbre de Banach complexe . Soit Γ^+ (resp. Γ^-) une courbe entourant la partie du spectre de g située au-dessus de l'axe réel (resp. au-dessous de l'axe réel) et considérons les intégrales :

$$e = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma^+} \frac{dz}{z-g} \qquad f = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma^-} \frac{dz}{z-g}$$

Alors $e^2 = e$,$f^2 = f$,$ef = fe = 0$,$e + f = 1$. L'automorphisme $\hat{g} = i(e-f)$ vérifie (i) et (ii) et l'homotopie

$t \qquad (1-t)g + it(e-f)$ est une homotpie entre g et $\hat{g}$ parmi les automorphismes de E_1 vérifiant (i) et (ii') .

Si End $\bar{E}_1$ n'est pas une algèbre complexe ,on fait les calculs pré précédents dans l'algèbre de Banach complexifiée et ,en choisissant Γ^+ et Γ^- symétriques par rapport à l'axe réel,on constate que $i(e-f) \in$ End $\bar{E}_1$. Ceci démontre, dans tous les cas ,que w_1'' est surjectif . D'autre part si g vérifie (i) et (ii) on a $\hat{g} = g$. Ceci démontre que w_1'' est injectif en remplaçant la catégorie $\mathcal{C}$ par la catégorie de Banach $\mathcal{C}[0,1]$.

<u>Lemme 3.4.11</u> : w_2'' est une bijection [ ]

Soit $\mathcal{E}(E ,q)$ où

$$q(x,y) = 1x^2 + Ay^2 + Bxy$$

un élément quelconque de K $^{Q}K_1^{p+1,q}(\mathcal{C})$. Considérons dans $\mathrm{Aut}(\bar{E}_1 + \bar{E}_1)$ le produit des matrices

$$\Psi(x,y) = \begin{pmatrix} 1x + By & AJy \\ Jy & 1x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1x & -Jy \\ -Jy & 1x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q(x,y) & (1x+By)Jy + AJy \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $\Psi(x,y)$ peut être joint linéairement à $q(x,y) + \mathrm{Id}_{\bar{E}_1}$

D'autre part $\begin{pmatrix} 1x+By & AJy \\ Jy & 1x \end{pmatrix}$ s'écrit $1x + gy$ avec

$g = \begin{pmatrix} B & AJ \\ J & 0 \end{pmatrix}$. De plus g vérifie les conditions(i) et (ii') car $g - \lambda 1$ est proportionnel à $1x + gy$ si $\lambda = -\mathrm{cotg}$.
Il reste à ajuster le facteur

$$\begin{pmatrix} 1x & -Jy \\ Jy & 1x \end{pmatrix}$$

Pour cela ,si nous suivons Wood ,il suffit de pouvoir joindre J et -J par un chemin d' formé d'automorphismes vérifiant (i) et (ii) . Ceci revient à affirmer l'existence d'un automorphisme de E de degré 1 et de carré -1 . En effet si K est un tel automorphisme ,le chemin $(\cos\theta + K\sin\theta)J$, $\theta \in [0, \pi]$, réalise le chemin cherché . Mais si un élément x de $Q_{K_1}^{p+1,q}(\mathcal{C})$ est donné on peut toujours choisir E et q de telle sorte que $x = \delta(E, q)$ et qu'un tel automorphisme K existe sur E . Supposons en effet que $x = \delta(F, r)$. Soit $^*F^*$ le $C_{p,q}$-module gradué obtenu à partir de F en renversant la graduation et en faisant opérer $C_{p,q}$ via son involution canonique . Si $F = (F_0, F_1)$

on a donc ${}^{*}F^{*} = (F_1 , F_9)$ et le morphisme de F dans ${}^{*}F^{*}$ défini par la matrice

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est un morphisme de $C_{p,q}$-modules de degré 1 . Alors l'automorphisme de $F + {}^{*}F^{*}$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\eta^{-1} \\ \eta & 0 \end{pmatrix}$$

est un automorphisme de $F + {}^{*}F^{*}$ de degré 1 et de carré -1 .
et on a $\delta(F ,r) = \delta(F + {}^{*}F^{*}, r + Id)$.

On peut donc sans restreindre la généralité supposer qu'un tel automorphisme K existe dans E et revenir au facteur
$$\begin{pmatrix} 1x & -Jy \\ Jy & 1x \end{pmatrix}$$

Considérons le chemin

$$\begin{pmatrix} 1x - Jy\cos\theta & -Jy\sin\theta \\ Jy\sin\theta & 1x + Jy\cos\theta \end{pmatrix}$$

Pour $\theta = \pi/2$, on retrouve le facteur initial et pour $\theta = 0$ on a

$$\begin{pmatrix} 1x - Jy & 0 \\ 0 & 1x + Jy \end{pmatrix}$$

qui peut homotope ,comme on a vu plus haut à

$$\begin{pmatrix} 1x - Jy & 0 \\ 0 & 1x - Jy \end{pmatrix} \quad \Bigg(\text{considérer l'homotopie : } \begin{matrix} 1x - Jy & 0 \\ 0 & 1x + (\cos\theta + K\sin\theta)Jy \end{matrix} \Bigg)$$

Ceci démontre que w_2'' est surjectif . Pour démontrer que w_2'' est injectif ,compte tenu de l'argument standard qui consiste à remplacer $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}[0\,,1]$,le raisonnement essentiel est le suivant : Considérons un objet $\delta(E\,,\alpha)$ où $\alpha(x,y) = (1x + gy)(1x - Jy)$ de l'image de w_2'' . Alors la construction précédente ,appliquée à cet élément donne la matrice ;

$$\begin{pmatrix} 1x + (g-J)y & gy \\ Jy & 1x \end{pmatrix}$$

et il suffit de montrer qu'il existe un chemin $h_t \in \mathrm{Aut}(\bar{E}_1+\bar{E}_1)$ vérifiant (i) et (ii') et joignant

$$h_o = \begin{pmatrix} g-J & g \\ J & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{à } h_1 = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$$

Pour cela on commence par considérer le produit des matrices :

$$h'_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & -Jg \\ J & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $t = 0$ on obtient h_o ,pour $t = 1$ on obtient $\begin{pmatrix} g & 0 \\ J & -J \end{pmatrix}$

et le spectre de h'_t est le même que celui de h_o . On peut ensuite déformer $\begin{pmatrix} g & 0 \\ J & -J \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} g & 0 \\ tJ & -J \end{pmatrix}$ et enfin déformer $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ par l'homotopie

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & -J(\cos\theta + 1K\sin\theta) \end{pmatrix}$$

Ceci démontre que W_2'' est un isomorphisme et achève la démonstration du théorème fondamental .

<u>Compléments</u> : <u>Autres formes du théorème fondamental</u>

La démonstration du théorème 3.4.1 nous a donné l'occasion d'entrevoir une définition équivalente intéressante $K'^{p,q}(\mathcal{C})$ du groupe $K^{p,q}(\mathcal{C})$. Ce point de vue mérite quelques développements supplémentaires qui seront commodes par la suite pour exposer et démontrer le théorème d'isomorphisme de Thom en K-théorie. Il s'agit essentiellement de donner une forme explicite aux isomorphismes $K'^{p,q}(\mathcal{C}) \approx K_1^{p+1,q}(\mathcal{C}) \approx K'^{p+1,q}(\mathcal{C})$.

Considérons un $C_{p,q}$-module E muni d'une graduation ε. Alors la graduation de $\omega_{p,q}(E) = E + E$ est donnée par la matrice :

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et si e_i , ε_k , $i = 1,\dots,p$; $j = 1,\dots,q$ sont les images des générateurs de l'algèbre $C_{p,q}$ dans Aut E, on fait opérer $C_{p+1,q}$ dans $\omega_{p,q}(E)$ en posant :

$$e'_i = \begin{pmatrix} 0 & e_i \\ e_i & 0 \end{pmatrix} \quad e'_{p+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon'_k = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_k \\ \varepsilon_k & 0 \end{pmatrix}$$

$i = 1,\dots,p$; $j = 1,\dots,q$.

Un $\mathcal{C}$-morphisme de $\omega_{p,q}(E) = E + E$ dans $\omega_{p,q}(F) = F + F$ représenté par la matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est un morphisme de $C_{p+1,q}$-modules si et seulement si $z = -y$, $t = x$ et si x (resp. y) est un morphisme (resp. un antimorphisme) de $C_{p,q}$-modules . En posant

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

on voit que $J^2 = -1$ et que tout morphisme de $\omega_{p,q}(E)$ dans $\omega_{p,q}(F)$ s'écrit $a + bJ$ où a et b représentent des morphismes de $C_{p,q}$-modules de E dans F . On retrouve ainsi la description de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{p+1,q}}(\omega_{p,q}(E), \omega_{p,q}(F))$ donnée à la fin du paragraphe 3.2 .

<u>Théorème 3.4.1 bis</u> : Soit $D^1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ et soit $d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ un élément quelconque de $K'^{p,q}(\mathcal{C})$. Associons lui l'élément $d(\omega_{p,q}(E), \underline{\varepsilon}^1, \underline{\varepsilon}^2)$ de $K'^{p+1,q}_1(\mathcal{C})$ où :

$$\underline{\varepsilon}^1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \varepsilon^1\sin\theta \\ \varepsilon^1\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \underline{\varepsilon}^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \varepsilon^2\sin\theta \\ \varepsilon^2\sin & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Alors cette correspondance définit un isomorphisme de $K'^{p,q}(\mathcal{C})$ sur $K'^{p+1,q}_1(\mathcal{C})$.

La démonstration va consister à expliciter les isomorphismes $K \approx K'$ et à utiliser le théorème fondamental .

Pour $m = 1, 2$, posons :

$$f_m = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\varepsilon^m\sin\theta/2 \\ \varepsilon^m\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

Alors f_m représente un isomorphisme de degré zéro de $E + E$ muni de la graduation η sur $E + E$ muni de la graduation $\underline{\varepsilon}^m$

On a donc $d(\omega_{p,q}(E), \underline{\varepsilon}^1, \underline{\varepsilon}^2) = \gamma(\partial(E, f))$

où $f = \omega_{p,q}(\pi^* E) \longrightarrow \omega_{p,q}(\pi^* E)$, $\pi : D^1 \longrightarrow \text{Point}$, est défini par la matrice :

$$f = f_2^{-1} f_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \varepsilon^2 \sin\theta/2 \\ -\varepsilon^2 \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\varepsilon^1 \sin\theta/2 \\ \varepsilon^1 \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta/2 + \varepsilon^2\varepsilon^1 \sin^2\theta/2 & (\varepsilon^2 - \varepsilon^1)\cos\theta/2 \ \sin\theta/2 \\ (\varepsilon^1 - \varepsilon^2)\sin\theta/2 \ \cos\theta/2 & \varepsilon^2\varepsilon^1 \sin^2\theta/2 + \cos^2\theta/2 \end{pmatrix}$$

En sens inverse on a $(w\gamma^{-1})(d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) = \partial((E, \varepsilon^1), g)$

où $g = \alpha^{-1}(\cos\theta/2 + J\sin\theta/2)\,\alpha\,(\cos\theta/2 - J\sin\theta/2)$

$$= \cos^2\theta/2 + \alpha^{-1}\bar{\alpha}\sin^2\theta/2 + (\alpha^{-1}\bar{\alpha} - 1)J\sin\theta/2 \ \cos\theta/2$$

et où α est le morphisme de (E, ε^1) sur (E, ε^2) égal à l'identité sur les objets de $\mathcal{C}_{p,q}$ sous-jacents. On a donc $\bar{\alpha} = \varepsilon^2\varepsilon^1$. En se rappelant que

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^1 \\ +\varepsilon^1 & 0 \end{pmatrix}$$

on voit immédiatement que $g = f$.

C.Q.F.D.

Remarque : Par abus de langage on désignera encore par w l'isomorphisme $K'^{p,q}(\mathcal{C}) \approx K'^{p+1,q}_1(\mathcal{C})$.

D'après le § 3.2 et le théorème précédent ,on a des isomorphismes canoniques :

$$K'^{p,q+1}(\mathcal{C}) \approx K'^{p+1,q+1}_1(\mathcal{C}) \approx K'^{p,q}_1(\mathcal{C})$$

qu'on va maintenant tacher d'expliciter également .

Soit donc E un objet de $\mathcal{C}_{p,q+1}$ et soit e_i ,i = 1 ,...,p ,ε_k ,k = 1 ,...,q+1 les images des générateurs de $C_{p,q}$ dans Aut E . Soit ε^1 et ε^2 deux graduations sur E . Alors on a :

$$w(d(E ,\varepsilon^1 ,\varepsilon^2)) = d(\omega_{p,q}(E) ,\underline{\varepsilon}^1 ,\underline{\varepsilon}^2) \quad \text{où}$$

$$\underline{\varepsilon}^1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \varepsilon^1\sin\theta \\ \varepsilon^1\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad \underline{\varepsilon}^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \varepsilon^2\sin\theta \\ \varepsilon^2\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Dans $\omega_{p+1,q}(E)$ le morphisme $\xi = \varepsilon'_{q+1}\, e'_{p+1}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{q+1} \\ \varepsilon_{q+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\varepsilon_{q+1} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{q+1} \end{pmatrix}$$

est de carré 1 et Ker(ξ - 1) = E' ,considéré comme $C_{p,q}$-module,est isomorphe à E muni de la structure de $C_{p,q}$-module définie par e_i ,i = 1 ,...,p ,ε_k ,k = 1 ,...,q .

En effet soit E = $E_0 + E_1$ la décomposition de E relativement à la graduation ε_{q+1} . Alors le morphisme

$$g : E = E_0 + E_1 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\xi - 1) \subset E + E$$

défini par $g(x_0, x_1) = (x_0, x_1)$ est l'isomorphisme cherché.
Il reste à expliciter la "trace" des graduations ε^1 et ε^2 sur E'. C'est évidemment $\varepsilon_{q+1}\cos\theta + \varepsilon^1\sin\theta$ et $\varepsilon_{q+1}\cos\theta + \varepsilon^2\sin\theta$, d'où le théorème :

<u>Théorème 3.4.1 ter</u> : Avec les notations précédentes l'homomorphisme de $K'^{p,q+1}(\mathcal{C})$ dans $K_1'^{p,q}(\mathcal{C})$ défini par $w(d(E ; e_1, \ldots, e_p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{q+1} ; \varepsilon^1, \varepsilon^2))$
$= d(\pi^* E, e_1, \ldots, e_p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q ; \varepsilon_{q+1}\cos\theta + \varepsilon^1\sin\theta, \varepsilon_{q+1}\cos\theta + \varepsilon^2\sin\theta)$
est un isomorphisme.

Il est intéressant en particulier de définir de façon encore plus explicite l'isomorphisme :

$$K^{-n}(\mathcal{C}) \longrightarrow K_n(\mathcal{C})$$

qu'on obtient en appliquant n fois le théorème 3.4.1 ter.
Il est bon pour cela d'étudier une situation plus "abstraite" que voici :

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur R muni d'une forme quadratique Q et soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle. Alors un <u>V-module gradué</u> est par définition la donnée d'un objet E de $\mathcal{C}$ et d'un homomorphisme (nécessairement continu) :

$$\rho : V \longrightarrow \mathrm{Aut}^1 E$$

tel que $(\rho(v))^2 = Q(v)\,\mathrm{Id}_E \quad \forall v \in V$.

Les objets de $\mathcal{C}$ où V opère sont les objets d'une catégorie de Banach graduée dont le groupe $\hat{K}$ est par définition le groupe $K^V(\mathcal{C})$. Si $V = R^{p+q}$ et si Q est la forme quadratique :

$$Q(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1},\ldots,x_{p+q}) = -x_1^2-\ldots-x_p^2+x_{p+1}^2 + \ldots x_{p+q}^2$$

on retrouve évidemment la définition de $K^{p,q}(\mathcal{C})$. Réciproquement si Q est une forme quadratique non dégénérée de type (q,p) ,$K^V(\mathcal{C})$ est isomorphe (non canoniquement) à $K^{p,q}(\mathcal{C})$. L'avantage de cette définition ,en dehors de considérations esthétiques,se fera sentir lorsque nous démontrerons le théorème d'isomorphisme de Thom dans les paragrphes suivants .

Supposons maintenant Q non dégénérée (cette restriction est inutile comme nous le verrons plus tard). Soit $V = V_1 + V_2$ une décomposition de V en sous espaces orthogonaux et Q_i ,$i = 1$,2 ,la restriction de Q à V_i . Supposons Q_1 <u>définie positive</u> et soit :

$$S(V_1) = \{v \in V_1 \mid Q_1(v) = 1\}$$

$$B(V_1) = \{v \in V_1 \mid Q_1(v) = 1\}$$

Considérons l'espace vectoriel $\bar{V}_1 = V_1 + R$ muni de la forme quadratique :

$$\bar{Q}_1(v,\lambda) = Q_1(v) + \lambda^2$$

Alors $B(V_1)$ s'identifie à l'hémisphère supérieur $S^+(\bar{V}_1)$ de $S(\bar{V}_1)$ par l'application $p : B(V_1) \longrightarrow S^+(\bar{V}_1) \subset S(\bar{V}_1)$ définie par $p(v,\lambda) = (v,\lambda)$ où $\lambda = \sqrt{1 - Q_1(v)}$. Dans la suite on fera toujours cette identification .

On va définir maintenant un homomorphisme de

$K^{V=V_1+V_2}(\mathcal{C})$ dans $K^{V_2}(B(V_1),S(V_1);\mathcal{C})$ (définition évidente calquée sur celle de $K^{p,q}(X,Y;\mathcal{C})$) . Tout élément de $B(V_1) \approx S^+(V_1)$ s'écrit

$$v\cos\theta + \varepsilon\sin\theta$$

où $v \in S(V)$ et où ε est le vecteur unité de R , $\theta \in [0,\pi]$.
Si E est un V module et si $v \in V$,on note ,comme de coutume , par v l'action de l'élément v sur E . Alors pour $(v_1,v_2) \in V_1 + V_2$, on pose :

$$\bar{w}(d(E,v_2,v_1;\varepsilon^1,\varepsilon^2)) = d(E,v_2;v\cos\theta + \varepsilon^1\sin\theta, v_1\cos\theta+\varepsilon^2\sin\theta)$$

où $v_1\cos\theta + \varepsilon^i\sin\theta$,i = 1 ,2 ,représente la graduation de $\pi^* E$ ($\pi : S^+(\bar{V}_1) \rightarrow$ Point) définie au-dessus de chaque point $v\cos\theta + \varepsilon\sin\theta$ de $S^+(\bar{V}_1)$ par la graduation $v\cos\theta + \varepsilon^i\sin\theta$.

