C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 275-278 (22 août 1966). Série A

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Cohomologie des catégories de Banach.*

Note (*) de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

Le *groupe de Grothendieck* K($\mathcal{C}$) d'une catégorie additive (²) $\mathcal{C}$ est le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie $\{G\}$ d'objets G de $\mathcal{C}$ par le sous-groupe engendré par les relations $\{E \oplus F\} - \{E\} - \{F\} = 0$. Dans cette Note on se propose de définir, pour des catégories additives munies d'une certaine structure, des groupes $K^n(\mathcal{C})$, $n \in Z$, avec $K^0(\mathcal{C}) \approx K(\mathcal{C})$, jouissant de certaines propriétés « cohomologiques » en relation avec les théorèmes de périodicité de Bott.

1. Définitions. — 1.1. Une *catégorie de Banach* (sur k, avec $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) est la donnée d'une catégorie avec objet nul $\mathcal{C}$ et d'une structure de k-espace de Banach sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$. Cette donnée est astreinte aux conditions suivantes : *a.* l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, P) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, P)$, définie par la composition des morphismes, est bilinéaire et continue; *b.* la somme (donc le produit) de deux objets existe; *c.* pour tout objet E de $\mathcal{C}$ et tout endomorphisme idempotent p de E, le noyau de p existe.

Exemple de catégorie de Banach. — La catégorie $\mathcal{E}_G(X)$ des G-fibrés vectoriels, réels ou complexes, sur un G-espace compact X (¹).

1.2. Soit $C^{p,q}$ l'algèbre de Clifford de R^{p+q} muni de la forme quadratique Q définie par

$$Q(x_1, \ldots, x_{p+q}) = -x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2,$$

et soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach. On désigne par $\mathcal{C}^{p,q}$ la catégorie de Banach formée des objets de $\mathcal{C}$ où $C^{p,q}$ opère : un objet de $\mathcal{C}^{p,q}$ est donc un couple (E, ρ) où E est un objet de $\mathcal{C}$ et où $\rho : C^{p,q} \to \mathrm{End}\,E$ est un homomorphisme d'algèbres ($C^{p,q}$ s'identifiant ainsi à une algèbre d'opérateurs de E); un morphisme de $\mathcal{C}^{p,q}$ de source (E, ρ) et de but (E, ρ') est un $\mathcal{C}$-morphisme $f : E \to E'$ tel que, $\forall \lambda \in C^{p,q}$, $f.\rho(\lambda) = \rho'(\lambda).f$. Par abus de langage, un objet de $\mathcal{C}^{p,q}$ sera appelé parfois un $C^{p,q}$-module.

Un $C^{p,q}$-module E est dit *gradué*, de graduation ε, s'il est muni d'un automorphisme involutif ε qui anticommute avec les générateurs de l'algèbre $C^{p,q}$. On désignera alors par E^0 l'objet de $\mathcal{C}$, noyau du projecteur $1/2(\varepsilon - 1)$. Si (E, ε) et (F, η) sont deux $C^{p,q}$-modules gradués, un $\mathcal{C}^{p,q}$-morphisme $f : E \to E'$ est dit de « degré zéro » si $f.\varepsilon = \eta.f$.

Soient e_i (resp. ε_i), $i = 1, \ldots, 4$, les générateurs de l'algèbre de Clifford $C^{4,0}$ (resp. $C^{0,4}$). L'homomorphisme $f : C^{4,0} \to C^{0,4}$ défini par $f(e_i) = \varepsilon_1 \ldots \hat{\varepsilon}_i \ldots \varepsilon_4$ est un isomorphisme d'algèbres Z_2-graduées. Ceci implique que les algèbres $C^{p+4,q} \approx C^{p,q} \hat{\otimes} C^{4,0}$ et $C^{p,q+4} \approx C^{p,q} \hat{\otimes} C^{0,4}$ sont isomorphes et que les catégories $\mathcal{C}^{p+4,q}$ et $\mathcal{C}^{p,q+4}$ le sont également. Dans le cas où $k = \mathbf{C}$, on montre de même que les catégories $\mathcal{C}^{p+1,q}$ et $\mathcal{C}^{p,q+1}$ sont isomorphes grâce à l'isomorphisme $f_{\mathbf{C}}$ de $C^{1,0} \otimes \mathbf{C}$ sur $C^{0,1} \otimes \mathbf{C}$ défini par $f_{\mathbf{C}}(e_1) = i\varepsilon_1$.

Définissons maintenant un foncteur $\chi : \mathcal{C}^{p,q} \to \mathcal{C}^{p+1,q+1}$ de la manière suivante : soit E un objet de $\mathcal{C}^{p,q}$ et soient e_i, ε_j, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$, les générateurs de l'algèbre de Clifford $C^{p,q}$.

