SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES — ÉTÉ 1969

K-THÉORIE

par Max KAROUBI

K-THÉORIE

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL — DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

K-THÉORIE

par
Max KAROUBI
Université de Strasbourg

1971
LES PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
C.P. 6128, MONTRÉAL 101, CANADA

AVANT-PROPOS

Les leçons rédigées ici donnent un panorama assez bref de certaines notions de base en K-théorie. On a préféré une rédaction condensée à une rédaction donnant toutes les démonstrations dans tous les détails ; on dispose à l'heure actuelle d'assez de publications en K-théorie (avec des points de vue variés) sans qu'il semble nécessaire d'infliger au lecteur un exposé trop fouillé. On a donc cherché ici à donner seulement une idée de ce qu'est la K-théorie, algébrique aussi bien que topologique. Comme exemple frappant de l'interaction des deux "théories", on peut citer les opérateurs de Fredholm dans les espaces de Hilbert, outil à priori purement topologique mais qui, convenablement modifié et généralisé, permet de définir les "bons foncteurs" K^n , $n \geq 0$, en K-théorie algébrique.

Les deux premières leçons sont des leçons d'introduction : essentiellement on y définit de manière axiomatique les foncteurs K^n algébriques et topologiques. Dans les autres leçons on se concentre sur la K-théorie topologique et, plus précisément, sur les théorèmes de périodicité de Bott (réel ou complexe) suivant une méthode déjà connue. Enfin, les leçons 5 et 6 sont consacrées aux opérateurs de Fredholm et questions connexes : espaces classifiants et coefficients locaux.

Les chapitres I, II et VI ont été rédigés par le Professeur Daniel Lehmann, de l'Université de Lille (France), et les chapitres III,IV et V, ont été rédigés par le Professeur Shuichi Takahashi, de l'Université de Montréal, Canada.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

INTRODUCTION

La K-théorie a son origine dans les théorèmes de périodicité de Bott : l'inclusion naturelle $U(n) \hookrightarrow U(n+1)$ [resp. $O(n) \hookrightarrow O(n+1)$] induit, pour tout $i \geq 0$, un homomorphisme $\pi_i(U(n)) \to \pi_i(U(n+1))$ [resp. $\pi_i(O(n)) \to \pi_i(O(n+1))$] qui est un isomorphisme pour $n \geq \frac{i+1}{2}$ [resp. $n \geq i+2$] (en effet, la fibration

$$U(n+1) \to U(n+1)/_{U(n)} = S^{2n+1}$$

donne lieu à une suite exacte :

$$\ldots \to \pi_{i+1}(S^{2n+1}) \to \pi_i(U(n)) \to \pi_i(U(n+1)) \to \pi_i(S^{2n+1}) \to \ldots \text{ , et}$$

$\pi_i(S^{2n+1}) = 0$ pour $i \leq 2n$; et de même avec la fibration $O(n+1) \to O(n+1)/_{O(n)} = S^n$. Notant $\pi_i(U)$ (resp. $\pi_i(O)$) le groupe $\pi_i(U(n))$ pour $n \geq \frac{i+1}{2}$ [resp. $\pi_i(O(n))$ pour $n \geq i+2$], le théorème de Bott s'énonce :

$\forall\, i \geq 0$ $\pi_{i+2}(U)$ est isomorphe à $\pi_i(U)$
et $\pi_{i+8}(O)$ est isomorphe à $\pi_i(O)$.

Plus précisément, on a le tableau suivant :

$i \equiv \text{mod } 8$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_i(U)$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
$\pi_i(O)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$

Ce théorème a initialement été démontré par Bott, en utilisant la théorie de Morse (cf. par exemple le dernier chapitre de Milnor : Morse theory). Atiyah et Hirzebruch en ont donné une interprétation en K-théorie de la façon suivante : ils définissent une suite de foncteurs

$$\text{Espaces compacts} \underset{\mathcal{E}0}{\overset{\mathcal{E}U}{\rightrightarrows}} \begin{array}{c}\text{Catégories}\\ \text{additives}\end{array} \xrightarrow{\Phi} \begin{array}{c}\text{Monoïdes}\\ \text{abéliens}\end{array} \xrightarrow{\zeta} \begin{array}{c}\text{Groupes}\\ \text{abéliens}\end{array}$$

où : $\mathcal{E}U$ (resp. $\mathcal{E}0$) désigne le foncteur <u>contravariant</u> qui, à tout espace X, associe la catégorie additive des fibrés vectoriels complexes (resp. réels) de dimension finie et de base X, et qui, à toute application continue $f : X \to Y$, associe le foncteur additif image réciproque par f.

Φ associe, à toute catégorie additive, le monoïde abélien des classes d'isomorphie d'objets de la catégorie.

ζ est le foncteur symétrisation.

On posera $\zeta \circ \Phi = K$ (foncteur covariant de Grothendieck)

$K \circ \mathcal{E}U = KU$, $K \circ \mathcal{E}0 = K0$.

On écrira $\mathcal{E}$ (resp. K) au lieu de $\mathcal{E}U$ ou $\mathcal{E}0$ (resp. KU ou K0) quand on voudra énoncer des propositions valables indistinctement en théorie réelle ou complexe.

Remarque :

On peut aussi s'intéresser aux fibrés vectoriels quaternioniens : on note $\mathcal{E}Sp$ et KSp les foncteurs correspondants.

Si X est un point, $\mathcal{E}(\text{point})$ est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie, $(\phi \circ \mathcal{E})(\text{point}) = \mathbb{N}$, et $K(\text{point}) = \mathbb{Z}$.

