C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 357-360 (12 septembre 1966). Série A

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Cohomologie des catégories de Banach : applications*. Note de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

2. K-*théorie des fibrés projectifs réels*. — 2.1. Reprenons les notations du paragraphe 1.2 de la Note précédente ([7]), mais supposons la forme quadratique Q définitive positive (le cas général sera étudié au paragraphe 3). On va définir un homomorphisme p de $K^{W\oplus 1;V\oplus 1}(X)$ dans $K^{-1}(P(W), P(V))$. Tout élément de $K^{W\oplus 1;V\oplus 1}(X)$ s'écrit $d(E, \eta, w^1, w^2)$, où η est un automorphisme involutif de E représentant l'action du vecteur unité de $T^{0,1}$, et où w^i, $i = 1, 2$, représentent deux structures de $C(W)$-module sur E telles que $w^1\|_V = w^2|_V$, $\varphi(X)(w^1) = \varphi(X)(w^2)$ et que $\eta . w^i = - w^i . \eta$. On pose alors $p(d(E, \eta, w^1, w^2)) = d(E', \eta', \varepsilon(w^1), \varepsilon(w^2))$, où :

a. $E' = E_{\times Z_2} S(W)$, Z_2 opérant sur E par l'involution η et sur S(W) par l'action antipodique. C'est évidemment un fibré sur P(W).

b. η' est l'automorphisme involutif de E' (représentant l'action de $C^{0,1}$) défini par $\eta'(e, w) = (\eta e, w)$.

c. $\varepsilon(w^i)$ est la graduation de E' définie au point (e, w) de E' par $\varepsilon(w^i)(e, w) = (w^i(w) e, w)$.

Théorème 2.1 ([8]). — *L'homomorphisme*

$$p : K^{W\oplus 1;V\oplus 1}(X) \to K^{-1}(P(W), P(V))$$

est un isomorphisme.

Corollaire 1. — *Soit* $\mathcal{C}' = 0$; *le groupe* $K(P(W), P(V))$ *est alors isomorphe au groupe* K^1 *du foncteur restriction des scalaires* $\mathcal{C}^{W\oplus 1}(X) \to \mathcal{C}^{V\oplus 1}(X)$.

Corollaire 2. — *Soit* $k = \mathbf{R}$; *les groupes* $K^n(P(W), P(V))$ *et* $K^{n+4}(P(W\oplus 4), P(V\oplus 4))$ *sont alors isomorphes. En particulier, les groupes* $K^n(P(W), P(V))$ *et* $K^n(P(W\oplus 8), P(V\oplus 8))$ *sont isomorphes. Soit* $k = \mathbf{C}$; *les groupes* $K^n(P(W), P(V))$ *et* $K^n(P(W\oplus 2), P(V\oplus 2))$ *sont isomorphes.*

2.2. Notons $K^{p,q;p',q'}(X)$ le groupe $K^{T^{p,q};T^{p',q'}}(X)$ et supposons les fibrés V et W spinoriels de type Spin $(0, l)$ et Spin $(0, r)$ respectivement. Les équivalences de catégories $\mathcal{C}^{0,r+1}(X) \approx \mathcal{C}^{W\oplus 1}(X)$ et $\mathcal{C}^{0,l+1}(X) \approx \mathcal{C}^{V\oplus 1}(X)$ induisent un isomorphisme u de $K^{0,r+1;0,l+1}(X)$ sur $K^{W\oplus 1;V\oplus 1}(X)$. Pour $k = \mathbf{C}$, on a un résultat analogue si les fibrés V et W sont « ^{U}spinoriels » (i. e. de groupe structural Spin^U).

THÉORÈME 2.2. — *Soit* $k = \mathbf{R}$ (*resp.* $k = \mathbf{C}$) *et soient* V *et* W *des fibrés spinoriels* (*resp.* ${}^{\mathrm{C}}$*spinoriels*). *L'homomorphisme*

$$p.u : \quad K^{0,r+1;\,0,\,l+1}(X) \to K^{-1}(P(W),\, P(V))$$

est alors un isomorphisme. En particulier, le groupe $K^n(P(W), P(V); \varphi)$ *ne dépend que de* n, X, φ *et des dimensions respectives de* V *et de* W.