<u>Théorème 3.4.2</u> : L'homomorphisme

$$\bar{w} : K^{V_1+V_2}(\mathcal{C}) \longrightarrow K^{V_2}(B(V_1),S(V_1);\mathcal{C})$$

défini ci-dessus est un isomorphisme .

Nous allons raisonner par récurrence sur la dimension de V_1 . Pour $\dim V_1 = 1$,le théorème 3.4.2 n'est autre qu'une reformulation du théorème 3.4.1 tor . Supposons donc $\dim V_1 = p > 1$ et soit $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p$ une base orthonormale de V_1 . Soit V_1' (resp. V_1'') le sous-espace de V_1 engendré par $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{p-1}$ (resp. ε_p) . Alors , d'après l'hypothèse de récurrence ,on a un isomorphisme :

$$\bar{w} : K^{V_1'+(V_1''+V_2)} \longrightarrow K^{V_1''+V_2}(B(V_1'),S(V_1');\mathcal{C})$$

défini par $\bar{w}(d(E,v_2,v_1'',v_1' ;\mathcal{E}^1 ,\mathcal{E}^2)$

$= d(E,v_2,v_1'',v_1'\cos\theta_1 + \mathcal{E}^1\sin\theta_1 ,v_1'\cos\theta_1 + \mathcal{E}^2\sin\theta_1)$ 0 ,

En appliquant le théorème 3.4.1 ter on obtient alors un isomorphisme

$$\bar{\bar{w}} : K^{V_1+V_2}(\mathcal{C}) \longrightarrow K^{V_2}(B(V_1),S(V_1);\mathcal{C})$$

défini par $\bar{\bar{w}}(d(E,v_2,v_1'',v_1' ;\mathcal{E}^1 ,\mathcal{E}^2)$

$=d(\pi^* E,v_2;v_1''\cos\theta_2+(v_1'\cos\theta_1+\mathcal{E}^1\sin\theta_1)\sin\theta_2$,

$v_1''\cos\theta_2+(v_1'\cos\theta_1+\mathcal{E}^2\sin\theta_1)\sin\theta_2)$

pour $\theta_2\in [0 , \pi]$.

D'autre part l'homomorphisme w est défini par la formule

$w(d(E,v_2,v_1'',v_1' ;\mathcal{E}^1 ,\mathcal{E}^2)$

$=d(\pi^* E,v_2;(v_1''\cos\theta_3+v_1'\sin\theta_3)\cos\theta_4+ \mathcal{E}^1\sin\theta_4$,

$(v_1''\cos\theta_3+v_1'\sin\theta_3)\cos\theta_4+ \mathcal{E}^2\sin\theta_4)$

$\theta_3\in[0 ,2\pi]$ $,\theta_4\in[0 ,\pi]$: La sphère $S(V_1)$ peut être en effet paramétrée par $v_1''\cos\theta_3+v_1'\sin\theta_3$ $; \theta_3\in[0 ,2\pi]$. Les deux éléments de $K^{V_2}(B(V_1) ,S(V_1) ;\mathcal{C})$ ainsi obtenus sont évidemment égaux ,compte tenu que les expressions après le ; s'écrivent toutes deux sous la forme

$\lambda_1'' v_1'' + {}_2 v_1' +\mu\mathcal{E}$ avec $\lambda_1''^2 + \lambda_1'^2 +\mu^2 = 1$ et $\mu > 0$ et

que les systèmes :

$$\begin{array}{ll}
\cos\theta_2 =\lambda_1'' & \cos\theta_3\cos{}_4 =\lambda_1'' \\
\cos\theta_1\sin\theta_2 = \lambda_1' & \sin\theta_3\cos\theta_4 = \lambda_1' \\
\sin\theta_1\sin\theta_2 = \mu & \sin\theta_4 = \mu
\end{array}$$

admettent au moins une solution dans les domaines envisagés .

C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> : Le théorème 3.4.2 est particulièrement intéressant quand $V_1 = V$. On obtient alors un isomorphisme

$$K^V(\mathcal{C}) \longrightarrow K^o(B(V), S(V); \mathcal{C})$$

En composant cet isomorphisme avec l'isomorphisme de $K^o(B(V), S(V); \mathcal{C})$ sur $K(B(V), S(V); \mathcal{C})$ on trouve finalement un isomorphisme :

$$t : K^V(\mathcal{C}) \longrightarrow K(B(V), S(V); \mathcal{C})$$

qu'on se propose d'expliciter .

Soit donc ,avec les notations précédentes , $d(E, v; \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ un élément quelconque de $K^V(\mathcal{C})$. On a des isomorphismes de degré zéro f_i ,$i = 1,2$, de (E,v) muni de la graduation ε^i sur (E,v) muni de la graduation $v\sin\theta + \varepsilon^i\cos\theta$,$\theta\in[0, \pi]$ qui sont définis par

$$f_i = \cos\theta/2 + v\varepsilon^i\sin\theta/2$$

L'image de $d(E,v; \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ dans $K^o(B(V), S(V); \mathcal{C})$ est donc l'élément $d((E,\varepsilon^1),(E,\varepsilon^2), \beta)$ où

$$\beta = f_2^{-1}f_1 = (\cos\theta/2 - v\varepsilon^2\sin\theta/2)(\cos\theta/2 + v\varepsilon^1\sin\theta/2)$$

en un point $v\sin\theta + \varepsilon\cos\theta$ de $B(V)$. Si

$$E = E_o^1 + E_1^1 \qquad \text{et } E = E_o^2 + E_1^2$$

sont les décompositions de E relativement aux graduations ε^1 et ε^2 , on a donc :

$$t(d(E,v;\varepsilon^1,\varepsilon^2)) = d(E_o^1,E_o^2,\alpha)$$

où α est la restriction à E_o^1 de l'isomorphisme

$$1/2(1 - v\varepsilon^2)(1 + v\varepsilon^1)$$

qu'on note encore α par abus de langage .

En particulier supposons que $\varepsilon^1 = -\varepsilon^2 = \varepsilon$. Alors:

$$\alpha = 1/2(1 + v)^2 = v\varepsilon$$

L'isomorphisme de E_o^1 sur $E_o^2 = E_1^1$ est donc obtenu tout simplement par la multiplication par v en un point v de S(V). Comme nous le verrons dans les paragraphes suivants cette remarque permet de retrouver de manière très élégante les résultats d'Atiyah ,Bott et Shapiro [ ] .

3.5 Les théorènes de périodicité de Bott

Signalons avant d'aborder la démonstration des théorèmes de périodicité le fait important suivant :
Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories de Banach et soit

$$\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$$

un ST-foncteur linéaire continu . Alors on a défini au §2.8 un homomorphisme

$$\partial_1 : K_1^n(\mathcal{C}') \longrightarrow K^n(\varphi)$$

associé à la grille

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n^{o} & \longrightarrow & \mathcal{C}_n^{\prime o} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_n & \longrightarrow & \mathcal{C}_n' \end{array}$$

D'autre part ,d'après le théorème fondamental ,on a un isomorphisme w de $K^{n-1}(\mathcal{C}')$ sur $K_1^n(\mathcal{C}')$ $\forall n \in Z$. En composant les homomorphismes w et ∂_1 on définit ainsi un <u>opérateur cobord</u> :

$$\partial^n : K^{n-1}(\mathcal{C}') \longrightarrow K^n(\varphi)$$

et ,d'après le théorème 2.8.1 ,on a une suite exacte :

$$K^{n-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow K^{n-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{\partial^n} K^n(\varphi) \longrightarrow K^n(\mathcal{C}) \longrightarrow K^n(\mathcal{C}')$$

Ceci montre en particulier que , $\mathcal{C}$ étant une catégorie de Banach fixée ,les foncteurs

$$(X,Y) \rightsquigarrow K^n(X ,Y ; \mathcal{C})$$

munis des opérateurs cobords ∂^n ,forment une théorie cohomologique ("extraordinaire") sur la catégorie des paires (X,Y) ,X compact et Y fermé dans X . Donc on a des isomorphismes de <u>suspension</u> :

$$K(\mathcal{C}) \approx K^0(\mathcal{C}) \approx K^8(D^8, S^7; \mathcal{C}) \approx K(D^8, S^7; \mathcal{C})$$

dans le cas où $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach réelle par exemple . Les isomorphismes

$$K(\mathcal{C}) \approx K(D^8, S^7; \mathcal{C})$$

ainsi obtenus sont les <u>isomorphismes de périodicité de Bott</u> . En utilisant les résultats du paragraphe précédent (essentiellement le théorème 3.4.2 et sa remarque) nous allons essayer de les retrouver d'une autre manière ,plus directe .

En effet ,supposons la catégorie de Banach réelle pour fixer les idées . Alors on a des isomorphismes :

$$K(\mathcal{C}) \xrightarrow{p} K^{-8}(\mathcal{C}) \xrightarrow{t} K(D^8, S^7; \mathcal{C})$$

Nous ne reviendrons pas sur la définition de t donnée très en détail à la fin du § 3.4 . Quant à l'isomorphisme p il est défini ainsi : Si $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,on pose

$$p(E) = (E^{16}, v ; \varepsilon, -\varepsilon)$$

où $v \in C_{-8} \approx R(16)$ représente l'action naturelle de $R(16)$ sur E^{16} et où ε représente la graduation définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en écrivant E^{16} sous la forme $E^8 + E^8$,et compte tenu du fait que $C^0_{-8} \approx R(8) + R(8)$. L'application p définit alors un isomorphisme de $K(\mathcal{C})$ sur $K^{-8}(\mathcal{C})$ compte tenu du théorème 3.3.1 et des considérations générales du § 3.2 .

D'après la remarque qui conclut le § 3.4 , pour $v \in S^7$,la multiplication par v définit un automorphisme de E^{16} de degré 1 ,donc en particulier un automorphisme de E^8 que nous désignerons par α_v . Soit maintenant $\pi_8 : D^8 \longrightarrow$ Point et soit $\alpha_R(E)$ l'automorphisme de $\pi^* E^8$ défini au-dessus de chaque point $v \in S^7$ par α_v .

<u>Théorème 3.5.1 (Périodicité de Bott)</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle . Alors l'homomorphisme

$$\beta_R : K(\mathcal{C}) \longrightarrow K(D^8 , S^7 ; \mathcal{C}) \quad ,$$

induit par l'application $E \rightsquigarrow d(\pi_8^* E^8 , \pi_8^* E^8 , \alpha_R(E))$ de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ dans $K(D^8 , S^7 ; \mathcal{C})$, est un isomorphisme .

<u>Démonstration</u> : C'est une conséquence immédiate des considérations qui précèdent .

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach complexe ,désignons par $\alpha_C(E)$,$E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,l'automorphisme de $\pi_2^* E$, $\pi_2 : D^2 \longrightarrow$ Point ,défini au-dessus de chaque point $e^{i\theta} \in S^1$ par la multiplication par le nombre complexe $e^{i\theta}$. On a alors un théorème analogue au théorème 3.5.1 pour les catégories de Banach complexes et qui se démontre de la même manière :

<u>Théorème 3.5.1 bis</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach complexe. Alors l'homomorphisme

$$\beta_c : K(\mathcal{C}) \longrightarrow K(D^2, S^1; \mathcal{C}) \quad ,$$

induit par l'application $E \rightsquigarrow d(\pi_2^* E, \pi_2^* E, \alpha_c(E))$ de Ob $\mathcal{C}$ dans $K(D^2, S^1; \mathcal{C})$, est un isomorphisme.

<u>Remarque</u> : Atiyah et Bott ont donné une démonstration élémentaire du théorème 3.5.1 bis dans le cas particulier où $\mathcal{C}$ est la catégorie des fibrés vectoriels complexes de base compacte [ ]. Mais leurs raisonnements se transposent immédiatement dans notre cadre général. L'avantage de notre démonstration est évidemment d'avoir traité les théorèmes de périodicité réel et complexe en même temps.

Considérons maintenant les homomorphismes

$$K(\mathcal{C}_H) \xrightarrow{p'} K^{-4}(\mathcal{C}) \xrightarrow{t} K(D^4, S^3; \mathcal{C})$$

où on définit p' comme suit : On pose $p'(E) = d(E^2, v; \varepsilon, -\varepsilon)$ où $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_H$, où v représente l'action naturelle de $C_{-4} \approx H(2)$ sur E^2 et où ε représente la graduation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de $E^2 = E + E$, compte tenu du fait que $C^0_{-4} \approx H + H$.

Alors, d'après le théorème 3.3.1, p' définit un isomorphisme de $K(\mathcal{C}_H)$ sur $K^{-4}(\mathcal{C})$. Désignons par $\alpha_4(E)$ l'automorphisme de $\pi_4^* E$, $\pi_4 : D^4 \longrightarrow \mathrm{Point}$, défini qu-dessus de chaque point $v \in S^3$ par la multiplication par le quaternion de norme 1 associé à v .

Proposition 3.5.1 : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle . Alors l'homomorphisme

$$\beta_H : K(\mathcal{C}_H) \longrightarrow K(D^4, S^3; \mathcal{C})$$

induit par l'application $E \rightsquigarrow d(\pi_1^* E, \pi_2^* E, \alpha_H(E))$ de Ob $\mathcal{C}_H$ dans $K(D^4, S^3; \mathcal{C})$ est un isomorphisme .

Soit E un objet de $\mathcal{C}$. Alors E^4 est naturellement un H-module compte tenu de l'inclusion canonique de H dans R(4) (d'une manière générale de C_n dans $R(2^n)$) . Soit $\alpha'_H(E)$ l'automorphisme de $\pi_1^* E^4$ défini au dessus de chaque point $v \in S^3$ par la multiplication par le quaternion de norme 1 associé . Alors en écrivant les isomorphismes :

$$K(\mathcal{C}) \longrightarrow K^{-4}(\mathcal{C}_H) \xrightarrow{t} K(D^4, S^3; \mathcal{C}_H)$$

on démontre de même la proposition suivante :

Proposition 3.5.2 : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle . Alors l'homomorphisme

$$\beta'_H : K(\mathcal{C}) \longrightarrow K(D^4, S^3; \mathcal{C}_H)$$

induit par l'application $E \rightsquigarrow d(\pi_1^* E^4, \pi_2^* E^4, \alpha'_H(E))$ de Ob$\mathcal{C}$ dans $K(D^4, S^3; \mathcal{C}_H)$ est un isomorphisme .

Les théorèmes de périodicité de Bott s'écrivent aussi en termes "homotopiques" . La proposition suivante et son corollaire, dû à Wood ,rendent compte de ce point de vue .

<u>Proposition 3.5.3</u> : Soit A une algèbre de Banach réelle (resp. complexe) et soit $B_{GL(A)}$ l'espace classifiant du groupe linéaire infini de A ,i.e. la limite inductive du système inductif formé des espaces classifiants $B_{GL(A,n)}$ et des injections canoniques . Alors ,pour tout entier k , on a des équivalences d'homotopie faibles :

$$\Omega^{8k+1}B_{GL(A)} \approx GL(A) \qquad \Omega^{8k+5}B_{GL(A)} \approx GL(A_H)$$

$$\Omega^{8k+2}B_{GL(A)} \approx GL(A)/GL(A_C) \qquad \Omega^{8k+6}B_{GL(A)} \approx GL(A_H)/GL(A_C)$$

$$\Omega^{8k+3}B_{GL(A)} \approx GL(A_C)/GL(A_H) \qquad \Omega^{8k+7}B_{GL(A)} \approx GL(A_C)/GL(A)$$

$$\Omega^{8k+4}B_{GL(A)} \approx K(A_H)\times B_{GL(A_H)} \qquad \Omega^{8k+8}B_{GL(A)} \approx K(A)\times B_{GL(A)}$$

resp.

$$^{8k+1}B_{GL(A)} \approx GL(A) \qquad \Omega^{2k+2}B_{GL(A)} \approx K(A)\times B_{GL(A)}$$

(On pose GL(A) ,$GL(A_C)$,etc... = lim GL(A,n) ,lim $GL(A_C,n)$, etc ... Quant aux notations $GL(A)/GL(A_C)$,etc... elles s'expliquent par le fait que A_C est une sous-algèbre de A(2) donc $GL(A_C)$ est un sous-groupe de GL(A(2)) GL(A) .

<u>Corollaire (Wood)</u> : Soit A une algèbre de Banach réelle (resp. complexe) . Alors les groupes d'homotopie de GL(A) sont périodiques de période 8 (resp. 2) .

La proposition résulte des théorèmes de périodicité de Bott ,de la table des algèbres de Clifford (§ 3.1) ,du théorème 2.6.1 ,ainsi que des deux lemmes ci-dessous laissés en exercice au lecteur.

<u>Lemme 3.5.1</u> : Soit A une sous-algèbre fermée d'une algèbre de Banach B et soit φ le foncteur extension des scalaires de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(B)$ associé à l'inclusion $A \subset B$. Alors on a un isomorphisme canonique de $K_n(\varphi)$ sur $\pi_n(GL(B), GL(A))$ pour $n \geqslant 1$.

Cet isomorphisme peut être explicité comme suit : Puisque D^n est contractile, tout élément de $K_n(\varphi)$ $= K(D^n, S^{n-1}; \varphi)$ s'écrit $d(E, E; \alpha, \beta)$ où $E = D^n \times A^p$, $\beta : D^n \times B^p \longrightarrow D^n \times B^p$ est un B-isomorphisme, $\alpha : S^{n-1} \times A^p \longrightarrow S^{n-1} \times A^p$ est un A-isomorphisme tels que $\varphi\alpha = \beta|_{S^{n-1}}$. Les morphismes α et β déterminent alors $\gamma : D^n \longrightarrow GL(B)$ telle que $\gamma(S^{n-1}) \subset GL(A)$ donc un élément de $\pi_n(GL(B), GL(A))$.