On pose alors $\chi(E) = E \oplus E$, les générateurs e'_i, ε'_j, $i = 1, \ldots, p+1$, $j = 1, \ldots, q+1$, de $C^{p+1,q+1}$ opérant sur $\chi(E)$ par les formules

$$e'_i = \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & -e_i \end{pmatrix}, \quad e'_{p+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon'_j = \begin{pmatrix} \varepsilon_j & 0 \\ 0 & -\varepsilon_j \end{pmatrix}, \quad \varepsilon'_{q+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$. Pour un morphisme f quelconque de $\mathcal{C}^{p,q}$, on pose de même

$$\chi(f) = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 1. — *Le foncteur χ est une équivalence des catégories $\mathcal{C}^{p,q}$ et $\mathcal{C}^{p+1,q+1}$.*

COROLLAIRE. — *Désignons par $\mathcal{C}^n$ la catégorie $\mathcal{C}^{n,0}$ si n est positif et la catégorie $\mathcal{C}^{0,-n}$ si n est négatif. Si $k = \mathbf{R}$ (resp. $k = \mathbf{C}$), les catégories $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^{n+8}$ (resp. $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^{n+2}$) sont équivalentes.*

1.3. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories de Banach et soit $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur additif. On dit que φ est *linéaire continu* si, quels que soient les objets M et N de $\mathcal{C}$, l'application $u \rightsquigarrow \varphi(u)$ de Hom(M, N) dans Hom(φM, φN) est linéaire continue. Le foncteur φ est dit un *foncteur de Serre* si, en outre, l'application Aut M $\to$ Aut φM est une fibration de Serre. Le foncteur φ est dit *quasi-surjectif* si tout objet de $\mathcal{C}'$ est isomorphe à un facteur direct de l'image d'un objet de $\mathcal{C}$ par φ. On désigne par $\varphi^{p,q}$ le foncteur de $\mathcal{C}^{p,q}$ dans $\mathcal{C}'^{p,q}$ induit par φ. Si φ est un foncteur de Serre (resp. quasi-surjectif), il en est de même de $\varphi^{p,q}$.

Exemple de foncteur de Serre quasi-surjectif. — Le foncteur « restriction » $\mathcal{E}_G(X) \to \mathcal{E}_G(Y)$, G étant un groupe compact et Y étant un sous-espace fermé, invariant par G, du G-espace compact X.

1.4. Soit $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre quasi-surjectif. Désignons par $\mathcal{E}^{p,q}(\varphi)$ l'ensemble des triples (E, F, α) où E et F sont deux objets gradués de $\mathcal{C}^{p,q}$ et où $\alpha : E \to F$ est un isomorphisme de $C^{p,q}$-modules, $\varphi\alpha : \varphi E \to \varphi F$ étant de degré zéro. Un élément (E, F, α) de $\mathcal{E}^{p,q}(\varphi)$ est dit *élémentaire* si α est de degré zéro. Deux éléments (E_0, F_0, α_0) et (E_1, F_1, α_1) sont dits *homotopes* s'il existe deux isomorphismes de degré zéro $f : E_0 \to E_1$, $g : F_0 \to F_1$, et une application continue α : $[0, 1] \to \mathrm{Iso}_{\mathcal{C}^{p,q}}(E_0, F_0)$ telle que $\alpha(0) = \alpha_0$, $\alpha(1) = g^{-1}\alpha_1 f$ et que $\varphi(\alpha(t))$

soit de degré zéro. La somme de deux triples (E_0, F_0, α_0) et (E_1, F_1, α_1) est le triple $(E_0 \oplus E_1, F_0 \oplus F_1, \alpha_0 \oplus \alpha_1)$. L'ensemble quotient de $\mathcal{E}^{p,q}(\varphi)$ par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition de triples élémentaires est un groupe abélien qu'on note $K^{p,q}(\varphi)$; l'image de (E, F, α) dans $K^{p,q}(\varphi)$ se note $d(E, F, \alpha)$. Si $\mathcal{C}' = 0$, on écrit $K^{p,q}(\mathcal{C})$ le groupe $K^{p,q}(\varphi)$. On convient que $K^n(\varphi)$ [resp. $K^n(\mathcal{C})$] représente le groupe $K^{n,0}(\varphi)$ [resp. $K^{n,0}(\mathcal{C})$] si n est positif et le groupe $K^{0,-n}(\varphi)$ [resp. $K^{0,-n}(\mathcal{C})$] si n est négatif. D'après la proposition 1 on a des isomorphismes $K^n(\varphi) \approx K^{n+8}(\varphi)$ si $k = \mathbf{R}$, et $K^n(\varphi) \approx K^{n+2}(\varphi)$ si $k = \mathbf{C}$. Les groupes $K^{p,q}(\varphi)$, $K^{p,q}(\mathcal{C})$, ... dépendent fonctoriellement de φ, $\mathcal{C}$, ... en un sens facile à préciser.