COROLLAIRE 1. — *Soit* $\mathcal{C}' = 0$, $k = \mathbf{R}$, $r = l + 8t$, $l \equiv 0 \bmod 2$; *si* V *et* W *sont des fibrés spinoriels, les groupes* $K^n(P(W), P(V))$ *et* $K^n(X; Z_{16t})$ *sont isomorphes. Soit* $\mathcal{C}' = 0$, $k = \mathbf{C}$, $r = l + 2t$, $l \equiv 1 \bmod 2$: *si* V *et* W *sont des fibrés* ${}^{\mathrm{C}}$*spinoriels, les groupes* $K^n(P(W), P(V))$ *et* $K^n(X; Z_{t})$ *sont aussi isomorphes.*

COROLLAIRE 2 [(1), (4), (8)]. — *Soit* X = Point, $\mathcal{C}' = 0$, $\mathcal{C} = P(\mathbf{R})$ *la catégorie des espaces vectoriels réels de dimension finie* [*resp.* $\mathcal{C} = P(\mathbf{C})$ *la catégorie des espaces vectoriels complexes de dimension finie*). *Soit* P_n, $n \geq -1$, *l'espace projectif réel de* $\mathbf{R}^{n+1}$. *Le groupe* $K(P_r, P_l)$ *est alors isomorphe au conoyau de l'homomorphisme de restriction naturel* $K(\mathcal{C}^{0,r+1}) \to K(\mathcal{C}^{0,l+1})$. *En particulier, soit* $b_{r,l}$ *le nombre d'entiers* m *tels que* $l < m \leq r$ *et* $m \equiv 0, 1, 2, 4 \bmod 8$ (*resp.* $m \equiv 0 \bmod 2$). *Soit* $a_{r,1} = 2^{b_{r,1}}$. *Alors, si* $l \geq 0$,

$$K(P_r, P_l) = Z_{a_{r,l}} \quad \textit{si} \quad l \not\equiv -1 \bmod 4 \quad (\textit{resp. } l \not\equiv -1 \bmod 2),$$
$$K(P_r, P_l) = Z \oplus Z_{a_{r,l}} \quad \textit{si} \quad l \equiv -1 \bmod 4 \quad (\textit{resp. } l \equiv -1 \bmod 2),$$
$$K^4(P_r, P_l) = K(P_{r+4}, P_{l+4}).$$

3. *Applications à la théorie* KR (3). — 3.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach et X un Z_2-espace compact (i. e. un espace compact muni d'un automorphisme involutif σ). Soit $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}$ la catégorie formée des objets de $\mathcal{C}$ où $\mathbf{C}$ opère (i. e. $\mathcal{C}^{1,0}$). On désigne par $\mathcal{C}^{R}(X)$ la catégorie de Banach suivante : un objet de $\mathcal{C}^{R}(X)$ est un couple (E, τ) où E est un $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}$-fibré et où τ est une involution *antilinéaire* de E dont la projection sur X est l'automorphisme σ; un $\mathcal{C}^{R}(X)$-morphisme de (E, τ) dans (E', τ') est un morphisme de $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}(X)$ commutant aux involutions τ et τ'. On appelle $KR^{p,q}(X; \mathcal{C})$ le groupe $K^{p,q}(\mathcal{C}^{R}(X))$ [(3), (8)].

Soit $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre quasi surjectif et soit Y un sous-ensemble fermé de X invariant par σ. Soit W un Z_2-fibré réel sur X (5) d'involution h, muni d'une forme quadratique non dégénérée Q invariante par h, et soit V un sous-Z_2-fibré de W tel que la restriction de Q à V soit non dégénérée. En suivant le schéma du paragraphe 1.2, on construit un groupe plus général $KR^{W;V}(X, Y; \varphi)$ à partir d'éléments $(E, \mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2)$ ainsi définis : E est un $\mathcal{C}$-fibré trivial sur X; $\mathscr{P}^i$, $i = 1, 2$, sont deux structures de C(W)-module sur $E \otimes \mathbf{C} \in \mathrm{o}b\, \mathcal{C}_{\mathbf{C}}$, vérifiant les conditions $\varphi(X)(\mathscr{P}^1) = \varphi(X)(\mathscr{P}^2)$, $\mathscr{P}^1|_V = \mathscr{P}^2|_V$, $\mathscr{P}^1|_Y = \mathscr{P}^2|_Y$ et $\mathscr{P}^i_{\sigma x} = \overline{h(\mathscr{P}^i_x)}$ ($\overline{}$ désignant la conjugaison complexe).

Si les involutions de X et de W sont triviales (i. e. égales à l'identité), on retrouve le groupe $K^{W;V}(X, Y, \varphi)$. Si $W = V \oplus T^{0,1}$ (h étant sur $T^{0,1}$ le produit de σ par l'identité), on désigne par $KR^{V}(X, Y; \varphi)$ le groupe $KR^{W;V}$ obtenu. De manière générale, on se permettra les abus de langage signalés à la fin du paragraphe 1.2.

3.2. Supposons, pour simplifier, l'involution sur X triviale. Soit $V = V' \oplus V''$ un fibré vectoriel réel sur X muni d'une forme quadratique non dégénérée $Q = Q' \oplus Q''$, où Q' (resp. Q'') est définie positive (resp. définie négative). Dans ce cas, B (V) et S (V), fibrés en boules et en sphères de V pour la forme quadratique $Q' \oplus (-Q'')$, sont des Z_2-espaces de manière naturelle, l'involution σ étant définie par $\sigma(v', v'') = (v', -v'')$. Si U est un autre fibré vectoriel réel, muni d'une forme quadratique non dégénérée et de l'involution h égale à l'identité, on définit un homomorphisme t de $K^{V\oplus U}(X)$ dans $KR^{\pi^*U}(B(V), S(V))$ par la formule

$$t(d(E, w^1, w^2)) = d(\pi^*E, \varepsilon(\tilde{w}^1), \varepsilon(\tilde{w}^2)).$$

Dans cette formule on pose $\tilde{w}^\alpha(u, v', v'', \lambda) = w^\alpha(u, v', iv'', \lambda)$, $\alpha = 1, 2$, les autres notations étant celles du paragraphe 1.3. Le théorème suivant généralise alors le théorème 1.1.