<u>Lemme 3.5.2</u> : Avec les hypothèses du lemme 3.5.1, l'application canonique $(GL(B), GL(A)) \longrightarrow (GL(B)/GL(A), \text{Point})$ induit un isomorphisme de $\pi_n(GL(B), GL(A))$ sur $\pi_n(GL(B)/GL(A))$.

<u>Application</u> : Les fibrations $O(n-1) \to O(n) \to S^{n-1}$ et $U(n-1) \longrightarrow U(n) \longrightarrow S^{2n-1}$ montrent que $\pi_p(O(n-1)) \approx \pi_p(O(n))$ pour $n > p+2$ et $\pi_p(U(n-1)) \approx \pi_p(U(n))$ pour $n > p/2 + 1$. Les groupes $\pi_p(O) = \lim \pi_p(O(n))$ et $\pi_p(U) = \lim \pi_p(U(n))$ sont les <u>groupes d'homotopie stables</u> du groupe orthogonal et du groupe unitaire. Comme $O(n)$ et $U(n)$ sont des rétractes par déformation de $GL(n,R)$ et de $GL(n,C)$, les groupes précédents sont isomorphes aux groupes $\pi_p(GL(R))$ et $\pi_p(GL(C))$. Mais d'après le théorème 3.?.2 , si A est une algèbre

de Banach, on a $\pi_p(GL(A)) \approx K^{-p-1}(A)$. On trouve donc que les groupes d'homotopie précédents, qui sont évidemment périodiques en raison du corollaire de la proposition 3.4.3, s'expriment comme le groupe K de foncteurs très simples. A l'aide de la table des algèbres de Clifford ces groupes se calculent aisément. On trouve :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$K^{-p-1}(C)$	0	Z	0	Z	0	Z	0	Z	0
$\pi_p(U)$	0	Z	0	Z	0	Z	0	Z	0
$K^{-p-1}(R)$	Z_2	Z_2	0	Z	0	0	0	Z	Z_2
$\pi_p(O)$	Z_2	Z_2	0	Z	0	0	0	Z	Z_2

<u>Proposition 3.5.4</u> : Soit A une algèbre de Banach et soit $\mathcal{J}$ un idéal bilatère fermé contenu dans le radical de A. Alors la projection $A \longrightarrow A/\mathcal{J}$ induit un isomorphisme $K^n(A) \approx K^n(A/\mathcal{J})$ quelque soit n.

Il suffit évidemment de montrer que cette projection induit une équivalence d'homotopie de $GL(A)$ sur $GL(A/\mathcal{J})$ ou encore que la fibre de la fibration $GL(A) \longrightarrow GL(A/\mathcal{J})$ est contractile. Mais la fibre de la fibration $GL(A,n) \longrightarrow GL(A/\mathcal{J},n)$ est formée des matrices inversibles de la forme $1 + m$ où m est une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathcal{J}$. D'après le lemme de Nakayama la matrice $1 + tm$, $t \in [0,1]$ est aussi inversible. Donc l'homotopie $t \rightsquigarrow 1 + tm$

définit une rétraction par déformation de la fibre sur la matrice identité .

C.Q.F.D.

Remarque : D'après le raisonnement précédent la conclusion . de la proposition 3.5.1 est aussi vraie si $\mathcal{J}$ est un idéal nilpotent de A (non nécessairement contenu dans le radical de A) .

Remarque 2 : Supposons que A soit une algèbre de dimension finie sur R et soit $\mathcal{J}$ le radical de A . Alors $\mathcal{J}$ est un idéal fermé de A et $A/\mathcal{J}$ est une algèbre semi-simple i.e. somme directe d'algèbres de matrices sur R ,C ou H . En particulier on a $K^1(A) = K^5(A) = 0$.

On dit que $\mathcal{C}$ est une catégorie vectorielle de dimension finie si $\forall$ M et N $\in$ Ob$\mathcal{C}$,Hom(M ,N) est un espace vectoriel de dimension finie . Par passage à la limite inductive on déduit de la remarque précédente le corollaire suivant :

Corollaire : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie vectorielle de dimension finie alors $K^1(\mathcal{C}) = K^5(\mathcal{C}) = 0$.

Si $\varphi - \psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur virtuel linéaire continu entre deux catégories de Banach nous définirons plus tard les groupes $K^n(\varphi - \psi)$ attachés à ce foncteur . Signalons cependant le cas particulier suivant : $\psi = 0$ et φ est un T-foncteur . Alors on définit $K^n(\varphi)$ comme le groupe K^n du "mapping-cylinder" de φ qui est un ST-foncteur . En particulier la suite exacte du début de ce paragraphe se généralise aux T-foncteurs . Considérons par exemple la suite exacte associée au foncteur "restriction des scalaires" $\varphi : \mathcal{C}_{-n-2} \longrightarrow \mathcal{C}_{-n-1}$.

$$K(\mathcal{C}_{-n-2}) \longrightarrow K(\mathcal{C}_{-n-1}) \longrightarrow K^1(\varphi) \longrightarrow K^1(\mathcal{C}_{-n-2})$$

Alors $K^1(\varphi) \simeq K_7(\varphi) \approx K^{-n}(\mathcal{C})$. Supposons maintenant que la catégorie vectorielle $\mathcal{C}$ soit de dimension finie . Alors d'après le corollaire précédent $K^1(\mathcal{C}_{-n-2}) = 0$. D'autre part la catégorie des C_{-p-1}-modules est isomorphe à la catégorie des C_{-p}-modules gradués qui est elle-même isomorphe à la catégorie des C_p-modules gradués ou enfin à la catégorie des C_{p-1}-modules De manière précise on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{-n-2} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{-n-1} \\ \wr & & \wr \\ \mathcal{C}_{n} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{n-1} \end{array}$$

où les flèches horizontales représentent des foncteurs restriction des scalaires . On en déduit la proposition suivante :

<u>Proposition 3.5.5</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie vectorielle de dimension finie . Alors $K^{-n}(\mathcal{C})$ s'identifie au conoyau de l'homomorphisme de restriction naturel

$$K(\mathcal{C}_n) \longrightarrow K(\mathcal{C}_{n-1})$$

Cette proposition est intéressante dans les deux cas particuliers suivants : $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur R ,C ou H . On retrouve alors un résultat d'Atiyah ,Bott et Shapiro [ ] . Le deuxième cas particulier est celui où $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur R ,C ou H où un groupe topologique G opère . Si on désigne par R^n les groupes K^n de cette catégorie on a donc $R^1(G) = R^5(G) = 0$. On retrouve ainsi le résultat de l'exercice 2 de la fin du § 3.3 .

Dans le § 4.1 nous expliciterons dans un cadre plus général l'isomorphisme de ce conoyau sur $K^{-n}(\mathcal{C})$.

<u>Proposition 3.5.6</u> : Soit A une algèbre de Banach complexe (resp. réelle) . Alors $\pi_{2n-1}(GL(A)) \approx K(A)$ (resp. $\pi_{8n-1}(GL(A)) \approx K(A)$. En particulier $\pi_{2n-1}(GL(A))$ (resp. $\pi_{8n-1}(GL(A))$ ne dépend pas de la topologie de A .

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.5.3 . En fait à l'aide de la proposition 3.5.7 voici comment on peut expliciter ces isomorphismes dans le cas complexe pour fixer les idées : Choisissons un générateur de $\pi_{2n-1}(GL(C)) \approx Z$ soit $\alpha : S^{2n-1} \to U(p)$ Considérons maintenant un A-module projectif de type fini E et choisissons un module supplémentaire E' de E tel que $E + E'$ soit libre . Soit $f : E + E' \longrightarrow A^q$ un isomorphisme . Alors l'application de S^{2n-1} dans $GL(A , q)$ définie par la matrice

$$f\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}f^{-1}$$

définit un élément $\alpha(E)$ de $\widetilde{\pi}_{2n-1}(GL(A))$. La correspondance $E \rightsquigarrow \alpha(E)$ définit l'isomorphisme cherché .

Corollaire : Soit H un espace de Hilbert complexe séparable et soit A l'algèbre de Banach End H . Alors $\widetilde{\pi}_i(GL(A)) = 0$ quel que soit i .

D'après la proposition précédente il suffit de vérifier que $K(A) = \widetilde{\pi}_0(GL(A)) = 0$. En effet $K(A)$ est isomorphe au groupe de Grothendieck de la catégorie des espaces vectoriels hilbertisables . Or si E est un tel espace vectoriel $E + H \approx H$ donc sa classe dans $K(A)$ est nulle . D'autre part $\pi_0(GL(A,n)) \simeq \pi_0((\text{End } H^n)^*)$ $\pi_0((\text{End } H)^*) = 0$ car $(\text{End} H)^*$ est connexe .

Remarque 1 : A l'aide de la théorie KC d'Anderson convenablement généralisée (cf chapitre IV) on montre que si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach réelle pour que $K^i(\mathcal{C}) = 0$ il faut et il suffit que $K^i(\mathcal{C}_1) = 0$. On en déduit que le corollaire précédent est vrai aussi pour un espace de Hilbert réel .

Remarque 2 : Le corollaire est en fait une version affaiblie d'un théorème de Kuiper [ ] . Ce théorème affirme ,sans passage à la limite inductive ,que les groupes d'homotopie $\pi_i((\text{End } H)^*)$ sont nuls (dans le cas réel et complexe) .

D'après le théorème fondamental le groupe $K_n^n(k)$, $k = R$ ou C , est isomorphe à Z et un générateur s'écrit $d(\pi^* k^p , \pi^* k^p , \alpha)$ où k^p est muni d'une structure de C_n-module gradué et où α est un automorphisme de $\pi^* k^p$, $\pi : D^n \longrightarrow \text{Point}$, qui est de degré zéro au-dessus de S^{n-1} . Soit maintenant $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach . Pour tout objet E de $\mathcal{C}$ considérons avec des notations évidentes , l'élément $\gamma(E) = d(E \otimes k^p , E \otimes k^p , Id \otimes \alpha)$ de $K_n^n(\mathcal{C})$.

<u>Proposition 3.5.7</u> : La correspondance $E \rightsquigarrow \gamma(E)$ définie ci-dessus induit un isomorphisme de $K(\mathcal{C})$ sur $K_n^n(\mathcal{C})$.

En effet l'homomorphisme précédent est le composé de n isomorphismes obtenus en appliquant n fois le théorème fondamental :

$$K(\mathcal{C}) \longrightarrow K_1^1(\mathcal{C}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_n^n(\mathcal{C})$$

<u>Corollaire</u> : Soit A une algèbre de Banach et soit A_n l'algèbre de Banach $A \hat{\otimes} C_n$. Alors $\pi_n(GL(A_n) , GL(A_{n-1}))$ est isomorphe au groupe de Grothendieck de A (A_{n-1} est canoniquement une sous-algèbre fermée de A_n) .

<u>Remarque</u> : En fait le corollaire précédent est un cas particulier d'un théorème sur les algèbres de Banach graduées [illegible] : Si A est une algèbre de Banach graduée désignons par $\hat{K}(A)$ le groupe K du foncteur $\mathcal{P}(A^0) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ et plus généralement par $\hat{K}_n(A)$ le gorupe K_n de φ . Désignons aussi par A_n

l'algèbre graduée $A \hat{\otimes} C_n$. Alors $\hat{K}(A)$ est isomorphe à $\hat{K}_n(A_n)$. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette assertion à titre d'exercice à l'aide de ce qui précède .

3.6 Structures multiplicatives

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ trois catégories additives et soit $\varphi : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ un foncteur bilinéaire i.e. un foncteur vérifiant les propriétés suivantes :

- $\varphi(E_1+E_2,E') \simeq \varphi(E_1,E') + \varphi(E_2,E')$
- $\varphi(E\ ,E_1'+E_2') \simeq \varphi(E\ ,E_1') + \varphi(E\ ,E_2')$
- L'application de $\mathrm{Hom}(E_1,E_2) \times \mathrm{Hom}(E_1',E_2')$ dans $\mathrm{Hom}(\varphi(E_1,E_1'),\varphi(E_2,E_2'))$ déduite de la fonctorialité de φ est bilinéaire.

Alors φ induit une application bilinéaire de $K(\mathcal{C}) \times K(\mathcal{C}')$ dans $K(\mathcal{C}'')$.

Exemple 1 : Soient A et B deux k-algèbres. Alors le produit tensoriel des modules définit un foncteur bilinéaire de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ dans $\mathcal{P}(A \otimes B)$. Si A et B sont deux algèbres de Banach et si $A \hat{\otimes} B$ est une algèbre de Banach pour une topologie convenable du produit tensoriel complété on a aussi un foncteur bilinéaire évident de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ dans $\mathcal{P}(A \hat{\otimes} B)$.

Exemple 2 : Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie additive et soit V la catégorie dont les objets sont les k-modules libres de type fini k^n et dont les morphismes sont les morphismes de k-modules. Alors on définit un foncteur bilinéaire φ de $\mathcal{C} \times V$ dans $\mathcal{C}$ comme suit : $\varphi(E\ ,k^n) = E^n$ et si $\alpha : E \longrightarrow F$ est un morphisme de et $\beta : k^n \longrightarrow k^p$ un morphisme de k-modules représenté par une matrice (β_{ij}) , $i = 1,\dots,p$, $j = 1,\dots,n$ alors la matrice $(\alpha\beta_{ij})$ représente un morphisme de E^n dans F^n qu'on note $\varphi(\alpha,\beta)$.

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ soient des catégories vectorielles topologiques et que que φ soit un foncteur bilinéaire continu i.e. que l'application de $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \times \mathrm{Hom}(E'_1, E'_2)$ dans $\mathrm{Hom}(\varphi(E_1,E'_1), \varphi(E_2,E'_2))$ soit bilinéaire et continue. Alors φ va induire de manière évidente un foncteur bilinéaire de $\mathcal{C}_T(X) \times \mathcal{C}'_T(Y)$ dans $\mathcal{C}''_T(X \times Y)$ pour toute paire d'espaces topologiques (X, Y) . Par universalité on obtient ainsi un foncteur de $\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}'(Y)$ dans $\mathcal{C}''(X \times Y)$. Si X, Y et $X \times Y$ sont paracompacts ce foncteur est bilinéaire continu . D'après ce qui précède on peut ainsi définir une application naturelle bilinéaire de $K(X ; \mathcal{C}) \times K(Y ; \mathcal{C}')$ dans $K(X \times Y ; \mathcal{C}'')$.

On désire étendre cette application en une application naturelle bilinéaire de $K(X,X';\mathcal{C}) \times K(Y,Y';\mathcal{C}')$ dans $K(X \times Y, X \times Y' \cup X' \times Y ; \mathcal{C}'')$. Nous ne pourrons faire cette extension que dans deux cas particuliers :

a) $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont des catégories prébanachiques et les espaces considérés sont compacts .

b) $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont des catégories vectorielles topologiques arbitraires mais les espaces considérés sont des polyèdres finis .

<u>Théorème 3.6.1</u> : Sous les hypothèses a) ou b) ci-dessus il existe une application bilinéaire et une seule

$$K(X,X';\mathcal{C}) \times K(Y,Y';\mathcal{C}') \longrightarrow K(X \times Y, X \times Y' \cup X' \times Y;\mathcal{C}'')$$

qui soit naturelle et qui coïncide avec c quand $X' = Y' = \emptyset$.

Pour démontrer le théorème on aura besoin des deux lemmes suivants :

<u>Lemme 3.6.1</u> : Soit X un espace paracompact et soit x_0 un point de X . Alors la suite naturelle

$$0 \longrightarrow K(X,\{x_0\}) \longrightarrow K(X) \longrightarrow K(\{x_0\}) \longrightarrow 0$$

est exacte et scindée ,le groupe K étant pris à coefficients dans une catégorie vectorielle topologique quelconque (1) .

<u>Lemme 3.6.2</u> : Soient X et Y deux espaces paracompacts pointés tels que $X \times Y$ soit paracompact . Alors ,avec les notations précédentes ,la suite naturelle

$$0 \longrightarrow K(X \times Y, X \vee Y) \xrightarrow{j^*} K(X \times Y) \xrightarrow{i^*} K(X \vee Y) \longrightarrow 0$$

est exacte et scindée .

Nous ne démontrerons que le lemme 3.6.2 ,le lemme 3.6.1 se démontrant par une méthode analogue . Rappelons pour cela l'existence d'une suite exacte

$$K_1(X \times Y) \xrightarrow{i_1^*} K_1(X \vee Y) \longrightarrow K(X \times Y, X \vee Y) \longrightarrow K(X \times Y) \xrightarrow{i^*} K(X \vee Y) \qquad \text{(p. 3.6.1)}$$

(1) Nous ferons souvent cet abus d'écriture par la suite .

Soit π_X (resp. π_Y , π_{z_0}) la projection canonique de $X \times Y$ sur X (resp. Y , z_0 ,z_0 étant le point base de $X \times Y$). Alors si $\rho : K(X \vee Y) \longrightarrow K(X \times Y)$ est l'homomorphisme défini par

$$\rho(E) = \pi_X^* E_X + \pi_Y^* E_Y - \pi_{x_0}^* E_x$$

on a $i^*.\rho = \mathrm{Id}$. Ceci montre la surjectivité de i^* .

Considérons d'autre part l'homomorphisme de $K_1(X \vee Y)$ dans $K_1(X \times Y)$ défini par

$$\rho_1(E,\alpha) = (\pi_X^* E_X + \pi_Y^* E_Y + \pi_{z_0}^* E_{z_0} , \pi_X^* \alpha_X + \pi_Y^* \alpha_Y + \pi_{z_0}^* \alpha_{z_0}^{-1})$$

Alors on a $i_1^*.\rho_1 = \mathrm{Id}$. Ceci montre l'injectivité de j^* .

C.Q.F.D.

<u>Démonstration du théorème</u> : En raison du théorème d'excision, valable sous les hypothèses a) ou b) ,on peut supposer que X' et Y' sont réduits à un point x_0 et y_0 respectivement . Considérons alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] \\
K(X, x_0) \otimes K(Y, y_0) \arrow[d] \arrow[rr, dotted] & & K(X \times Y, X \vee Y) \arrow[d] \\
K(X) \otimes K(Y) \arrow[rr] & & K(X \times Y) \arrow[d] \\
& & K(X \vee Y) \arrow[d] \\
& & 0
\end{tikzcd}$$

En raison des lemmes précédents il existe une homomorphisme $\bar{c} : K(X , x_0) \otimes K(Y , y_0) \longrightarrow K(X \times Y , X \vee Y)$ et un seul qui rend le diagramme commutatif . Ceci achève la démonstration du théorème .

