C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 341-344 (5 septembre 1966). Série A

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Cohomologie des catégories de Banach : applications*. Note de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

1. *Le théorème de Thom-Gysin en* K-*théorie*. — 1.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, où $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ est muni d'une structure d'espace de Banach. On dit que $\mathcal{C}$ est une *catégorie prébanachique* si elle satisfait aux axiomes des catégories de Banach [1], excepté l'axiome *c*. Étant donné une catégorie prébanachique $\mathcal{C}$, soit $\mathfrak{T}$ la catégorie prébanachique suivante : un objet de $\mathfrak{T}$ est une paire $(E, p)$, où E est un objet de $\mathcal{C}$ et où $p$ est un endomorphisme idempotent de E; un morphisme de $\mathfrak{T}$ de source $(E, p)$ et de but $(E', p')$ est un $\mathcal{C}$-morphisme $f: E \to E'$ tel que $p'.f = f.p$. De tels morphismes $f_0$ et $f_1$ de $\mathfrak{T}$ sont dits équivalents si $p'.f_0 = p'.f_1$. Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ la catégorie dont les objets sont les objets de $\mathfrak{T}$ et dont les morphismes sont les classes d'équivalence de morphismes de $\mathfrak{T}$. La catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ est alors une catégorie de Banach, et $\mathcal{C}$ se plonge dans $\tilde{\mathcal{C}}$ de manière évidente. La catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ est dite la *catégorie de Banach associée à la catégorie prébanachique* $\mathcal{C}$.

Considérons en particulier un espace compact X, une catégorie de Banach $\mathcal{C}$ et la catégorie prébanachique $\mathcal{C}_T(X)$ ainsi décrite : un objet de $\mathcal{C}_T(X)$ est un objet de $\mathcal{C}$; un morphisme de $\mathcal{C}_T(X)$ de source M et de but N est une famille de morphismes $f_x : M \to N$, $x \in X$, telle que l'application $x \leadsto f_x$ soit une applications continue de X dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$. La catégorie $\mathcal{C}_T(X)$ est dite la catégorie des $\mathcal{C}$-*fibrés triviaux* au-dessus de X. La catégorie de Banach associée $\mathcal{C}(X) = \widetilde{\mathcal{C}_T(X)}$ est dite celle des $\mathcal{C}$-*fibrés localement triviaux* sur X. Cette terminologie est justifiée par le fait que, pour tout fibré $\xi$, il existe un recouvrement ouvert $[U_i]$ de X tel que $\xi|_{U_i}$ soit isomorphe à un fibré trivial. Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie, on retrouve la notion de fibré vectoriel classique (à équivalence de catégories près). Enfin si $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un foncteur linéaire continu, il induit de manière évidente un foncteur linéaire continu $\varphi(X) : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}'(X)$.

1.2. Soit W un fibré vectoriel réel de dimension finie sur un espace compact X, muni d'une forme quadratique non dégénérée Q, et soit une catégorie de Banach $\mathcal{C}$. Si E est un objet de $\mathcal{C}(X)$, une structure de $C(W)$-*module* sur E [$C(W)$ désignant le fibré en algèbres de Clifford associé à W et Q] est une application continue $\rho : W \to \mathrm{End}\,E$ telle que $(\rho(w))^2 = Q(w)\,\mathrm{Id}_E$. Dans cette définition $\mathrm{End}\,E$ est le fibré banachique dont la fibre au point $x$ de X est l'espace de Banach $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(E_x)$ : si $E = (M, p)$, il est l'image du projecteur $q$ de $X \times \mathrm{End}\,M$ défini par $q(x, f) = (x, p_x.f.p_x)$. On désigne par $\mathcal{C}^W(X)$ la catégorie de Banach des $\mathcal{C}$-fibrés en $C(W)$-modules.

Considérons maintenant un foncteur de Serre quasi-surjectif ([1]) $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre deux catégories de Banach [si $\varphi$ n'est pas de Serre, on le remplace par son « cylindre d'application »; *cf.* ([3])]. Soit V un sous-fibré de W tel que la restriction de Q à V soit non dégénérée. Si Y est un sous-ensemble fermé de X, on désigne par $\mathcal{E}^{W;V}(X, Y; \varphi)$ l'ensemble des triples $(E, w^1, w^2)$, où E est un $\mathcal{C}$-fibré et où $w^1$ et $w^2$ sont deux structures de C(W)-module sur E telles que $w^1|_V = w^2|_V$, $w^1|_Y = w^2|_Y$ et que $\varphi(X)(w^1) = \varphi(X)(w^2)$. Un triple $(E, w^1, w^2)$ est dit *élémentaire* si $w^1 = w^2$; deux triples $(E_0, w_0^1, w_0^2)$ et $(E_1, w_1^1, w_1^2)$ sont dits *homotopes* s'il existe un élément $(E, w^1, w^2)$ de $\mathcal{E}^{W\times[0,1];V\times[0,1]}(X\times[0,1], Y\times[0,1]; \varphi)$ dont les restrictions à $X \times \{0\}$ et à $X \times \{1\}$ soient les deux triples donnés. Définissons la somme de deux triples $(E_0, w_0^1, w_0^2)$ et $(E_1, w_1^1, w_1^2)$ comme étant $(E_0 \oplus E_1, w_0^1 \oplus w_1^1, w_0^2 \oplus w_1^2)$. Le quotient de $\mathcal{E}^{W;V}(X, Y; \varphi)$ par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition de triples élémentaires est alors un groupe abélien qu'on note $K^{W;V}(X, Y; \varphi)$. On écrit $d(E, w^1, w^2)$ la classe de l'élément $(E, w^1, w^2)$ dans $K^{W;V}(X, Y; \varphi)$. Remarquons que, dans cette expression, on peut supposer le $\mathcal{C}$-fibré E trivial.