Théorème 3.1. — *L'homomorphisme*

$$t: K^{V\oplus U}(X) \to KR^{\pi^*U}(B(V), S(V))$$

est un isomorphisme.

Corollaire. — *Supposons* V *spinoriel de type* Spin (p, q). *L'homomorphisme $t.u$ de* $K^{p,q}(X)$ *dans* $KR(B(V), S(V))$ *est un isomorphisme.*

Les hypothèses du corollaire sont vérifiées notamment lorsque V' et V'' sont spinoriels ou lorsque V est de la forme $T \otimes \mathbf{C}$, l'involution sur V étant définie par la conjugaison complexe.

Application. — En suivant Anderson [2] et Atiyah [3], posons

$$KO^n(\varphi) = K^n(\varphi), \qquad KU^n(\varphi) = K^n(\varphi^{1,0}), \qquad Ksp^n(\varphi) = K^n(\varphi^{2,0}),$$
$$KC^n(\varphi) = KR^n(S^{2,0}; \varphi)$$

où $S^{2,0}$ désigne la sphère de dimension 1 munie de l'involution antipodique. Le théorème 3.1 permet alors de démontrer l'existence de suites exactes naturelles en φ :

$$\ldots \to KC^{n-1}(\varphi) \to KU^n(\varphi) \to KO^n(\varphi) \oplus Ksp^n(\varphi) \to KC^n(\varphi) \to \ldots,$$
$$\ldots \to KU^{n-1}(\varphi) \to KC^{n+1}(\varphi) \to KO^n(\varphi) \oplus Ksp^n(\varphi) \to KU^n(\varphi) \to \ldots,$$
$$\ldots \to KU^{n-1}(\varphi) \to KU^{n-1}(\varphi) \to KC^n(\varphi) \to KU^n(\varphi) \to \ldots.$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où $\mathcal{C}' = 0$ et où $\mathcal{C}$ est la catégorie de Banach $\mathcal{E}_G(X)$ [6]. Pour $G = 1$ ou pour X réduit à un point, on retrouve ainsi un résultat d'Anderson [2].

3.3. Les considérations du paragraphe 2 se transposent aussitôt en théorie KR. Ainsi, en reprenant les notations du paragraphe 3.1, on définit sans peine un homomorphisme p de $K^{W\oplus 1; V\oplus 1}(X)$ dans $KR^{0,1}(P(W), P(V))$, lequel généralise l'homomorphisme p du paragraphe 2.1.

THÉORÈME 3.2. — *L'homomorphisme*

$$p: \quad K^{W\oplus 1; V\oplus 1}(X) \to KR^{0,1}(P(W), P(V))$$

est un isomorphisme.

COROLLAIRE. — *Si* V *et* W *sont spinoriels, respectivement de type* Spin (n', q') *et* Spin (n, q), *l'homomorphisme* $p.u$ *est un isomorphisme de* $K^{n,q+1:n',q+1}(X)$ *sur* $KR^{0,1}(P(W), P(V))$.

Exemple d'application. — Soit $\mathcal{C}' = 0$, $\mathcal{C} = \mathcal{R}(\mathbf{R})$ et soit $P_{r,l}$ l'espace projectif réel de R^{r+l} muni de l'involution σ définie par

$$\sigma(x_1, \ldots, x_{r+l}) = (-x_1, \ldots, -x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+l}).$$

Le groupe $KR(P_{r,l})$ est alors isomorphe au groupe $Z \oplus Z_q$ avec $q = 2^r a_{l-r-1,0}$ (si $n < p$, on convient que $a_{n,p} = 16^{-s} a_{n+8s,p}$ pour s suffisamment grand).

(1) J.-F. ADAMS, *Ann. Math.*, 75, 1962, p. 603-632.
(2) D. W. ANDERSON, *Thèse* (non encore publiée).
(3) M. F. ATIYAH, *K-theory and reality*, The mathematical Institute, Oxford.
(4) ATIYAH, BOTT et SHAPIRO, *Topology*, 3, suppl. 1, 1964, p. 3-38.
(5) ATIYAH et SEGAL, *Equivariant K-theory*, The mathematical Institute, Oxford.
(6) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 275.
(7) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 341.
(8) M. KAROUBI, *Fondements de la K-théorie*, Faculté des Sciences d'Alger.

(Faculté des Sciences,
Département des Mathématiques, Alger.)

173095. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.