Désormais ,pour allèger l'écriture ,nous représenterons par un produit tensoriel $\otimes$ le foncteur $\varphi : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$. Ainsi ,si E (resp. F) est un objet de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) ,on note $E \otimes F$ l'objet $\varphi(E,F)$.

<u>Proposition 3.6.1</u> : Supposons $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ et que le foncteur φ soit "symétrique" i.e. que $E \otimes F \approx F \otimes E$ quels que soient les objets E et F de $\mathcal{C}$. Alors la structure multiplicative définie par le théorème 3.6.1 est commutative . De même supposons donné un foncteur "trilinéaire" continu $\mathcal{C} \times \mathcal{C}' \times \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathcal{C}'''$ associatif en le sens que $(E \otimes F) \otimes G \approx E \otimes (F \otimes G)$. Alors les considérations précédentes se généralisent immédiatement au foncteurs trilinéaires (et même n-linéaires) et la structure multiplicative définie par le théorème 3.6.1 est "associative " .

La démonstration de cette proposition est immédiate .

Si $x \in K(X,X')$ et $y \in K(Y,Y')$ on note $x \smile y$ l'élément de $K(X \times Y , X \times Y' \smile X' \times Y)$ qui lui correspond . Soit d'autre part s_n l'isomorphisme d'identification de $K_n(Z,Z')$ avec $K(Z \times D^n , Z \times S^{n-1} \smile Z' \times D^n)$

On définit alors de manière évidente une application bilinéaire :

$$K_n(X, X') \times K_p(Y, Y') \longrightarrow K_{n+p}(X \times Y, X \times Y' \cup X' \times Y)$$

par $x \smile y = s_n x \smile s_p y$.

<u>Lemme 3.6.3</u> : Supposons que $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ et que $\mathcal{C}$ soit commutatif . Alors la multiplication définie ci-dessus est anticommutative .i.e. si $x \in K_n$ (resp. $y \in K_p$), $x \smile y = (-1)^{np} y \smile x$.

Pour n ou p = 0 il n'ya rien à démontrer . Pour n et p $\neq 0$,les groupes K_n et K_p s'expriment comme des groupes d'homotopie de systèmes inductifs classifiants. On est alors ramené au problème suivant : Soit $\sigma : D^{n+p} \longrightarrow D^{n+p}$ l'application définie par $(x_1, \ldots, x_{n+p}) = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}, x_1, \ldots, x_p)$; soit d'autre part Z un espace topologique pointé de point base z_0 ; si $f : D^{n+p} \longrightarrow Z$ est telle que $f(S^{n+p-1}) = z_0$ alors $(f.\sigma)(S^{n+p-1}) = z_0$; démontrer alors que la correspondance $f \rightsquigarrow f.\sigma$ est un automorphisme de $\pi_{n+p}(Z)$ défini par la multiplication par $(-1)^{np}$. Or ceci est clair en raison de la définition de la loi de groupe sur $\pi_{n+p}(Z)$.

Envisageons maintenant le cas où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des catégories de Banach . Alors on a des isomorphismes canoniques $t_n : K^{-n} \longrightarrow K_n$. Ces isomorphismes permettent de définir une application bilinéaire

$$K^{-n}(X, X') \times K^{-p}(Y, Y') \longrightarrow K^{-n-p}(X \times Y, X \times Y' \cup X' \times Y)$$

par la formule $x \smile y = t_{n+p}^{-1}(t_n x \smile t_p y)$. En utilisant maintenant les isomorphismes de périodicité $K^n \approx K^{n+8}$ (resp. $K^n \approx K^{n+2}$)dans le cas réel (resp. complexe) on définit une application bilinéaire

$$K^n(X,X') \times K^p(Y,Y') \xrightarrow[(1)]{} K^{n+p}(X \times Y, X \times Y' \cup X' \times Y)$$

pour n et $p \in Z$. En particulier on obtient ainsi une application bilinéaire

$$K^n(\mathcal{C}) \times K^p(\mathcal{C}') \longrightarrow K^{n+p}(\mathcal{C}'')$$

qui étend le "cup-produit" initial de $K(\mathcal{C}) \times K(\mathcal{C}')$ dans $K(\mathcal{C}'')$.

les définitions précédentes ne sont pas entièrement satisfaisantes pour la raison essentielle qu'on n'a pas de formule explicite pour les cup-produits envisagés en général . Nous allons tacher d'y remédier partiellement dans ce qui va suivre ; ceci aura une certaine importance pour les applications que nous avons en vue .

Définissons une application bilinéaire

$$K^o(X,X') \times K^o(Y,Y') \longrightarrow K^o(X \times Y, X \times Y' \quad X' \times Y)$$

par la formule

$$d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \quad d(F, \eta^1, \eta^2) = d(E \otimes F, \zeta^1, \zeta^2)$$

avec :

$$2\zeta^1 = (1 + \varepsilon^1) \otimes \eta^1 + (1 - \varepsilon^1) \otimes \eta^2$$

$$2\zeta^2 = (1 + \varepsilon^2) \otimes \eta^1 + (1 - \varepsilon^2) \otimes \eta^2$$

Pour cette formule ait aun sens il faut faire les véri-

---

1) ou $K^{n,n'}(X,X') \times K^{p,p'}(Y,Y') \to K^{n+p,n'+p'}(X \times Y, X \times Y' \cup X' \times Y)$ pour n,n',p et $p' \geq 0$ plus généralement .

fications suivantes qui sont aisées :

- ζ^1 et ζ^2 sont des graduations de $E \otimes F$

- Si $\varepsilon^1_x = \varepsilon^2_x$ (resp. $\eta^1_y = \eta^2_y$) en un point x de X (resp. y de Y) alors $\zeta^1_{x,y'} = \zeta^2_{x,y'}$ $\forall y' \in Y$ (resp. $\zeta^1_{x',y} = \zeta^2_{x',y}$ = $\forall x' \in X$) .

- L'application définie par la formule est bilinéaire.

Au moyen des isomorphismes $K^o \simeq K$,cette application définit une application bilinéaire de $K(X,X') \times K(Y,Y')$ dans $K(X \times Y, X \times Y' \cup X' \times Y)$. On va vérifier qu'elle coïncide avec l'application définie plus haut . Pour cela ,d'après le théorème 3.6.1 il suffit de le vérifier pour $X' = Y' = \emptyset$. Rappelons que dans ce cas l'isomorphisme $K(Z) \to K^o(Z)$ s'explicite comme suit : Si $E - F \in K(Z)$ on lui associe $d(E+F, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ où ε^1 et ε^2 sont les graduations définies par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon^2 = -\varepsilon^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mais si dans les formules précédentes on fait $\varepsilon^2 = -\varepsilon^1$ et $\eta^2 = -\eta^1$ on trouve $\zeta^1 = -\zeta^2 = \varepsilon^1 \otimes \eta^1$. On a ainsi démontré la proposition suivante :

<u>Proposition 3.6.2</u> : L'application bilinéaire

$$K^o(X,X') \times K^o(Y,Y') \longrightarrow K^o(X \times Y, X \times Y' \cup X' \times Y)$$

définie plus haut coïncide ,grace aux isomorphismes $K \simeq K^o$,avec l'application bilinéaire définie dans l'énoncé du théorème 3.6.1 .

Remarque : Posons de même

$$d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \smile d(F, \eta^1, \eta^2) = d(E \otimes F, \xi^1, \xi^2)$$

avec

$$2\xi^1 = \varepsilon^1 \otimes (1 + \eta^1) + \varepsilon^2 \otimes (1 - \eta^1)$$

$$2\xi^2 = \varepsilon^1 \otimes (1 + \eta^2) + \varepsilon^2 \otimes (1 - \eta^2)$$

Alors un raisonnement analogue au précédent montre que ces formules permettent de retrouver l'application bilinéaire du théorème 3.6.1 ,donc de la proposition 3.6.2 ,ce qui n'est pas évident à priori .

On peut évidemment espérer définir de manière aussi explicite une application bilinéaire

$$K^{n,n'}(X,X') \times K^{p,p'}(Y,Y') \rightarrow K^{n+p,n'+p'}(X \times Y, X \times Y' \; X' \times Y)$$

qui coïncide avec l'application (1) . Malheureusement l'auteur avoue ne pas y être parvenu . Considérons cependant le sous-groupe $T^{p,p'}(Y)$ de $K^{p,p'}(Y)$ formé des éléments s'écrivant $d(E, w ; \eta, -\eta)$ où w représente , par abus de langage, l'action du vecteur $w \in k^{p+p'} \subset C_{p,p'}$ et où ε et $-\varepsilon$ représentent deux graduations opposées de E . Alors, si $d(E, v ; \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ est ,avec les mêmes notations , un élément de $K^{n,n'}(X,X')$ posons

$$d(E, v ; \varepsilon^1, \varepsilon^2) \smile d(F, w ; \eta, -\eta) = d(E \otimes F, v \otimes \eta, 1 \otimes w, \varepsilon^1 \otimes \eta, \varepsilon^2 \otimes \eta)$$

Cette définition aura un sens une fois démontrée la proposition suivante :

Proposition 3.6.3 : La classe de $(E \otimes F, v \otimes \eta, 1 \otimes w, \varepsilon^1 \otimes \eta, \varepsilon^2 \otimes \eta)$ dans $K^{n+p,n'+p'}(X \times Y, X' \times Y)$ ne dépend que de la classe de $(E, v, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ (resp. $(F, w; \eta, -\eta)$) dans $K^{n,n'}(X,X')$ (resp. $K^{p,p'}(Y)$) . L'application

$$K^{n,n'}(X,X') \times T^{p,p'}(Y) \longrightarrow K^{n+p,n'+p'}(X \times Y, X' \times Y)$$

ainsi définie est bilinéaire et est induite par (1) sur le sous-ensemble $K^{n,n'}(X,X') \times T^{p,p'}(Y)$.

Pour démontrer la proposition ,en raison des propriétés élémentaires des groupes $K^{r,s}$ et plus précisément des isomorphismes $K^{r,s} \approx K^{r+1,s+1}$ et $K^{r+4,s} \approx K^{r,s+4}$ valables aussi pour les groupes T ,il suffit de se limiter à $n = p = 0$. D'autre part posons $V = R^{n'}$,$W = R^{p'}$. Avec les notations de la fin du paragraphe 3.4 ,on va expliciter un homéomorphisme h de $S^+(V+1) \times S^+(W+1)$ sur $S^+(V+W+1)$ qui va induire un homéomorphisme de $S(V) \times S^+(W+1) \smile S^+(V+1) \times S(W)$ sur $S(V+W+1)$: A un couple $(v\cos\theta + \varepsilon \sin\theta, w \cos\alpha + \eta \sin\alpha)$ où $v \in S(V)$,$w \in S(W)$, ε est le vecteur unité de la $(n'+1)$-coordonnée de $V+1$, η est le vecteur unité de la $(p'+1)$-coordonnée de $W+1$,on associe l'élément$(v \cos\theta + \zeta \sin\theta)\sin\alpha + w \cos\alpha$, ζ étant le vecteur unité de la $(n'+p'+1)$-coordonnée de $V+W+1$. (θ et $\alpha \in [0, \pi/2]$) . Toujours aved les notations du § 3.4 , il suffit pour démontrer la proposition de vérifier la relation :

$$t(d(E,v;\varepsilon^1,\varepsilon^2)) \smile t(d(F,w;\eta,-\eta)) = t(d(E\otimes F, v\otimes\eta, 1\otimes w, \varepsilon^1\otimes\eta, \varepsilon^2\otimes\eta\ )$$

Mais on a (Cf § 3.4) :

$$t(d(E,v;\varepsilon^1,\varepsilon^2)) = d(E, v\cos\theta + \varepsilon^1\sin\theta, v\cos\theta + \varepsilon^2\sin\theta)$$

$$t(d(F,w;\eta,-\eta)) = d(F, w\cos\alpha + \eta\sin\alpha, w\cos\alpha + \eta\sin\alpha)$$

3.6
11

Le membre de gauche est donc égal à $d(E \otimes F, \xi^1, \xi^2)$ avec :

$$\xi^1 = (v \cos\theta + \varepsilon^1 \sin\theta) \otimes \eta \sin\alpha + (1 \otimes w) \cos\alpha$$

$$\xi^2 = (v \cos\theta + \varepsilon^2 \sin\theta) \otimes \eta \sin\alpha + (1 \otimes w) \cos\alpha$$

(Cf Prop. 3.6.2)

Avec les conventionsdu § 3.4 , "ξ^i" représente la graduation égale à ξ^i au point (v,θ,w,α) de $S^+(V+1) \times S^+(W+1)$. La proposition résulte alors immédiatement de la définition de l'homéomorphisme h .

<u>Remarque 1</u> : On définit de la même manière une application bilinéaire :

$$T^{n,n'}(X) \times K^{p,p'}(Y,Y') \longrightarrow K^{n+p,n'+p'}(X \times Y, X \times Y')$$

par la formule

$$d(E,v;\varepsilon,-\varepsilon) \smile d(F,w;\eta^1,\eta^2) = d(E \otimes F, v \otimes 1, \varepsilon \otimes w, \varepsilon \otimes \eta^1, \varepsilon \otimes \eta^2)$$

et on vérifie qu'elle est aussi induite par (1) .

<u>Remarque 2</u> : Si k = R (resp. k = C) et si n - n' est multiple de 4 (resp. multiple de 2) il résulte des calculs du § 3.3 que $T^{n,n'}(Y) = K^{n,n'}(Y)$.

Si Y est réduit à un point et si $\mathcal{C}'$ est la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie ,on a aussi $T^{n,n'} = K^{n,n'}$ $\forall$ n ,n' . Par contre si n-n' est impair et si $\mathcal{C}'$ est une catégorie de Banach complexe (resp. réelle) le lecteur s'exercera à démontrer que $T^{n,n'}(\mathcal{C}') = 0$ (resp. tout élément de $T^{n,n'}(\mathcal{C}')$ est d'ordre 2): En considérant la catégorie $\mathcal{C}'$ des fibrés vectoriel de dimension finie sur S^1 on en déduira que $T^{n,n'}(\mathcal{C}') \neq K^{n,n'}(\mathcal{C}')$ en général .

(A suivre)

5.1 K-théorie réelle et K-théorie complexe

Commençons par énoncer quelques sorites bien connus sur les théories cohomologiques représentables :
(Cf [ ] [ ]) .

Soit $[X_n]$, $n \in Z$, une suite d'espaces topologiques pointés et soient $e_n : X_n \longrightarrow \Omega X_{n+1}$ des équivalences d'homotopie faibles . Une telle donnée (X_n , e_n) est appelé un <u>spectre</u> [ ] . Si Y est un CW-complexe fini et si Z est un sous-complexe ,on pose $h^n(Y , Z) = [Y/Z , X_n]$ (ensemble des classes d'homotopie d'applications continues entre espaces à point base) . Alors $h^n(Y , Z)$ peut être muni d'une structure de groupe abélien induite par l'équivalence d'homotopie $\Omega^2 X_{n+2} \sim X_n$. Définissons un opérateur cobord

$$\partial^{n-1} : h^{n-1}(Z) \longrightarrow h^n(Y , Z)$$

de la manière suivante : si $x : Z \longrightarrow X_n$ représente un élément de $h^{n-1}(Z)$, $e_n . x$ définit par dualité une application continue $\tilde{x} : Z \times [0 , 1] \longrightarrow X_n$ telle que $\tilde{x}(z , 0) = \tilde{x}(z , 1) =$ Point . D'après le théorème de prolongement des homotopies ,il existe $\tilde{x}' : Y \times [0 , 1] \longrightarrow X_n$ tel que $\tilde{x}'(y , 0) =$ Point et $\tilde{x}'(z , t) = \tilde{x}(z , t)$ pour $z \in Z$. Alors $\partial^{n-1}(x) = \tilde{x}'(y , 1)$ représente une application continue $\tilde{y}$ de Y dans X_n telle que $\tilde{y}(Z) =$ Point ,soit un élément de $h^n(Y , Z)$. On vérifie aisément que les foncteurs (contravariants) h^n ,munis des opérateurs cobords ∂^n , forment une théorie de la cohomologie vérifiant tous les axiomes d'Eilenberg-Steenrod excepté l'axiome de dimension . Réciproquement d'ailleurs ,Brown [ ] a montré que toute théorie cohomologique h^* est représentable par un spectre (i.e. construite de la manière qu'on vient de décrire) si les ensembles h^n(Point) sont dénombrables .

Exemple : Soit A une algèbre de Banach et soit $A^{p,q} = A\otimes C^{p,q}$. Posons

$$X_{p,q} = K^{p,q}(A) \times (GL(A^{p+1,q+1})/GL(A^{p,q+1})^o$$

où ^{o} désigne la composante neutre . Définissons une applications continue (comparer avec Wood [ ])

$$h_{p,q+1} : X_{p,q+1} \longrightarrow \Omega\ X_{p,q}$$

de la manière suivante . Si $x \in (GL(A^{p+1,q+2})/GL(A^{p,q+1}))^o$, on pose

$h_{p,q}(x)(\alpha) = \tilde{x}^{-1}(\cos\alpha + \varepsilon_{q+1}\varepsilon_{q+2}\sin\alpha)\tilde{x}(\cos\alpha - \varepsilon_{q+1}\varepsilon_{q+2}\sin\alpha)$
où $\tilde{x}$ est un représentant de x dans $GL(A^{p+1,q+2})$ et où $\alpha \in [0 ,\pi/2]$. Si $a \in K^{p,q+1}(A)$,$wa \in K_1^{p,q}(A)$ $\approx \pi_1(GL(A^{p+1,q+1})/GL(A^{p,q+1}))$; chosissons un représentant $h_{p,q}(a)$ de wa dans $\Omega(GL(A^{p+1,q+1})/GL(A^{p,q+1}))$. Ces définitions étant posées ,on pose enfin $h_{p,q}(a , x)$ $= h_{p,q}(a) . h_{p,q}(x)$ (loi de composition dans l'espace des lacets) . D'après les § 4.4 et 4.5 ,$h_{p,q}$ est une équivalence d'homotopie faible et ,si X est un espace

compact ,$K^{p,q}(X\ ;A)$ est isomorphe naturellement à $[X/\phi\ ,X_{p,q}]$. Remarquons aussi que $X_{p,q}$ est homéomorphe à $X_{p+1,q+1}$ et qu'il en est de même de $X_{p+4,q}$ et $X_{p,q+4}$ (resp. $X_{p+1,q}$ et $X_{p,q+1}$) si $k = \mathbb{R}$ (resp. $k = \mathbb{C}$) .