En particulier, soit $T^{p,q}$ le fibré trivial $X \times R^{p+q}$, muni de la forme quadratique $-x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2$, et supposons que $W = V \oplus T^{0,1}$; on note alors $K^V(X, Y; \varphi)$ le groupe $K^{W,V}$ obtenu. Si $V = T^{p,q}$ et si $Y = \emptyset$, on retrouve ainsi la définition de $K^{p,q}(X; \varphi) = K^{p,q}(\varphi(X))$. En effet, on définit un isomorphisme $c$ de $K^{T^{p,q}}(X; \varphi)$ dans $K^{p,q}(X; \varphi)$ par la formule $c(d(E, w^1, w^2)) = d(E^1, E^2, \alpha) : E^i$, $i = 1, 2$, est l'objet E muni de la structure de $C^{p,q+1}$-module $w^i$ et $\alpha : E^1 \to E^2$ est le $C^{p,q}$-morphisme égal à l'identité sur les objets de $\mathcal{C}$ sous-jacents (la donnée d'un $C^{p,q+1}$-module équivaut évidemment à celle d'un $C^{p,q}$-module gradué).

*Notations.* — On se permettra souvent d'écrire $K^{W;V}(X, Y)$, $K^V(X, Y)$, $K^{p,q}(X, Y)$, ... au lieu de $K^{W;V}(X, Y; \varphi)$, $K^V(X, Y; \varphi)$, $K^{p,q}(X, Y; \varphi)$, .... Dans la suite de cette Note, W sera toujours le fibré $V \oplus T^{0,1}$.

1.3. Soit $V = V' \oplus V''$ une décomposition de V en sous-fibrés orthogonaux pour Q, la restriction de Q à $V'$ étant définie positive. Identifions le fibré en boules $B(V')$ à l'hémisphère supérieur $S^+(V' \oplus 1)$ du fibré en sphères $S(V' \oplus 1)$, 1 désignant le fibré $T^{0,1}$. On définit alors un homomorphisme $t$ de $K^{V' \oplus V''}(X)$ dans $K^{\pi^* V''}(B(V'), S(V'))$ par la formule $t(d(E, w^1, w^2)) = d(\pi^* E, \varepsilon(w^1), \varepsilon(w^2))$, où :

*a.* $\pi : S^+(V' \oplus 1) \to X$ désigne la projection canonique;

*b.* les structures de $C(V'' \oplus 1)$-module de $\pi^* E$ sont représentées par les applications $\varepsilon(w^i) : V'' \oplus 1 \to \operatorname{End} \pi^* E$, $i = 1, 2$, qui sont définies au point $(v', \lambda)$ de $S^+(V' \oplus 1)$ par

$$\varepsilon(w^i)(v'', \mu) = w^i(0, v'', 0) + \mu w^i(v', 0, \lambda).$$

Théorème 1.1 ([3]). — *L'homomorphisme*

$$t : \mathrm{K}^{\mathrm{V}' \oplus \mathrm{V}''}(\mathrm{X}) \to \mathrm{K}^{\pi^* \mathrm{V}''}(\mathrm{B}(\mathrm{V}'), \mathrm{S}(\mathrm{V}'))$$

*est un isomorphisme.*

1.4. Soit Spin $(p, q)$ le sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathrm{C}^{p,q})^\star$ formé des éléments $x$ de degré zéro tels que

*a.* $\forall y \in \mathrm{R}^{p+q}$, $xyx^{-1} \in \mathrm{R}^{p+q}$;

*b.* $x^\star x = 1$, $^\star$ désignant l'antiinvolution de $\mathrm{C}^{p,q}$ définie sur les générateurs $e_i$ de $\mathrm{C}^{p,q}$, $i = 1, \ldots, p+q$, par $e_i^\star = -e_i$.