Proposition 2. — L'homomorphisme g de $K^0(\mathcal{C})$ dans $K(\mathcal{C})$ défini par $g(d(E, F, \alpha)) = \{E^0\} - \{F^0\}$ est un isomorphisme.

2. La suite exacte de cohomologie et les théorèmes de périodicité de Bott. — 2.1. Soit $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre quasi-surjectif entre deux catégories de Banach. On va définir un opérateur « cobord »

$$\partial^{p,q+1} : K^{p,q+1}(\mathcal{C}') \to K^{p,q}(\varphi).$$

Soit $d(E', F', \alpha')$ un élément de $K^{p,q+1}(\mathcal{C}')$. Comme $\varphi^{p,q+1}$ est quasi-surjectif, on peut supposer, en ajoutant au triple (E', F', α) un triple élémentaire, que $E' = \varphi^{p,q+1}(E)$. Soient e_i, ε_j, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q+1$, les générateurs de l'algèbre de Clifford $C^{p,q+1}$ et soit ε (resp. η) la graduation de E' (resp. F'). Considérons l'automorphisme de E' considéré comme $C^{p,q}$-module (par restriction des scalaires) $\beta_0 = \alpha'^{-1}(\cos\theta/2 + \varepsilon_{q+1}\eta\sin\theta/2)$ $\alpha'(\cos\theta/2 - \varepsilon_{q+1}\varepsilon\sin\theta/2)$, où $\theta \in [0, \pi]$. Comme $\varphi^{p,q}$ est un foncteur de Serre, il existe une application continue $\theta \rightsquigarrow \alpha_0$, de $[0, \pi]$ dans le groupe des automorphismes du $C^{p,q}$-module E, telle que $\alpha_0 = \mathrm{Id}$ et $\varphi^{p,q}(\alpha_0) = \beta_\zeta$. En considérant E comme un $C^{p,q}$-module muni de la graduation ε_{q+1}, on pose alors $\partial^{p,q+1}(d(E', F', \alpha')) = d(E, E, \alpha_\pi)$. Pour $n > 0$, on définit ∂^{-n} comme étant $\partial^{0,n}$, et ∂^{n-1} comme étant le composé

$$K^{n-1,0}(\mathcal{C}') \underset{\approx}{\xrightarrow{\gamma^*}} K^{n,1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{\partial^{n,1}} K^n(\varphi).$$

Théorème 1. — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories de Banach et soit $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre quasi-surjectif. La suite*

$$\ldots \to K^{n-1}(\mathcal{C}) \to K^{n-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{\partial^{n-1}} K^n(\varphi) \to K^n(\mathcal{C}) \to K^n\mathcal{C}') \to \ldots,$$

où les homomorphismes autres que ∂^{n-1} sont naturels, est une suite exacte.

La démonstration de ce théorème [*cf.* (3)] est délicate et utilise les techniques de Wood (4).

2.2. Le théorème 1 implique les théorèmes de périodicité de Bott (sous une forme plus générale). En effet, considérons par exemple la catégorie de

Banach $\mathcal{E}_G(X)$ (§ 1.3) et les groupes $h^n(Y, Z) = K^n_G(X\times Y, X\times Z) = K^n(\varphi)$ où φ est le foncteur « restriction » $\mathcal{E}_G(X\times Y) \to \mathcal{E}_G(X\times Z)$. Dans ce cas, les foncteurs h^n, munis des opérateurs cobords ∂^n définis plus haut, forment une théorie de la cohomologie sur la catégorie des paires (Y, Z) où Y est un espace compact et où Z est un sous-ensemble fermé de Y. Cette théorie vérifie tous les axiomes d'Eilenberg-Steenrod excepté l'axiome de dimension. En particulier on a un isomorphisme de « suspension » $h^0(\text{Point}) \approx h^8(D^8, S^7) \approx h^0(D^8, S^7)$, d'où le théorème de périodicité de Bott :

$$K_G(X) \approx K_G(X \times D^8, X \times S^7)$$

en K_G-théorie. Dans le cas des G-fibrés complexes, on a évidemment un autre théorème de périodicité $K_G(X) \approx K_G(X\times D^2, X\times S^1)$; il est d'ailleurs beaucoup plus aisé à montrer directement ([1]).

(*) Séance du 17 août 1966.

([1]) ATIYAH et SEGAL, *Equivariant K-theory*, The mathematical Institute, Oxford.

([2]) A. GROTHENDIECK, *Introduction au langage fonctoriel*, Faculté des Sciences d'Alger.

([3]) M. KAROUBI, *Fondements de la K-théorie*, Faculté des Sciences d'Alger.

([4]) R. WOOD, *Banach Algebras and Bott periodicity*.

(*Faculté des Sciences, Département des Mathématiques, Alger.*)

173054. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.