Pour $n \geqslant 0$,posons $X_{-n-1} = X_{0,n+1}$,$h_{-n-1} = h_{0,n+1}$, $X_n = X_{n,0}$,h_n étant le composé

$$X_{n,0} \xrightarrow{\approx} X_{n+1,1} \longrightarrow \Omega\ X_{n+1,0}$$

La théorie cohomologique obtenue par le spectre $(X_n\ ,e_n)$ est isomorphe à la théorie cohomologique $K^n(\ ;A)$. On obtient de même la théorie cohomologique $K^n(\ ;\mathcal{C})$, étant une catégorie de Banach quelconque ,en considérant des systèmes inductifs convenables (Cf § 2.6) .

Soit W la catégorie des CW-complexes finis à point base (1) . Une théorie cohomologique sur W est la donnée suivante :

a) Pour tout objet X de W ,et tout entier n ,on a un groupe abélien $\check{h}^n(X)$ tel que ,pour tout sous-complexe Y de X ,on a la suite exacte

$$\check{h}^n(X/Y) \xrightarrow{j^*} \check{h}^n(X) \xrightarrow{i^*} \check{h}^n(Y)$$

où $i : Y \longrightarrow X$ est le monomorphisme canonique et où $j : X \longrightarrow X/Y$ est la projection canonique . Les groupes h^n sont donc des foncteurs semi-exacts au sens de Dold [ ] .

---

(1) Les morphismes étant les classes d'homotopie d'applications continues .

b) Pour tout objet X de W et tout entier n ,on se donne un isomorphisme

$$s_n = s_n(X) \ : \ h^n(X) \longrightarrow h^{n+1}(SX)$$

où SX désigne la suspension de X ,dépendant fonctoriellement de X .

Si h est une théorie cohomologique ordinaire , définie sur les paires de CW-complexes finis ,elle détermine une théorie de la cohomologie $\tilde{h}$ réduite sur W . En effet ,si $X \in \mathrm{ob}\, W$ et si x_0 est le point base de X ,on pose $\tilde{h}^n(X) = \mathrm{Ker}(h^n(X) \longrightarrow h^n(\{x_0\}))$. Quant à l'isomorphisme $s_n : \tilde{h}^n(X) \longrightarrow \tilde{h}^{n+1}(SX)$,il est déterminé par la suite exacte de cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc}
\tilde{h}^n(CX) & \to & \tilde{h}^n(X) & \xrightarrow{\delta} & h^{n+1}(CX\ ,X) & \longrightarrow & \tilde{h}^{n+1}(CX) \\
\| & & & \searrow^{s} & \| & & \| \\
0 & & & & \tilde{h}^{n+1}(CX/X) & & 0
\end{array}$$

où CX désigne le cone au-dessus de X ,CX/X étant identifié à la suspension de X .

Réciproquement si $\tilde{h}$ est une théorie cohomologique réduite ,posons $h^n(X\ ,Y) = \tilde{h}^n(X/Y)$. Pour définir l'opérateur cobord $\delta^{n-1} : h^{n-1}(Y) \longrightarrow h^n(X\ ,Y)$,considérons la suite de Puppe

$$X' \longrightarrow Y' \longrightarrow Cf \longrightarrow SX' \longrightarrow SY'$$

attachée à l'inclusion $f : X' \hookrightarrow Y'$,où on pose $X' = X/\varphi$,$Y' = Y/\varphi$. Le foncteur semi-exact $\tilde{h}^{n-1}$ appliquée à cette suite ,donne la suite exacte

$$\tilde{h}^{n-1}(SY') \to \tilde{h}^{n-1}(SY') \to \tilde{h}^{n-1}(Cf) \to \tilde{h}^{n-1}(X') \to \tilde{h}^{n-1}(Y')$$

D'autre part la projection $Cf \longrightarrow X'/Y'$ qui identifie CY' en un point est une équivalence d'homotopie car raison du théorème de prolongement des homotopies. L'homomorphisme s^{n-1} cherché est alors le composé

$$\tilde{h}^{n-1}(Y') \to \tilde{h}^n(SY') \longrightarrow \tilde{h}^n(Cf) \xrightarrow{\approx} \tilde{h}^n(X'/Y')$$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer à titre d'exercice que les correspondances $h \rightsquigarrow \tilde{h}$ et $\tilde{h} \rightsquigarrow h$ sont bien inverses l'une de l'autre (à isomorphisme près).

<u>Remarque</u> : En K-théorie ces considérations se généralisent aux paires (X ,Y) où X est compact et Y fermé dans X . Ceci tient essentiellement au fait que la projection $Cf \longrightarrow X'/Y'$ induit un isomorphisme $\tilde{K}(X'/Y') \longrightarrow \tilde{K}(Cf)$.

<u>Exemple d'application</u> : Une théorie cohomologique (réduite ou non) est dite <u>périodique</u> de période p si on s'est donné un isomorphisme $\beta : h^n \longrightarrow h^{n+p}$ commutant avec les opérateurs cobords ou les isomorphismes de suspension . On définit alors une nouvelle théorie de la cohomologie h' en posant $\tilde{h}'^n(X) = \tilde{h}(S^{(-n)}X)$ où (-n) désigne l'image de -n dans $Z_p = 0 ,\dots,p-1$ et en définissant des isomorphismes $\tilde{h}'^n(X) \to \tilde{h}'^{n+1}(SX)$ comme composé d'isomorphismes β et d'isomorphismes de suspension . On vérifie aisément que la théorie h' est isomorphe à la théorie h . Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie ,on en déduit que la théorie cohomologique $(X ,Y) \rightsquigarrow K^n(X ,Y ;\mathcal{C})$ construite dans le

chapitre III est isomorphe à la théorie d'Atiyah et Hirzebruch [ ] .

De même si $\tilde{h}$ est une théorie cohomologique réduite sur W_c (sous-catégorie pleine de W formée d'espaces connexes), elle définit une théorie cohomologique sur W obtenue en posant $\tilde{h}^n(X) = \tilde{h}_c^{n+1}(SX)$ et réciproquement . Les détails sont laissés au lecteur . Pour des raisons techniques ,on va s'intéresser dans la suite aux théories cohomologiques réduites définies sur W . Ceci ne restreint pas d'ailleurs la généralité en vertu des considérations qui précèdent . On supposera que $\tilde{h}^n$ est <u>représenté</u> par un spectre (X_n, e_n) où

e_n est une équivalence d'homotopie faible de X_n dans (ΩX_{n+1}) . On a donc $\tilde{h}^n(X) = [X, X_n]$ (classes d'homotopie d'applications entre espaces à point base) .

Soit $\tilde{h}^n$ (resp. $\tilde{k}^n$) une théorie cohomologique représenté par un spectre (X_n, e_n) (resp. (Y_n, f_n)) . Un morphisme u entre ces deux théories représentées est la donnée d'une suite d'applications continues $u_n : X_n \longrightarrow Y_n$ telle que les diagrammes suivants <u>commutent</u>

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{u_n} & Y_n \\ {\scriptstyle e_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\ (\Omega X_{n+1}) & \xrightarrow{\Omega u_{n+1}} & (\Omega Y_{n+1}) \end{array}$$

Le morphisme u induit de manière évidente une transformation naturelle de théories cohomologiques

$$u' : \tilde{h}^n \longrightarrow \tilde{k}^n$$

Soit $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux tels morphismes et posons $Z_n = \Omega(u_n , v_n)$ (Cf p. 2.7.12) . Le diagramme commutatif précédent permet de définir une application continue $g_n : Z_n \longrightarrow (\Omega Z_{n+1})$ qui est une équivalence d'homotopie faible d'après la proposition 2.7.3 . Si on pose $l^n(X) = [X , Z_n]$,on obtient ainsi une nouvelle théorie cohomologique l^n qu'on appelle le"cone d'application" du couple de morphismes (u ,v) . Cette théorie est liée aux précédentes par une suite exacte

$$h^{n-1}(X) \longrightarrow k^{n-1}(X) \longrightarrow l^n(X) \longrightarrow h^n(X) \longrightarrow k^n(X)$$

qui est un cas particulier de la suite exacte de la proposition 2.7.3 .

Ce procédé de construction de théories cohomologiques peut être évidemment itéré . Considérons par exemple un carré de spectres et de morphismes

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{u_n , u'_n} & Y_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_n & \xrightarrow{w_n , w'_n} & T_n \end{array}$$

tel que

$$u_n t_n = w_n v_n \qquad u_n t'_n = w'_n v_n$$

$$u'_n t_n = w_n v'_n \qquad u'_n t'_n = w'_n v'_n$$

Soit S_n le sous-ensemble de

$T_n^{[0,1]} \times [0,1] \times Y_n^{[0,1]} \times Z_n^{[0,1]} \times X_n$ formé des quadruples

$(\tilde{t}, y, z, x)$ tels que

$$\tilde{t}(0,\mu) = w_n(z(\mu)) \qquad \tilde{t}(\lambda,0) = t_n(y(\lambda))$$

$$\tilde{t}(1,\mu) = w'_n(z(\mu)) \qquad \tilde{t}(\lambda,1) = t'_n(y(\lambda))$$

$$y(0) = u_n(x) \qquad z(0) = v_n(X)$$

$$y(1) = u'_n(x) \qquad z(1) = v'_n(x)$$

On définit sans peine une équivalence d'homotopie faible de S_n sur $\Omega\Omega S_{n+1}$ de telle sorte que $h^n(X) = [X, S_n]$ est une théorie cohomologique. Elle est évidemment obtenue en appliquant deux fois la construction précédente.

<u>Application</u> : Considèrons par exemple une grille carrée de la forme

$$\begin{tikzcd}
\Upsilon(A) \arrow[r] \arrow[d] & \Upsilon(A_2) \arrow[d] \\
\Upsilon(A_1) \arrow[r] & \Upsilon(A_{12})
\end{tikzcd}$$

telle que

$$\psi_2\varphi_2 = \psi_1\varphi_1 \qquad \psi'_2\varphi_2 = \psi'_1\varphi_1$$

$$\psi_2\varphi'_2 = \psi_1\varphi'_1 \qquad \psi'_2\varphi'_2 = \psi'_1\varphi'_1$$

Elle définit un diagramme commutatif du type (S)

$$\begin{tikzcd}
X_{n+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & X_{n+1}(A_2) \arrow[d] \\
X_{n+1}(A_1) \arrow[r] & X_{n+1}(A_{12})
\end{tikzcd}$$

Si h désigne la théorie cohomologique associée à ce carré ,on désigne par $K^{p,q}(X ; \ )$ le groupe (X) . En particulier on posera $K(\ ) = K^{0,0}(\ )$. A l'aide des calculs du pàragraphe 2.7 ,nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette définition de $K(\ )$ coïncide avec la précédente dans les cas particuliers que nous avions considérés (en utilisant le lemme des cinq par exemple) .

En particulier ,considèrons un foncteur virtuel

$$- \ : \ (A) \longrightarrow (A')$$

On définit alors le groupe $K(X ,Y ; \ - \ )$,X étant compact et Y fermé dans X ,comme le groupe K de la grille carrée

$$\begin{tikzcd}
(A(X)) \arrow[r] \arrow[d] & (A'(X)) \arrow[d] \\
(A(Y)) \arrow[r] & (A'(Y))
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme des cinq ,la projection $(X,Y) \to (X/Y,\text{Point})$ induit un isomorphisme de $K(X/Y,\text{Point}; \ - \ )$ dans $K(X,Y; \ - \ )$. De même pour $k = \mathbb{R}$,resp. $k = \mathbb{C}$,on a un théorème de périodicité

$$K(X ; \ - \ ) \approx K(X \times D^8 ,X \times S^7 ; \ - \ )$$

(resp. $K(X ; \ - \ ) \approx K(X \times D^2 ,X \times S^1 ; \ - \ )$)

<u>Remarque finale</u> : cette définition "homotopique" du groupe K d'une grille carrée est évidemment beaucoup moins maniable que la précédente . Ainsi son emploi pour la

démonstration des théorèmes de périodicité de Bott n'aurait pas été très commode . Cependant cette définition a l'avantage de mieux se prèter aux calculs théoriques surtout avec les foncteurs virtuels . On démontre ainsi aisément la proposition 2.8.3 ,du moins si $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont des catégories de modules projectifs de type fini sur une algèbre de Banach ,en considérant des foncteurs virtuels au lieu de foncteurs ordinaires (sans hypothèse T) .

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach <u>réelle</u> et soit $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \otimes C$, et $\mathcal{C}'' = \mathcal{C} \otimes H$ respectivement les catégories complexifiées et quaternionisées de $\mathcal{C}$. On emploiera couramment les notations uivantes

$KO(\mathcal{C}) = K(\mathcal{C}) \qquad KU(\mathcal{C}') = K(\mathcal{C}') \qquad Ksp(\mathcal{C}'') = K(\mathcal{C}'')$

D'autre part on écrira aussi ,par abus de langage , KO(X) (resp. KU(X) ,Ksp(X)) au lieu de $KO(\mathcal{C}(X))$,$KU(\mathcal{C}'(X))$ $KU(\mathcal{C}(X))$,$Ksp(\mathcal{C}''(X))$) ,$\mathcal{C}$ étant une catégorie de Banach fixée par le contexte ,etc ...

Soit $\sigma : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}'$ le foncteur (réel) défini par $\sigma(E) = \bar{E}$,$\bar{E}$ désignant l'objet "conjugué" de E obtenu en faisant opèrer C sur E via la conjugaison complexe . On désigne alors par $KC(\mathcal{C}')$ le groupe K du foncteur <u>virtuel</u> $Id - \sigma : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}'$ (Cf p § 2.4) . En particulier ,on a une suite exacte

$$KU^{-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{1-\sigma} KU^{-1}(\mathcal{C}') \longrightarrow KC(\mathcal{C}') \longrightarrow KU(\mathcal{C}') \xrightarrow{1-\sigma} KU(\mathcal{C}')$$

En suivant Anderson et Green [ ] ,on peut donner une définition équivalente et plus maniable de $KC(\mathcal{C})$. Cette définition est la suivante : on considère l'ensemble $P(\mathcal{C})$ des paires (E,e) où $E \in Ob\,\mathcal{C}'$ et où $e : E \longrightarrow \bar{E}$ est un $\mathcal{C}'$-isomorphisme . Deux paires (E_0,e_0) et (E_1,e_1) sont dites <u>homotopes</u> s'il existe une paire (E,e) de $P(\mathcal{C}[0,1])$ dont les restrictions en $\{0\}$ et $\{1\}$ soient les deux paires données . La somme de deux paires (E_0,e_0) et (E_1,e_1) est la paire (E_0+E_1, e_0+e_1) . Considèrons le groupe symétrisé $KC'(\mathcal{C})$ du monoïde abélien formé des classes d'homotopie d'objets de $P(\mathcal{C})$. Nous allons montrer que $KC'(\mathcal{C})$ et $KC(\mathcal{C})$ sont isomorphes . Pour cela on va définir deux isomorphismes inverses l'un de l'autre

$$a : KC(\mathcal{C}) \longrightarrow KC'(\mathcal{C}) \quad \text{et} \quad b : KC'(\mathcal{C}) \longrightarrow KC(\mathcal{C})$$

par la formule

$$a(\{E,e\}) = d(E,0\,;e)$$

$$b(c(E,F,\alpha)) = \{E+\bar{F}, e(\alpha)\} - \{F+\bar{F}, \delta\}$$

où $\delta : F+\bar{F} \longrightarrow \bar{F}+F$ est défini par la matrice

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et où $e(\alpha) : E+\bar{F} \longrightarrow \bar{E}+F$ est égla à $\varepsilon' \alpha$ avec

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $(b.a)(\{E,e\}) = \{E,e\}$ de manière évidente .

D'autre part $(ab)(d(E,F,\alpha) = a(E+\bar{F}, e(\alpha)) - a(F+\bar{F}, \alpha)$

$= d(E+\bar{F}, F+\bar{F}, h)$ où

$$h : E+\bar{F}+\bar{F}+F \longrightarrow F+\bar{F}+\bar{E}+F$$

est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ -\alpha_{00} & -\alpha_{01} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quand $\alpha : E+\bar{F} \longrightarrow F+\bar{E}$ est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix}$$

Considérons alors l'homotopie

$$h = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ -\alpha_{00} & -\alpha_{01} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $h_0 = h$ et

$$h_{\pi/2} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & 0 & \alpha_{01} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{10} & 0 & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $d(E+\bar{F}, F+\bar{F}, h_0) = d(E+\bar{F}, F+\bar{F}, h_{\pi/2}) = d(E, F, \alpha)$ et, par suite, $ab = \mathrm{Id}$.

Nous allons donner une troisième définition équivalente de $KC(\mathcal{C})$, plus commode parfois.

Considèrons le foncteur φ de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}'$ défini par $\varphi(E) = E \oplus \bar{E}$ et soit $KS(\mathcal{C})$ le groupe K de ce foncteur. Nous allons montrer que $KS(\mathcal{C})$ est isomorphe naturellement à $KC^{-2}(\mathcal{C})$. Pour cela il suffit de montrer que KS^{-2} et KC^{-4} sont canoniquement isomorphes (en raison de la périodicité de Bott) et ceci pour une catégorie de Banach de la forme $\mathcal{P}(A)$. On a alors $\mathcal{C}' = \mathcal{P}(B)$ avec $B = A \otimes C$.