Pour un élément $x$ de Spin $(p, q)$, la transformation $\sigma(x)$ de $\mathrm{R}^{p+q}$ définie par $\sigma(x)y = xyx^{-1}$ appartient en fait à $\mathrm{SO}(p, q)$ et l'on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Z}_2 \to \mathrm{Spin}(p, q) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{SO}(p, q) \to 0.$$

Soit maintenant V un fibré vectoriel réel muni d'une forme quadratique non dégénérée de type $(q, p)$, i. e. dont le groupe structural est $\mathrm{O}(p, q)$. On dira que le fibré V est spinoriel de type Spin $(p, q)$ si l'on se donne un fibré principal P de groupe $\mathrm{Spin}(p, q)$ tel que $\mathrm{V} \approx \mathrm{P} \times_{\mathrm{Spin}(p,q)} \mathrm{R}^{p+q}$. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach arbitraire, on définit alors une équivalence de catégories $u : \mathcal{C}^{p,q}(\mathrm{X}) \to \mathcal{C}^{\mathrm{V}}(\mathrm{X})$ par les formules

$$u(\mathrm{E}) = \mathrm{P} \times_{\mathrm{Spin}(p,q)} \mathrm{E}, \quad u(f) = \mathrm{Id}_{\mathrm{P}} \times_{\mathrm{Spin}(p,q)} f$$

sur les objets E et les morphismes $f$ de $\mathcal{C}^{p,q}(\mathrm{X})$ (cette définition suppose implicitement que les objets de $\mathcal{C}$ sont des espaces de Banach, mais cette difficulté est tournée aisément en considérant des cartes). En particulier, le foncteur $u$, appliqué aux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, induit un isomorphisme, noté encore $u$, de $\mathrm{K}^{p,q}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \varphi)$ sur $\mathrm{K}^{\mathrm{V}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \varphi)$. D'où le théorème :

Théorème 1.2 ([3]). — *Soit* V *un fibré spinoriel de type* $\mathrm{Spin}(p, q)$. *Selon les notations du paragraphe* 1.3, *l'homomorphisme*

$$t.u : \mathrm{K}^{p,q}(\mathrm{X}) \to \mathrm{K}^{\pi^* \mathrm{V}''}(\mathrm{B}(\mathrm{V}'), \mathrm{S}(\mathrm{V}'))$$

*est un isomorphisme.*

Corollaire [comparer avec ([2])]. — *Soit* V *un fibré spinoriel de type* $\mathrm{Spin}(0, n)$. *L'homomorphisme de* $\mathrm{K}(\mathrm{X})$ *dans* $\mathrm{K}^n(\mathrm{B}(\mathrm{V}), \mathrm{S}(\mathrm{V}))$ *défini comme le composé*

$$\mathrm{K}(\mathrm{X}) \xrightarrow{\chi^n} \mathrm{K}^{n,n}(\mathrm{X}) \xrightarrow{t.u} \mathrm{K}^n(\mathrm{B}(\mathrm{V}), \mathrm{S}(\mathrm{V}))$$

*est un isomorphisme.*

*Remarque.* — Si l'on pose $\mathrm{Spin}^{\mathrm{U}}(p, q) = \mathrm{Spin}(p, q) \times_{\mathrm{Z}_2} \mathrm{U}(1)$, on a un homomorphisme $\sigma^{\mathrm{U}} : \mathrm{Spin}^{\mathrm{U}}(p, q) \to \mathrm{SO}(p, q)$ défini par $\sigma^{\mathrm{U}}(x, \lambda) = \sigma(x)$. Si $k = \mathrm{C}$, le théorème 1.2 et son corollaire s'écrivent alors en remplaçant Spin par $\mathrm{Spin}^{\mathrm{U}}$ [*cf.* ([2]), ([3])].

1.5. Considérons le foncteur $\varphi_r : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, défini par $\varphi_r(\mathrm{E}) = \underbrace{\mathrm{E} + \ldots + \mathrm{E}}_{r}$.

On définit le groupe $K^{p,q}(X; Z_r)$ (par rapport à la catégorie de base $\mathcal{C}$) comme étant le groupe $K^{p+1,q}(X; \varphi_r)$. Le foncteur

$$E \rightsquigarrow C(V \oplus T^{n,0}) \otimes E$$

(même remarque que pour la définition de $u$) de $\mathcal{C}(X)$ dans $\mathcal{C}^{V\oplus T^{n,0}}(X)$ induit un homomorphisme $s$ de $K(X; Z_r)$ dans $K^{V\oplus T^{n,0}}(X; Z_r)$.

THÉORÈME 1.3 ([3]). — *Soit* V *un fibré vectoriel réel de dimension n muni d'une forme quadratique définie positive.* Si *r* est impair, *l'homomorphisme*

$$t.s : K(X; Z_r) \to K^n(B(V), S(V); Z_r)$$

*est un isomorphisme.*

([1]) *Voir* une Note précédente (*Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 275) dont nous conservons la terminologie.

([2]) ATIYAH, BOTT et SHAPIRO, *Clifford modules.*

([3]) M. KAROUBI, *Fondements de la K-théorie*, Faculté des Sciences d'Alger.

(*Faculté des Sciences, Département des Mathématiques, Alger.*)

173094. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.