On a une équivalence d'homotopie faible ε de $GL(B)$ dans $\Omega^2 GL(B)$ (Cf prop. 3.5.3 ou Wood [ ]) qu'on explicite de la manière suivante : identifions $GL(B)$ à $GL(B^{0,1})/GL(B)$ et à $GL(B^{1,2})/GL(B^{1,1})$ et D^2 au produit des quarts de cercle $\{(x_1,y_1)\} \times \{(x_2,y_2)\}$ avec $x_1,y_1,x_2,y_2 \geq 0$ et $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$. L'application ε de $GL(B)$ dans $\Omega^2 GL(B)$ est définie par

$$\varepsilon(\alpha)(x_1,y_1,x_2,y_2) = \alpha_2^{-1}(1x_1+i\,\varepsilon_2 e_1 y_1)\,\alpha_2(1x_1-i\,\varepsilon_2 e_1 y_1)$$

avec $\alpha_2 = \alpha_2(x_2,y_2) = \alpha^{-1}(1x_2+e_1y_2)\,\alpha\,(1x_2-e_1y_2)$, ε_1 ε_2 et e_1 étant les générateurs de l'algèbre de Clifford $C^{1,2}$. Il en résulte aussitôt que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
GL(B) \arrow[r, "\alpha \mapsto \bar{\alpha}"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & GL(B) \arrow[d, "\varepsilon"] \\
\Omega^2 GL(B) \arrow[r, "\ ^{-1}"] & \Omega^2 GL(B)
\end{tikzcd}$$

où $\bar{x}^{-1}$ désigne le lacet $\bar{x}$ parcouru en sens inverse (i.e. en changeant (x_1,y_1) en $(x_1,-y_1)$) . Considèrons alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega\, GL(B) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\Omega^2"'] & \Omega\, GL(B) \arrow[d, "\Omega^2"] \\
\Omega^3 GL(B) \arrow[r, "v"] & \Omega^3 GL(B)
\end{tikzcd}$$

où $u(x) = x\,\bar{x}$ (composition du lacet x et $\bar{x}$) et où $v(x) = x\,\bar{x}^{-1}$ (composition des lacets x et $\bar{x}^{-1}$ suivant la dernière"coordonnée"(x_3,y_3) ; attention : l'inverse et la composition sont pris par rapport à deux lois différentes)

Il est clair que ce diagramme est commutatif;donc il induit une équivalence d'homotopie faible entre $\Omega(u) = \Omega$ [illegible] et $\Omega(v,0)$ et par suite un isomorphisme canonique de $KS^{-2}(\mathcal{P}(A))$ sur $KC^{-1}(\mathcal{P}(A))$,ce qui était le but recherché .

<u>Remarque 1</u> : En fait la méthode précédente permet de démontrer mieux . Soit $\varphi_{n,p} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}'$,n et $p \in Z$ le foncteurvirtuel défini par $\varphi_{n,p}(E)=nE + p\bar{E}$. Le groupe $K(\varphi_{n,p})$ est alors isomorphe naturellement au groupe $K^{-2}(\varphi_{n,-p}$.

<u>Remarque 2</u> : il existe une quatrième définition de $KC(\mathcal{C})$ dûe à Atiyah . On démontre en effet aisément que $KC(\mathcal{C})$ est naturellement isomorphe à $KR(S^{2,0};\mathcal{C})$. Nous reviendrons bientôt sur cette remarque .

Considèrons le foncteur "extension des scalaires" ε_U de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Comme $K(\varepsilon_U) = K^1(\mathcal{C})$,on a une suite exacte

$$KO^{-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\varepsilon_U} KU^{-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial} KO^1(\mathcal{C}) \xrightarrow{\eta} KO(\mathcal{C}) \xrightarrow{\varepsilon_U} KU(\mathcal{C})$$

(Cf Bott [ ]) . Explicitons les morphismes ∂ et η . Tout élément de $KU^{-1}(\mathcal{C}) = KU(\mathcal{C}^{0,2} \longrightarrow \mathcal{C}^{0,1})$ s'écrit $d(F ,F ,\alpha)$ où $F = E'+E'$ est un objet de $\mathcal{C}^{0,2}$,les géné- ε_1 et ε_2 de $C^{0,2}$ opèrant sur $E'+E'$ par les formules

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

α étant de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut aussi supposer sans restreindre la généralité que E' est de la forme $E \otimes C = E + E$,i opèrant sur $E + E$ par la formule

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors ,d'après la définition de l'opérateur cobord et de l'isomorphisme $KU^{-1} \simeq KU_1$:

$\partial(d(E'+E',E'+E',\alpha) = d(E' ,E' ,a)$ où $E'=E+E$ est considéré comme $C^{1,1}$-module ,les générateurs e_1 et ε_1 de $C^{1,1}$ opèrant par les formules

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Considérons d'autre part l'objet $\widetilde{F}$ de $\mathcal{C}'^{1,1}$ qui, comme objet de $\mathcal{C}$, est $F = E' + E'$ mais où l'algèbre de Clifford $C^{1,1}$ opère par les formules

$$\bar{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $d(\widetilde{F}, \widetilde{F}, \alpha) \in KU^1(\mathcal{C})$ et la correspondance $d(F, F, \alpha) \rightsquigarrow d(\widetilde{F}, \widetilde{F}, \alpha)$ est l'isomorphisme canonique ρ_U de $KU^{-1}(\mathcal{C})$ sur $KU^1(\mathcal{C})$. Soit $\varepsilon_0 : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ le foncteur "restriction des scalaires". On va montrer que $d(E', E', a) = \varepsilon_0(d(\widetilde{F}, \widetilde{F}, \alpha))$. En effet on a

$d(E', E', a) = d(E'+E', E'+E', a \oplus Id_{E'})$. Les objets de $\mathcal{C}$ sous-jacents à $E'+E'$ et à $\widetilde{F}$ sont les mêmes et sont égaux à $E + E \oplus E + E$. Les isomorphismes $a \oplus Id_{E'}$ et α coïncident également. Il reste donc à montrer que les $C^{1,1}$-modules $E' \oplus E'$ et $\widetilde{F}$ sont isomorphes (ou, ce qui revient au même, homotopes). Dans le premier cas on a

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et, dans le second

$$\bar{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit M la matrice de rotation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie aussitôt les relations $M\,\bar{\varepsilon}_1\,M^{-1} = \varepsilon_1$ et $M\,\bar{e}_1\,M^{-1} = e_1$; d'où le résultat annoncé puisque $SO(4)$ est connexe .

<u>Conclusion</u> : l'homomorphisme $\partial : KU^{-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow KO^{1}(\mathcal{C})$ est égal à $\varepsilon_0\,\tilde{\partial}_U$.

Explicitons maintenant $\eta : KO^{1}(\mathcal{C}) \longrightarrow KO(\mathcal{C})$: il est obtenu à partir du carré

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}^{0,1} \arrow[d] \\ \mathcal{C}^{1,0} \arrow[r] & \mathcal{C}^{0,0} \end{tikzcd}$$

en considérant l'homomorphisme (de gauche à droite) de $K(\mathcal{C}^{1,1} \longrightarrow \mathcal{C}^{1,0})$ dans $K(\mathcal{C}^{0,1} \longrightarrow \mathcal{C}^{0,0})$ défini par la restriction des scalaires . Plus généralement l'homomorphisme $\eta : KO^{p+1,q}(\quad) \longrightarrow KO^{p,q}(\quad)$ déduit du morphisme η par suspension est défini par le foncteur <u>gradué</u> restriction des scalaires de $\hat{\mathcal{C}}^{p+1,q}$ dans $\hat{\mathcal{C}}^{p,q}$.

On peut aussi adopter le point de vue "extension des scalaires" pour définir η : c'est en effet le morphisme de $K^{p,q}(\mathcal{C})$ dans $K^{p+1,q}(\mathcal{C})$ associé au foncteur extension des scalaires de $\hat{\mathcal{C}}^{p,q}(\ )$ dans $\hat{\mathcal{C}}^{p+1,q}(\ )$. De manière précise, si $(E,v) \in \mathrm{Ob}\,\hat{\mathcal{C}}^{p,q}$,

$\gamma(E,v) = (E \oplus E\ , v \oplus (-v), e_{p+1})$ où e_{p+1} opère sur $E \oplus E$ par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En d'autres termes soit u le générateur de $K^{-1}(R) \cong Z_2$; d'après les définitions on voit aussitôt que γ est défini par le cup-produit par u(§4.1) .

Lemme 5.1.1 : soit $q \geqslant 3$. Alors le morphisme γ^q est nul .

En effet cela résulte aussitôt du fait que $u^3=0$ puisque $K^{-3}(R) = 0$. Voici cependant une démonstration directe : γ^q est le morphisme associé au foncteur restriction des scalaires $\hat{\mathcal{C}}^{q,0} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}$. En d'autres termes $\gamma^q(d(E\ , e_1\ , \ldots, e_q ; \varepsilon^1\ , \varepsilon^2)) = d(E\ , \varepsilon^1\ , \varepsilon^2)$ avec des notations évidentes . Mais si $q \geqslant 3$, $e_1e_2e_3$ est une involution de E qui anticommute avec ε^1 et ε^2 . L'homotopie $\varepsilon^1 \cos\theta + e_1e_2e_3 \sin\theta$ pour $0 \leq \theta \leq \pi/2$ et $\varepsilon^2 \cos\theta + e_1e_2e_3 \sin\theta$ pour $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ est une homotopie entre ε^1 et ε^2 .

C.Q.F.D.

<u>Proposition 5.1.1</u> (comparer avec Anderson[ ]) : la suite :

$$KO^{n-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{c_u} KU^{n-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\varepsilon, f} KO^{n+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\gamma} KO^{n}(\mathcal{C}) \xrightarrow{c_u} KU^{n}(\mathcal{C})$$

est une suite exacte .

Nous allons maintenant faire intervenir les théories KC et KS . Pour cela considèrons la suite

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathcal{C} \xrightarrow{\varepsilon_U} \mathcal{C}'$$

Le foncteur $\varepsilon_U \varepsilon_0$ est isomorphe au foncteur $E \rightsquigarrow E \oplus \bar{E}$; en effet on définit un isomorphisme fonctoriel

$c_E : E \oplus \bar{E} \longrightarrow \varepsilon_U \varepsilon_0(E) = E \oplus E$ (comme objet de $\mathcal{C}$) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -J \\ J & 1 \end{pmatrix}$$

J étant l'automorphisme de carré -1 de E représentant sa structure complexe .

On en déduit la suite exacte

$$K^{-1}(\varepsilon_U \varepsilon_0) \to K^{-1}(\varepsilon_U) \longrightarrow K(\varepsilon_0) \longrightarrow K(\varepsilon_U \varepsilon_0) \longrightarrow K(\varepsilon_U) \longrightarrow$$

soit

$$KS^{-1}(\mathcal{C}) \to KO(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial'} KO^{-2}(\mathcal{C}) \to KS(\mathcal{C}) \longrightarrow KO^1(\mathcal{C}) \to$$

Explicitons le morphisme ∂ : c'est le composé de l'isomorphisme w: $KO(\mathcal{C}) \longrightarrow KO_1^1(\mathcal{C})$ et de l'opérateur cobord $\partial_1 : KO_1^1(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\varepsilon_0)$. Si $E \in Ob\,\mathcal{C}$,on a $w(E) = d(\pi^*E , \pi^*E, s_E)$ où s_E est l'automorphisme de π^*E , $\pi : D^1 \longrightarrow$ Point ,défini par la multiplication par le nombre complexe z en un point $z \in D^1 \subset S^1$. On a donc $\partial_1(d(\pi^*E , \pi^*E, s_E)) = d(E \oplus E , E \oplus E , h_E)$ où $E \oplus E$ est muni de la structure complexe associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et où h_E est l'automorphisme réel de $E \oplus E$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'homomorphisme γ est donc défini par le cup-produit par le générateur de $KO^{-2}(R)$ (Cf § 4.2) . Par conséquent $\gamma' = \gamma^2$.

<u>Proposition 5.1.2</u> : la suite

$$KS^{-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow KO(\mathcal{C}) \xrightarrow{\gamma} KO^{-2}(\mathcal{C}) \longrightarrow KS(\mathcal{C}) \longrightarrow KO^{1}(\mathcal{C}) \longrightarrow$$

définie ci-dessus est une suite exacte .

<u>Corollaire</u> (comparer avec Anderson [ ]) : on a une suite exacte

$$KC^{1}(\mathcal{C}) \longrightarrow KO(\mathcal{C}) \xrightarrow{\gamma} KO^{-2}(\mathcal{C}) \longrightarrow KC^{-2}(\mathcal{C}) \longrightarrow KO^{1}(\mathcal{C}) -$$

Nous allons maintenant retrouver les suites exactes fondamentales d'Anderson dans un cadre plus général. Dans un but heuristique ,supposons d'abord que $\mathcal{C}$ soit la catégorie $\mathcal{P}(A)$ et que $GL(A)$ ait le type d'homotopie d'un CW-complexe dénombrable . Alors le foncteur γ induit une application de $GL(A)$ dans $\Omega GL(A)$ homotope à l'application naturelle définie par l'opérateur cobord de la suite exacte associée au foncteur φ_U . Par conséquent ,le groupe $K(\varphi)$,qui est le groupe K de la grille

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}^{0,1} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{1,1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{C}^{0,0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{1,0}
\end{array}$$

est isomorphe naturellement à $KU^{-2}(\mathcal{C}) \approx KU(\mathcal{C})$ d'après la proposition 5.1.1 et les considérations générales du § 2.7 . De même $K(\varphi^2)$ est isomorphe à $KS^{-1}(\mathcal{C}) \approx KC^1(\mathcal{C})$. Comme $KO^{-3}(R) = 0$,on a $K(\varphi^3) \approx KO(\mathcal{C}) \oplus KO^{-4}(\mathcal{C})$ $\approx KO(\mathcal{C}) \oplus Ksp(\mathcal{C})$ (si $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow 0$ est le foncteur nul ,on a évidemment $K(\varphi) \approx K(\mathcal{C}) \oplus K^{-1}(\mathcal{C})$) . Avec ces isomorphismes ,les suites exactes

$$K(\varphi^2) \longrightarrow K(\varphi) \longrightarrow K(\varphi^3) \longrightarrow K^{-1}(\varphi^2) \longrightarrow K^1(\varphi)$$

$$K^{-1}(\varphi) \longrightarrow K(\varphi^2) \longrightarrow K(\varphi^3) \longrightarrow K^{-2}(\varphi) \longrightarrow K(\varphi)$$

ne sont autres que les suites exactes d'Anderson [ ]

$$KC^{-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow KU(\mathcal{C}) \longrightarrow KO(\mathcal{C}) \oplus Ksp(\mathcal{C}) \longrightarrow KC(\mathcal{C}) \longrightarrow$$

$$KU^{-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow KC^1(\mathcal{C}) \longrightarrow KO(\mathcal{C}) \oplus Ksp(\mathcal{C}) \longrightarrow KU(\mathcal{C}) \longrightarrow$$

Dans le cas général un raisonnement plus subtil est nécessaire . On va pour cela utiliser la théorie KR d'Atiyah . L'idée essentielle va consister à "représenter" les morphismes φ , φ^2 et φ^3 par des applications entre espaces plutôt que par des applications entre espaces classifiants .

<u>Proposition 5.1.3</u> (Atiyah [ ]) : on a des isomorphismes natürels (1)

$$KU(\mathcal{C}) \simeq KR(S^{1,0} ; \mathcal{C})$$

$$KC(\mathcal{C}) \simeq KR(S^{2,0} ; \mathcal{C})$$

Explicitement on a un isomorphisme

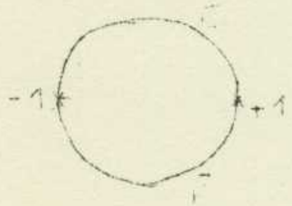
$$u : KU(\mathcal{C}) \longrightarrow KR(S^{1,0} ; \mathcal{C})$$

défini par $u(E) = F$ où F est le fibré sur $S^{1,0} = (1, -1)$ égal à E en $+1$ et à $\bar{E}$ en -1 ,muni de l'involution $\tau : F_x \longrightarrow F_{\sigma x}$ égale à l'identité sur les objets de $\mathcal{C}$ sous-jacents .

On a de même un isomorphisme

$$c : KC(\mathcal{C}) \longrightarrow KR(S^{2,0} ; \mathcal{C})$$

de la manière suivante : soit $(E,e) \in KC(\mathcal{C})$ et soit F le fibré sur $S^{2,0}$ obtenu par recollement de $\pi^{+*}E$ et de $\pi^{-*}\bar{E}$,avec $\pi^+ : S^{2,0\,+} \longrightarrow P$ et $\pi^- : S^{2,0\,-} \longrightarrow P$



---

(1) Nous emploierons désormais la notation plus commode de désigner par $D^{p,q}$,$S^{p,q}$,etc ..• les espaces D^{p+q} ,S^{p+q} ,... munis de l'involution $\sigma(x_1, \dots, x_{p+q}) = (-x_1, \dots, -x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$

au moyen de ε au point $\{-1\}$ et de ε^{-1} au point $\{+1\}$. Alors F ,muni de l'involution $\sigma_x : F_x \longrightarrow \overline{F}_{\sigma x}$ égal à e... ε avec les identifiuations précédentes définit l'élément de $KR(S^{2,0};\mathscr{C})$ cherché .

<u>Lemme 5.1.2</u> [ ] : le Z_2-espace $S^{p,0}/S^{q,0}$ est isomorphe à $S^{p-q,0} \times D^{q,0}/S^{p-q,0} \times S^{q,0}$.

En effet cet isomorphisme s'obtient par compactification de l'homéomorphisme de $S^{p,0} - S^{q,0}$ sur $S^{p-q,0} \times R^{q,0}$

<u>Corollaire</u> : on a des isomorphismes naturels

$KR(S^{p,0},S^{q,0};\mathscr{C}) \approx KR^{q}(S^{p-q,0};\mathscr{C})$

Considèrons maintenant la suite exacte de cohomologie associée à la paire $(D^{q,0},S^{q,0})$

$$\begin{tikzcd}
KR_1(D^{q,0},S^{q,0}) \arrow[r] & KR_1(D^{q,0}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & KR_1(S^{q,0}) \arrow[r] & KR(D^{q,0},S^{q,0}) \arrow[r] & KR(D^{q,0}) \arrow[d, phantom, "/\!/"] \\
 & KR_1(P) & & KR^{q}(P) \arrow[u, "\approx" ', "t"] & KR(P)
\end{tikzcd}$$

Compte tenu de l'isomorphisme t ,le morphisme u n'est autre que ε^{q} . On peut donc considérer $KR^{-q-1}(S^{q,0})$ comme"cone d'application" du morphisme ε^{q} (le lecteur donnera aisément un sens précis à cette phrase en considérant le système inductif classifiant $(B(\mathscr{C}))^{S^{q,0}}$) . En particulier on retrouve $KR(S^{1,0}) \approx KU(\mathscr{C})$ comme cone d'application de ε , et $KR(S^{2,0})$ comme cone d'application de ε^{2} ,ainsi que les suites exactes des propositions précédentes . Examinons maintenant le cas où $q \geqslant 3$. La suite exacte précédente est alors une suite courte

$$0 \longrightarrow KR_1(D^{q,0}) \longrightarrow KR_1(S^{q,0}) \xrightarrow{\partial} KR(D^{q,0},S^{q,0}) \longrightarrow 0$$

$$KR_1(D^{q,0}) = KR^{-1}(P) \qquad KR(D^{q,0},S^{q,0}) \cong KR^q(P)$$

5.1.3
<u>Lemme</u> : la suite exacte précédente se scinde canoniquement .

En effet ,on va définir un morphisme

$\partial' : KR^q(P) \longrightarrow KR_1(S^{q,0})$ tel que $\partial\partial' = 1$. On pose

$$\partial'(d(E, v, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) = d(\pi^* E, \eta^1, \eta^2) \quad \text{où}$$

$\pi : S^{q,0} \times D^1 \longrightarrow P$,où v représente l'action naturelle de $v \in R^q \subset C^{q,0}$ sur E ,et où η^l ,l=1,2 ,sont les graduations de $\pi^* E$ définies au point (v, θ) de $S^{q,0} \times D^1$ par

$$\eta^1 = iv \cos\theta + \varepsilon^1 \sin\theta \quad \text{pour} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\eta^1 = e_1e_2e_3 \cos\theta + \varepsilon^1 \sin\theta \quad \text{pour} \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi$$

Soit $f_l : (E, \varepsilon^l) \longrightarrow (E, \eta^l)$ l'isomorphisme défini par $f_l = 1 + \eta^l \varepsilon^l$; explicitement on a

$$f_l = 1 + \sin\theta + iv\, \varepsilon^l \cos\theta \quad \text{pour} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$f_l = 1 + \sin\theta + e_1e_2e_3\, \varepsilon^l \cos\theta \quad \text{pour} \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi$$

On a donc $d(\pi^* E, \eta^1, \eta^2) = d((E, \varepsilon^1), (E, \varepsilon^2), \alpha)$ où $\alpha : (E, \varepsilon^1) \longrightarrow (E, \varepsilon^2)$ est l'isomorphisme définie par $f_2.f_1^{-1}$. Si E_0^1 désigne la partie homogène de degré zéro de (E, ε^1) ,l'élément de $K_1(S^{q,0})$ défini ci dessus est donc tout simplement $d(\pi^* E_0^1, \pi^* E_0^2, \beta)$ où $\beta : \pi^* E_0^1|_{S^0} \longrightarrow \pi^* E_0^2|_{S^0}$ est l'isomorphisme défini au point $\{1\}$ par $(1 - iv\, \varepsilon^2)(1 + iv\, \varepsilon^1)$ et au point $\{-1\}$ par $(1 - e_1e_2e_3\, \varepsilon^2)(1 + e_1e_2e_3\, \varepsilon^1)$. En appliquant ∂ à cet

$\gamma : D^{q,0} \longrightarrow P$

élément on va trouver évidemment $d(\pi^{*}E^1_0, \pi^{*}E^2_0, \gamma)$ où γ est l'isomorphisme de $\pi^{*}E^1_0|_{S^{q,0}} \longrightarrow \pi^{*}E^2_0|_{S^{q,0}}$ défini au point v de $S^{q,0}$ par $(1 - iv\varepsilon^2)(1 + iv\varepsilon^1)$ ou , ce qui revient au même , $1/2\ (1 - iv\varepsilon^2)(1 + iv\varepsilon^1)$. D'après les calculs des pages 3.4.26 et 3.4.27 ,on a donc $\partial\partial'\ (d(E, v, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) = t(d(E, v, \varepsilon^1, \varepsilon^2))$ d'où le résultat annoncé .

Considérons en particulier le cas où q = 3 . On obtient alors un isomorphisme naturel de $KR_1(S^{3,0})$ sur $KR^{-1}(\mathcal{C}) \oplus KR^3(\mathcal{C})$ soit ,en appliquant la périodicité de Bott ,de $KR(S^{3,0})$ sur $KO(\mathcal{C}) \oplus Ksp(\mathcal{C})$. Compte tenu que $S^{3,0}/S^{2,0} \approx S^{1,0} \times D^{2,0} / S^{1,0} \times S^{2,0}$ et que de même $S^{3,0}/S^{1,0} \approx S^{2,0} \times D^{1,0} / S^{2,0} \times S^{1,0}$,les suites exactes associées aux paires $(S^{3,0}, S^{1,0})$ et $(S^{3,0}, S^{2,0})$ donnent alors les suites exactes d'Anderson (généralisées) annoncées p. 5.1.21 .

<u>Remarque1</u>: cette démonstration est directement inspirée de l'article d'Atiyah "K-theory and reality" . D'ailleurs Atiyah donne une démonstration des suites exactes ,sans l'écrire en détail ,dans le cas particulier où $\mathcal{C}$ est la catégorie des fibrés vectoriels réels de dimension finie sur un espace compact . Pour cela ,il utilise des techniques d'opérateurs différentiels (dans un cas très particulier à vrai dire) . Ceci malheureusement

ne se généralise pas aux catégories de Banach ,du moins pas à la connaissance de l'auteur .

Remarque 2 : on démontre de la même manière l'existence de suites exactes

$$KR^{-1}(X;\mathcal{C}) \to KR(X\times S^{1,0};\mathcal{C}) \to KR(X;\mathcal{C})+KR^{4}(X;\mathcal{C}) \longrightarrow KR(X\times S^{2,0};\mathcal{C}) \to$$

$$KR^{-1}(X\times S^{1,0};\mathcal{C}) \to KR^{1}(X\times S^{2,0};\mathcal{C}) \to KR(X;\mathcal{C})+KR^{4}(X;\mathcal{C}) \to KR(X\times S^{1,0};\mathcal{C})$$

dans le cas où X est un espace compact muni d'une involution non nécessairement triviale .

Remarque 3 : la détermination précise des homomorphismes des deux suites exactes est délicate et ne sera pas faite ici . Remarquons cependant qu'on peut déterminer aisément les homomorphismes $KO(\mathcal{C}) + Ksp(\mathcal{C}) \longrightarrow KC(\mathcal{C})$ et $KO(\mathcal{C}) + Ksp(\mathcal{C}) \longrightarrow KU(\mathcal{C})$. Pour des raisons multiplicatives ,il suffit en effet de les connaitre pour $\mathcal{C} = \underline{R}$. Avec les notations d'Anderson on trouve que le premier homomorphisme est $(\varepsilon_C , \varepsilon_C)$ et le second $(\varepsilon_U , \varepsilon_U)$.

Théorème 5.1.1 : soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle . Il existe alors des suites exactes naturelles en $\mathcal{C}$.

$$KC^{-1}(\mathcal{C}) \to KU(\mathcal{C}) \to KO(\mathcal{C})+Ksp(\mathcal{C}) \to KC(\mathcal{C}) \longrightarrow KU^{1}(\mathcal{C}) \to$$

$$KU^{-1}(\mathcal{C}) \to KC^{1}(\mathcal{C}) \to KO(\mathcal{C})+Ksp(\mathcal{C}) \to KU(\mathcal{C}) \to KC^{2}(\mathcal{C}) \to$$

Si $\mathcal{C}$ est la catégorie de Banach des fibrés vectoriels de dimension finie sur un espace compact X ,on retrouve évidemment les suites exactes d'Anderson classiques. De même si $\mathcal{C}$ est la catégorie des représentations de dimension finie d'un groupe topologique G ,on retrouve une autre suite exacte

$$RC^{-1}(G) \to RU(G) \to RO(G)+Rsp(G) \to RC(G) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{RU^{1}(G)}$$

où RC(G) est déterminé par la suite exacte

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{RU^{-1}(G)} \longrightarrow RC(G) \longrightarrow RU(G) \longrightarrow RU(G)$$

Tout ceci est dû à Anderson .

Cependant cette nouvelle méthode permet de trouver d'autres théorèmes intéressants . Ainsi ,par exemple, soit E un espace de Banach et soit G un groupe topologique non nécessairement compact . Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des représentations de G dans un facteur direct d'une puissance de E ,on obtient une suite exacte qui relie les représentations réelles et les représentations complexes de G . Par la même méthode on obtient par exemple une suite exacte

$$KC_G^{-1}(X) \to KU_G(X) \to KO_G(X)+Ksp_G(X) \to KC_G(X) \longrightarrow KU_G^1(X) \to$$

qui relie les théories K_G réelles et complexes . Citons enfin un dernier corollaire immédiat

<u>Corollaire</u> : si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $KU^*(\mathcal{C}) = 0$

(ii) $KC^*(\mathcal{C}) = 0$

(iii) $KO^*(\mathcal{C}) = 0$

<u>(i) ⇒ (ii)</u> : considérer la suite exacte

$$KU^*(\mathcal{C}) \longrightarrow KU^*(\mathcal{C}) \longrightarrow KC^*(\mathcal{C}) \longrightarrow KU^*(\mathcal{C}) \longrightarrow KU^*(\mathcal{C})$$

<u>(ii) ⇒ (i)</u> : considérons la suite

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}'' \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}'$$

où φ est le foncteur $E \mapsto E + \bar{E}$ et où ψ est le foncteur virtuel $E \mapsto E - \bar{E}$. Elle donne naissance à une suite exacte

$$KC^{n-1}(\mathcal{C}) \to KC^{n-2}(\mathcal{C}) \to KU^n(\mathcal{C}) + KU^{n-1}(\mathcal{C}) \to KC^n(\mathcal{C}) \to KC^{n-1}(\mathcal{C})$$

d'où l'assertion .

<u>(i) et (ii) ⇒ (iii)</u> : considérer la suite exacte

$$KC^*(\mathcal{C}) \to KU^*(\mathcal{C}) \to KO^*(\mathcal{C}) + Ksp^*(\mathcal{C}) \to KC^*(\mathcal{C}) \to KU^*(\mathcal{C})$$

<u>(iii) ⇒ (i)</u> : considérer la suite exacte de Bott

$$KO^*(\mathcal{C}) \longrightarrow KO^*(\mathcal{C}) \longrightarrow KU^*(\mathcal{C}) \longrightarrow KO^*(\mathcal{C}) \longrightarrow KO^*(\mathcal{C})$$

<u>Applications à la théorie KO_G</u>

Nous supposerons ici que $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels réels de dimension finie . Nous examinerons le cas où $\mathcal{C}$ est quelconque au § suivant .

Soit G un groupe de Lie compact et soit X une G-variété différentiable . Alors ,d'après Segal [ ] ,le groupe $KU_G(X)$ est un RU(G)-module de type fini . Soit IU(G) le noyau de l'homomorphisme $RU(G) \longrightarrow Z$ obtenu en associant à chaque représentation sa dimension . On désigne par $\widehat{KU}_G(X)$ le module complété de $KU_G(X)$ pour la topologie IU(G)-adique ie $\widehat{KU}_G(X) = \varprojlim_n KU_G(X)/(IU(G))^n KU_G(X)$. Posons $IC(G) = IU(G) \cap RC(G)$,$IO(G) = IU(G) \cap RO(G)$.

Lemme 5.1.4 : les topologies IU(G)-adique ,IC(G)-adique et IO(G)-adique coïncident sur RU(G) donc sur $KU_G(X)$.

La démonstration de ce lemme est laissée en exercice au lecteur (Cf [ ]) . Elle repose essentiellement sur le fait que l'anneau RU(G) est noethérien .

Soit $E_G \longrightarrow B_G$ le fibré universel (au sens de Milnor) du groupe G . Posons $X_G = X \times_G E_G$ et $X_G^n = X \times_G E_G^n$ où E_G^n désigne le squelette de dimension n de E_G ,squelette qu'on peut supposer compact . Le foncteur $E \rightsquigarrow E \times_G E_G^n$ est un foncteur de la catégorie des G-fibrés sur X dans celle des fibrés vectoriels sur X_G^n . Si on pose $\mathcal{K}(X_G) = \varprojlim K(X_G^n)$ (K = KO ,KU ou KC) ,le foncteur précédent définit un homomorphisme de $\widehat{K}_G(X)$ dans $\mathcal{K}(X_G)$

Théorème 5.1.2 (Segal [ ]) : le système projectif $KU(X_G^n)$ vérifie la condition de Mittag-Leffler [ ] et l'homomorphisme de $\widehat{KU}_G^p(X)$ dans $\mathcal{K}U^p(X_G)$ défini ci-dessus est un isomorphisme .

Pour étendre ce résultat à la théorie KO ,on a besoin d'un lemme facile laissé encore en exercice au lecteur :

Lemme 5.1.5 : soit X_α un système projectif d'espaces compacts . Si $KU^*(X_\alpha)$ vérifie la condition de Mittag-Leffler, il en est de même de $KO^*(X_\alpha)$ et de $KC^*(X_\alpha)$.

Le foncteur limite projective étant un foncteur exact sur les modules de type fini sur un anneau noethérien, on a les suites exactes et les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
\hat{KU}^*_G(X) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{KU}^*_G(X) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{KC}^*_G(X) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{KU}^*_G(X) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{KU}^*_G(X) \arrow[d] \\
KU^*(X_G) \arrow[r] & KU^*(X_G) \arrow[r] & KC^*(X_G) \arrow[r] & KU^*(X_G) \arrow[r] & KU^*(X_G)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\hat{KC}^*_G(X) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{KU}^*_G(X) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{KO}^*_G(X)+\hat{Ksp}^*_G(X) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{KC}^*_G(X) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{KU}^*_G(X) \arrow[d] \\
KC^*(X_G) \arrow[r] & KU^*(X_G) \arrow[r] & KO^*(X_G)+Ksp^*(X_G) \arrow[r] & KC^*(X_G) \arrow[r] & KU^*(X_G)
\end{tikzcd}$$

d'où ,par application répétée du lemme des cinq ,le

Théorème 5.1.3 : les homomorphismes canoniques de $KC^*_G(X)$ dans $KC^*(X_G)$,de $KO^*_G(X)$ dans $KO^*(X_G)$ sont des isomorphismes .

Remarque : la méthode de démonstration du théorème 5.1.3 est essentiellement dûe à Anderson . En fait Anderson démontre ce théorème pour X = Point . Dans ce cas particulier les groupes $\widehat{K}^p_G(X) = \widehat{R}^p(G)$ se calculent aisément : il suffit d'appliquer la proposition 3.5.5 pour déterminer entièrement les groupes $R^p(\tilde{G})$ et $\widehat{R}^p(G)$ et retrouver ainsi les résultats détaillés d'Anderson :

$$
\begin{array}{ll}
KO^0(B_G) = \widehat{RO}(G) & KO^4(B_G) = \widehat{Rsp}(G) \\
KO^1(B_G) = 0 & KO^5(B_G) = 0 \\
KO^2(B_G) = \widehat{RU}(G)/\widehat{RO}(G) & KO^6(B_G) = \widehat{RU}(G)/\widehat{Rsp}(G) \\
KO^3(B_G) = \widehat{Rsp}(G)/\varepsilon sp(\widehat{RU}(G)) & KO^7(B_G) = \widehat{RO}(G)/\varepsilon_0(\widehat{RU}(G))
\end{array}
$$

(pour ces calculs on se sert évidemment de la table des algèbres de Clifford p. 3.1.8)

5.2 Le théorème de Thom-Gysin en théorie K_G

Dans ce paragraphe on se propose d'esquisser une solution partielle des conjectures du § 4.2 . Une démonstration detaillée paraitra dans une redaction ultérieure . Sauf pour le cas $G = Z_2$,les resultats obtenus s'appuient essentiellement sur le travail d'Atiyah et Segal en theorie K_G complexe .

Soit donc X un G-espace compact et soit V un G-fibre reel muni d'une forme quadratique definie positive Q invariante par G . Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach ,on designe par $\mathcal{C}_G^V(X)$ la catégorie de Banach suivante :

- Un objet de $\mathcal{C}_G^V(X)$ est un triple (E, α, β) où E est un $\mathcal{C}$ -fibré sur X et où α et β sont des homomorphismes continus ;

$$\alpha : V \longrightarrow \mathrm{End}\ E \quad , \beta : G \longrightarrow \mathrm{End}\ E$$

tels que $(\alpha(v))^2 = Q(v)\,\mathrm{Id}_E$ et $\beta(g)\alpha(v) = \alpha(gv)\beta(g)$. Si les objets de $\mathcal{C}$ sont des espaces de Banach (ce que nous pouvons supposer sans restreindre la généralite d'après la remarque du début du § 4.3) ,cette condition s'exprime simplement

$$g(vx) = (gv)(gx) \qquad \forall g \in G ,v \in V ,x \in E .$$

- Un morphisme de $\mathcal{C}_G^V(X)$ est un mrophisme de $\mathcal{C}(X)$ commutant avec l'action de G et de V .

Si W est un autre G-fibre muni d'une forme quadratique definie positive et si V est un sous-G-fibre de W ,on définit le groupe $K_G^{W;V}(X)$ (à coefficients dans $\mathcal{C}$) comme le groupe K du foncteur restriction

$$\mathcal{C}_G^W(X) \longrightarrow \mathcal{C}_G^V(X)$$

En particulier si $W = V \oplus I$,on note $K_G^V(X)$ le groupe K obtenu .

Plus généralement on définit le groupe $K_G^{W;V}(X,Y)$ où Y est un sous-espace fermé de X invariant par l'action de G comme le groupe K de la grille

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_G^W(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}_G^V(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_G^W(Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}_G^V(Y) \end{array}$$

On peut aussi le définir directement à partir de triples (E, w^1, w^2) où E est un $\mathcal{C}$-fibré trivial où G opère et où w^1 et w^2 représentent deux actions de $C(W)$ telles que

$$w^1|_{C(V)} = w^2|_{C(V)}, \quad w^1|_Y = w^2|_Y, \quad g(w^i x) = (g w^i)(gx)$$

$i = 1,2$ et $\forall g \in G$, $\forall x \in E$ (par abus de langage).
En particulier on note $K_G^V(X,Y)$ le groupe $K_G^{V+1,V}(X,Y)$

Si V' est un autre G-fibré réel, on définit comme au paragraphe 4.2 un homomorphisme t de $K_G^{V\oplus V'}(X)$ dans $K_G^{\pi^* V'}(B(V), S(V)) \simeq K_G^{\pi^* V'}(S^+(V\oplus 1), S(V))$ par la formule

$$t(d(E, w^1, w^2)) = d(\pi^* E, \mathcal{E}(w^1), \mathcal{E}(w^2)) \quad \text{où}$$

a) $\pi : S^+(V\oplus 1) \longrightarrow X$ désigne la projection canonique.

b) les structures de $C(V'\oplus 1)$-module de $\pi^* E$ sont représentées par les applications continues

$$\mathcal{E}(w^i) : V'\oplus 1 \longrightarrow \operatorname{End} \pi^* E \quad , i = 1,2$$

qui sont définies au point (v, λ) de $S^+(V \oplus 1)$ par

$$\mathcal{E}(w^i)(v', \mu) = w^i(0, v', 0) + \mu\, w^i(v, 0, \lambda)$$

<u>Conjecture 1</u> : l'homomorphisme

$$t : K_G^V(X; \mathcal{C}) \longrightarrow K_G(B(V), S(V); \mathcal{C})$$

est un isomorphisme.

Nous allons démontrer cette conjecture dans un certain nombre de cas particuliers importants . Il est commode pour cela d'énoncer une conjecture en apparence plus générale et faisant intervenir la théorie KR .

Soit donc X un G x Z_2-espace compact et soit V un G x Z_2 fibré réel sur X . On définit la catégorie $\mathcal{C}^{R_V}_G(X)$ comme la catégorie dont les objets sont les objets E de $(\mathcal{C} \otimes C)^V_G(X)$ munis d'une involution antilinéaire $\tau : E \longrightarrow E$ dont la projection sur X est l'involution σ définie par l'action de Z_2 . Comme au début de ce paragraphe on définit un groupe $KR^{W;V}_G(X)$, $KR^{W;V}_G(X,Y)$, $KR^V(X,Y)$,etc ... par les canons habituels . On peut aussi définir des groupes K à coefficients dans un foncteur .

Un cas particulièrement intéressant est celui où X = X' x X" ,X' étant un G-espace et X" un Z_2-espace et où W = W' x X" ,V = V' x X" . Dans ce cas $KR^{W;V}_G(X)$ est isomorphe naturellement au groupe KR(X" ; φ) où φ est le foncteur restriction

$$\mathcal{C}^{W'}_G(X') \longrightarrow \mathcal{C}^{V'}_G(X')$$

<u>Conjecture 2</u> : soit X un G x Z_2-espace . L'homomorphisme évident

$$t : KR^V_G(X ; \mathcal{C}) \longrightarrow KR_G(B(V) ,S(V) ; \mathcal{C})$$

est un isomorphisme .

Theorème 5.2.1 : G ,X et $\mathscr{C}$ étant donnés ,les conjectures 1 et 2 sont équivalentes pour cette donnee .

Corollaire : la conjecture 2 est vraie pour G = 1

La demonstration s'appuie sur les deux propositions suivantes :

Proposition 5.2.1 : G et X étant donnes ,la conjecture 1 (resp. 2) pour la categorie de Banach $\mathscr{C}$ est équivalente à la conjecture 1 (resp. 2) pour la categorie complexifiée $\mathscr{C}' = \mathscr{C} \otimes \mathbb{C}$.

La proposition résulté des suites exactes generalisées d'Anderson et Bott (cf paragraphe 4.4) .

Proposition 5.2.2 : la catégories $\mathscr{C}'^{R\,V+1}_{G}(X)$ et $\mathscr{C}'^{V+1}_{G}(X)$ sont equivalentes .

En effet ,on a $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$,l'isomorphisme f étant defini par $f(i \otimes 1) = (i,i)$,$f(1 \otimes i) = (i,-i)$. Grace à cet isomorphisme la première categorie s'identifie à la categorie des triples (E ,F , α) où E et F sont deux objets de $\mathscr{C}'^{V+1}_{G}(X)$ et où $\alpha : E \longrightarrow \sigma^* \bar{F}$ est un G-isomorphisme . Un tel triple est evidemment isomorphe au triple $(E , \sigma^* \bar{E}, Id)$. La correspondance $E \rightsquigarrow (E, \sigma^* \bar{E}, Id)$ definit alors l'equivalence des categories en question .

Corollaire : les groupes $KR^{V}_{G}(X ; \mathscr{C}')$ et $K^{V}_{G}(X;\mathscr{C}')$ sont naturellement isomorphes.

Le theorème 5.2.1 résulte maintenant du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} KR_G^V(X\,;\mathcal{C}') \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "t"'] & K_G^V(X\,;\mathcal{C}') \arrow[d, "t"] \\ KR_G(B(V),S(V);\mathcal{C}') \arrow[r, "\approx"] & K_G(B(V)\,,S(V)\,;\mathcal{C}') \end{tikzcd}$$

Théorème 5.2.2 : la conjecture 1 (donc 2) est vraie pour $G = Z_2$ et X localement Z_2-contractile .

D'après la suite exacte de Mayer-Victoris , il suffit de demontrer le théorème pour X = Point . Nous aurons pour cela besoin de trois lemmes .

Lemme 5.2.1 : soit η l'involution de V représentant l'action de Z_2 sur V . Posons $V_1 = \mathrm{Ker}(\eta - 1)$, $V_2 = \mathrm{Ker}(\eta + 1)$. Alors le groupe $K^V_{Z_2}(\mathcal{C})$ est isomorphe naturellement au groupe $K^{V_1}($.

En effet le groupe $K^V_{Z_2}(\mathcal{C})$ est le groupe K du foncteur restriction

$$\mathcal{C}^{V_1\oplus V_2\oplus 1}_{Z_2} \longrightarrow \mathcal{C}^{V_1\oplus V_2}_{Z_2}$$

La catégorie $\mathcal{C}^{V_1\oplus V_2}_{Z_2}$ est isomorphe naturellement à la catégorie $(\mathcal{C}^{V_2\oplus 1})^{V_1}$: si v_1 , v_2 , ε représentent l'action de V_1 , V_2 , Z_2 sur $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $v_1\varepsilon$ représente une action de V_1 sur $(E, v_2, \varepsilon) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{V_2\oplus 1}$. De même $\mathcal{C}^{V_1\oplus V_2\oplus 1}_{Z_2}$ est isomorphe à $(\mathcal{C}^{V_2\oplus 1})^{V_1\oplus 1}$ d'où le resultat annoncé .

Lemme 5.2.2 : le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} K^{V}_{Z_2}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "t"] & K^{V_1}(\mathcal{E}^{V_2+1}) \arrow[d, "\approx", "t"'] \\ K^{V_2}_{Z_2}(B(V_1),S(V_1)) \arrow[r] & K(B(V_1),S(V_1);\mathcal{E}^{V_2+1}) \end{tikzcd}$$

Corollaire : il suffit de démontrer le theorème 5.2.2 pour X = Point et $V_1 = 0$.

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{tikzcd} K^{-1}_{Z_2}(B(V)) \arrow[r, "\alpha"] & K^{-1}_{Z_2}(S(V)) \arrow[r, "\beta"] & K_{Z_2}(B(V),S(V)) \arrow[r, "\gamma"] & K_{Z_2}(B(V)) \arrow[r] & K_{Z_2}(S(V)) \\ K^{-1}(\mathcal{E}^{0,1}) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[u, "u"] & K(\varphi) \arrow[r, "\beta'"] \arrow[u, "p"] & K(\mathcal{E}^{V+1}) \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[u, "t"] & K(\mathcal{E}^{0,1}) \arrow[r] \arrow[u, "u"] & K^{1}(\varphi) \arrow[u, "p"] \end{tikzcd}$$

où φ est le foncteur restriction $\mathcal{E}^{V+1} \longrightarrow \mathcal{E}^{0,1}$

où p est l'homomorphisme défini au § 4.3 (compte tenu que $K_{Z_2}(S(V)) \approx K(P(V))$ et où u est le composé des isomorphismes $K(\mathcal{E}^{0,1}) \approx K_{Z_2}(\mathcal{E}) \approx K_{Z_2}(B(V);\mathcal{E})$.

Lemme 5.2.3 : le diagramme défini ci-dessus est commutatif .

Le seul point non trivial est la commutation du deuxième carré à partir de la gauche . Soit $y = d(E,\eta,w^1,w^2) \in K(\varphi)$. On a $\beta'(y) = d(E,\eta,w^1) - d(E,\eta,w^2)$ avec des notations evidentes ;
$(t\beta')(y) = d(E_0,E_1,\tilde{w}^1) - d(E_0,E_1,\tilde{w}^2) = d(E_0,E_0,\tilde{w}^2\tilde{w}^1)$

Dans cette expression $E_0 = \ker(\eta - 1)$, $E_1 = \ker(\eta + 1)$; Z_2 opère sur E_0 par l'identite et sur E_1 par changement de signe .

D'autre part $p_*(d(E, \eta, w^1, w^2))$ $= d(E, \eta, \eta, (\tilde{w}^1), (\tilde{w}^2))$ (où η représente à la fois l'action de Z_2 et de $C^{0,1}$, les autres notations étant celles du § 4.3) . Soit $D^1 = \{\theta \mid \theta \in [0, \pi]\}$. Alors l'image de cet élément dans $K_{Z_2}(S(V) \times D^1, S(V) \times S^0)$ est $d(E, \eta, \eta\cos\theta + \tilde{w}^1\sin\theta, \eta\cos\theta + \tilde{w}^2\sin\theta)$ o . On a maintenant des isomorphismes

$$f^i : (E, \eta) \longrightarrow (E, \eta\cos\theta + \tilde{w}^i\sin\theta)$$

definis par $f^i = \cos\theta/2 + \tilde{w}^i\eta\sin\theta/2$. Avec les notations du § . 3.4 , on obtient donc l'élément

$$d((E,\eta), (E,\eta), f_2^{-1} f_1)$$

En faisant $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et en appliquant l'opérateur cobord , on obtient $d(E_0, E_0, \tilde{w}^2\tilde{w}^1)$.

C.Q.F.D.

Soit V un G-fibré reel quelconque . On dit que V est <u>G-spinoriel</u> s'il est de la forme $P \times_{Spin(n)} R^n$ où P est un fibré principal où G opère (à gauche) de manière compatible avec l'action de Spin(n) . Si par exemple X est un point ceci signifie que la représentation de G dans O(n) correspondante se remonte dans Spin(n) . On définit de même les fibrés $G-{}^U$spinoriels .

Supposons maintenant que la catégorie $\mathcal{C}$ soit reelle (resp. complexe) et que V soit G-spinoriel (resp. G-^{U}spinoriel) . On definit alors un foncteur

$$u : \mathcal{C}_G^{0,n}(X) \longrightarrow \mathcal{C}_G^V(X)$$

par la formule $u(E) = P \times_H E$ où $V = P \times_H R^n$, $H = Spin(n)$ (resp. $H = Spin^U(n)$) .

Proposition 5.2.3 : le foncteur u défini ci-dessus est une equivalence de catégories de Banach .

Nous avons deja démontré catte proposition pour G = 1 . Dans le cas général voici une démonstration d'esprit différent : on va definir un foncteur quasi-inverse $u' : \mathcal{C}_G^V(X) \longrightarrow \mathcal{C}_G^{0,n}(X)$ du foncteur u . Pour cela considérons le fibré en groupes $\tilde{H} = P \times_H H$, H operant sur H par la representation adjointe : c'est le quotient de P x H par la relation d'équivalence $(p,h) \sim (p\alpha^{-1}, \alpha h \alpha^{-1})$. Ce fibré opère à droite sur P par la formule $p.(p,h) = ph^{-1}$. Il opère à gauche sur F si F est un C(V)-module . On pose alors $u'(F) = P \times_H F$: c'est le quotient de P x F par la relation d'équivalence $(p,f) \sim (ph ,(p,h)f)$. Le groupe G opère sur u'(F) par la formule $g.(p,f) = (g.p,f)$ et u'(F) peut être muni d'une structure de C_n-module : pour $\lambda \in R^n$,on pose $\lambda(p,f) = (p ,(p,\lambda)f)$. Nous laissons au lecteur le soin de verifier trivialement que $u'.u \approx Id$ et que $u.u' \approx Id$.

Théorème 5.2.3 : la conjecture 1 (donc 2) est vraie pour un G-fibré complexe V et pour une catégorie $\mathcal{C}$ de dimension finie .

D'après les suites exactes généralisées d'Anderson ,il suffit de démontrer le théorème pour $\mathcal{C} = \hat{\mathcal{J}}(\mathbb{C})$. Soit dim V = 2p et considérons la suite

$$K_G(X) \xrightarrow{\simeq} K_G^{-2p}(X) \xrightarrow[\simeq]{u} K_G^V(X) \xrightarrow{t} K_G(B(V),S(V))$$

Le morphisme u est bien défini car un G-fibré complexe est canoniquement G-^{U}spinoriel (cf § 4.2) . D'autre part t.u.p est défini par le cup-produit par le complexe d'algèbre extérieure de V

$$0 \longrightarrow \Lambda^0 V \longrightarrow \Lambda^1 V \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^p V \longrightarrow 0$$

(Cf Atiyah-Segal [ ] et Atiyah-Bott-Shapiro [ ]) . D'après Atiyah [ ] ,t.u.p est un isomorphisme . Donc t l'est aussi .

C.Q.F.D.

Théorème 5.2.4 : la conjecture 1 (donc 2) est vraie sous les hypothèses suivantes :

- $\mathcal{C}$ est une catégorie vectorielle de dimension finie
- l'anneau R(G) est séparé pour la topologie I(G)-adique .
- X est localement G-contractile et le fibré V est G-^{U}spinoriel .

<u>Démonstration</u> : Il suffit de démontrer le théorème pour $\mathcal{C} = (\mathbb{C})$.

. Considèrons alors la suite :

$$K_G^{V\oplus V}(X) \longrightarrow K_G^{V}(B(V),S(V)) \longrightarrow K_G(B(V\oplus V),S(V\oplus V))$$

D'après le théorème 5.2.3 $t_2.t_1$ est un isomorphisme .
D'autre part en complétant les modules de cette suite pour la topologie $I(G)$-adique , t_2 devient un isomorphisme d'après le théorème de Segal [ ] (nous utilisons ici bien sûr l'isomorphisme de Thom usuel) . Il en résulte que t_2 est un monomorphisme et que t_1 est un isomorphisme puisque la topologie $I(G)$-adique est séparée par hypothèse.

Dans Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K_G^{V\oplus V}(X) \arrow[r, "t"] & K_G^{V}(B(V),S(V)) \\
K_G^{V\oplus T^{0,n}}(\arrow[u, "u"] \arrow[r, "t"] & K_G^{T^{0,n}}(B(V),S(V)) \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd}$$

où $T^{p,q}$ désigne le fibré trivial de dimension $p+q$ muni de la forme quadratique "triviale" de type (q,p) , le dernier homomorphisme horizontal est un isomorphisme .
Puisque $C(V\oplus T^{n,0})\otimes\mathbb{C} \simeq C(V\oplus T^{0,n})\otimes\mathbb{C}$, en changeant X en sa suspension $n^{\text{ième}}$, on en déduit que l'homomorphisme

$$t : K_G^{F+T^{n,0}}(X \wedge (D^{0,n},S^{0,n})) - K_G^{T^{n,0}}((B(V),S(V))\wedge(D^{0,n},S^{0,n}))$$

est aussi un isomorphisme . Considérons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
{}^{2n,n}(X_\wedge(D^{0,n},S^{0,n})) \arrow[r, "u", "\approx"'] & K_G^{V+T^{n,0}}(X_\wedge(D^{0,n},S^{0,n})) \arrow[r, "t", "\approx"'] & K_{G=}^{+n}(B(V),S(V)_\wedge D^{0,n}; S^{?,n}) \\
K_G^{T^{n,0}}(X) \arrow[u, "\approx", "t\lambda^n"'] \arrow[r, "u", "\approx"'] & K_G^V(X) \arrow[u, "\approx", "t\lambda^n"'] \arrow[r] & K_G(B(V),S(V)) \arrow[u, "\approx", "t\lambda^n"']
\end{tikzcd}$$

C.Q.F.D.

Soit $\hat{\mathcal{C}}_G^V(X)$ la catégorie graduée des $\mathcal{C}$-fibrés qui sont des G-C(V)-modules gradués en un sens facile à préciser .

Théorème 5.2.5 : considérons deux triples $(G, V, \mathcal{C})$ et $(G, W, \mathcal{C})$, $V \subset W$, tels que le théorème de Thom-Gysin soit vrai pour ces triples . Dans ces conditions le groupe $K_G(S(W), S(V))$ est isomorphe naturellement au groupe K^1 du foncteur gradué

$$\hat{\mathcal{C}}_G^W(X) \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}_G^V(X)$$

En effet on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K_G(B(W), S(V)) \arrow[r] & K_G(B(V), S(V)) \\
K_G^W(X) \arrow[u, "\approx", "t"'] \arrow[r] & K_G^V(X) \arrow[u, "\approx", "t"']
\end{tikzcd}$$

D'après les considérations générales de cylindre d'applications de théorie cohomologiques représentées , le groupe $K^1(\varphi)$ est isomorphe naturellement au groupe

K_G^1 ((B(W)/S(W))/B(V)/S(V)) . Mais

Mais $B(W)/S(W)$ et $B(V)/S(V)$ s'identifient aus espaces de Thom $\dot{W}$ et $\dot{V}$ de W et de V respectivement . Le théorème sera alors conséquence du

Lemme 5.2.4 : $\dot{W}/\dot{V}$ est homéomorphe à la suspension de $S(W)/S(V)$.

En effet on a un homéomorphisme évident de $W - V$ sur $S(W) \times R - S(V) \times R$,d'ou le resultat en compactifiant .

Remarque : le théorème 5.2.5 complète ainsi les résultats du § 4.3 .