Si X est muni d'un point de base x_0 , l'inclusion $i : \{x_0\} \to X$ et l'application constante $j : X \to \{x_0\}$ permettent de définir une suite exacte scindée :

$$0 \to \tilde{K}(X) \to K(X) \underset{K(j)}{\overset{K(i)}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z} \to 0$$

où l'on a posé : $\tilde{K}(X) = \operatorname{Ker} K(i) = \operatorname{Coker} K(j)$. Ainsi $K(X) = \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$, et la seule composante $\tilde{K}(X)$ fournit des renseignements intéressants. En fait, $\tilde{K}$ (= $\widetilde{KU}$ ou $\widetilde{KO}$) est un foncteur (contravariant) de la catégorie des espaces compacts pointés dans la catégorie des groupes abéliens.

L'interprétation des théorèmes de Bott en K-théorie provient de ce que :

$$\boxed{\begin{aligned} \widetilde{KU}(S^n) &= \pi_{n-1}(U) \\ \widetilde{KO}(S^n) &= \pi_{n-1}(O) \end{aligned}}$$

Lemme 1

Si $\mathcal{E}_n(X)$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels de dimension n et de base X , et si $\varepsilon_n : \mathcal{E}_n(X) \to \mathcal{E}_{n+1}(X)$

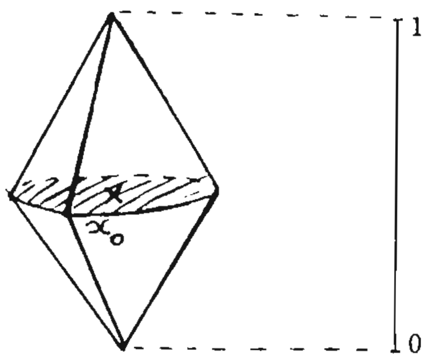
est l'application induite par $E \to E + \theta^1$ (où θ^1 désigne le fibré trivial de dimension 1 et de base X) , on a alors :

$$\tilde{K}(X) = \lim_{\substack{\to \\ n}} (E_n(x),\ \varepsilon_n) \ .$$

La démonstration de ce lemme est aisée, une fois admis que tout fibré vectoriel E admet un "supplémentaire" E' tel que $E \oplus E'$ soit trivial.

<u>Lemme 2</u>

Notant Σ le foncteur <u>suspension réduite</u> (endomorphisme de la catégorie des espaces compacts pointés :



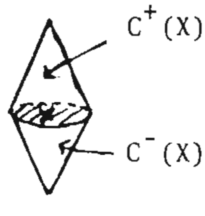
$$\Sigma X = X\times[0,1] / X\times\{0,1\} \cup \{x_0\} \times [0,1] \ ) \ ,$$

il existe une correspondance bijective naturelle

$$EU_n(\Sigma X) \xrightarrow{\tilde{=}} [X,\ U(n)]$$

de l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels <u>complexes</u> de dimension n et de base ΣX sur l'ensemble des classes d'homotopie pointées de X dans $U(n)$.

Notons $SX = \left(X\times[0,1] / X\times\{0\} \right) / X\times\{1\}$



la suspension non réduite en X . Puisque

$\Sigma X = SX/_{\{x_0\} \times [0,1]}$, SX et ΣX ont même type d'homotopie. Puisque 2 applications homotopes induisent la même application image réciproque sur les classes d'isomorphie de fibrés, $EU_n(\Sigma X)$ et $EU_n(SX)$ sont isomorphes. Soit $E \to SX$ un fibré vectoriel complexe de dimension n et de base $SX = C^+(X) \cup C^-(X)$. Puisque $C^+(X)$ et $C^-(X)$ sont contractiles, $E|_{C^{\pm}(X)}$ est trivial. Soit $\phi_X^{\pm}$ la restriction à X d'une trivialisation $\phi^{\pm}$ de $E|_{C^{\pm}(X)}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^n \times X \\ E|_X \arrow[ur, "\phi_X^+", "\cong"'] \arrow[dr, "\phi_X^-"', "\cong"] & \\ & \mathbb{C}^n \times X \arrow[uu, "\phi_X^+ \circ (\phi_X^-)^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$\phi_X^+ \circ (\phi_X^-)^{-1}$ est un automorphisme du fibré trivial $\mathbb{C}^n \times X$, c'est-à-dire une application continue $u : X \to GL(n,\mathbb{C})$. On peut choisir ϕ^+ et ϕ^- de sorte que u soit pointée. Du fait que $U(n)$ est connexe, on déduit que la classe d'homotopie pointée de u dans $[X, GL(n,\mathbb{C})]$ est indépendante du choix de ϕ^+ et ϕ^- . Puisque $GL(n,\mathbb{C})$ se rétracte par déformations sur $U(n)$, $[X, GL(n,\mathbb{C})] \cong [X, U(n)]$, d'où l'on déduit une application $EU_n(\Sigma X) \to [X, U(n)]$, dont on vérifie qu'elle est bijective.

Des lemmes 1 et 2, on déduit : $\tilde{KU}(\Sigma X) \cong \varinjlim_{n} [X, U(n)]$. On vérifie que cette bijection est un isomorphisme de groupes. En particulier, puisque $S^i = \Sigma S^{i-1}$, $\tilde{KU}(S^i) \cong \pi_{i-1}(U)$.

Du fait que $O(n)$ n'est pas connexe, la démonstration en théorie réelle est légèrement plus compliquée. Mais il reste vrai que :

$$\begin{cases} \widetilde{KO}(\Sigma X) \cong \lim\limits_{\vec{n}} [X, O(n)] \\ \widetilde{KO}(S^i) \cong \pi_{i-1}(O) \end{cases}$$

Plus généralement, notant Σ^i la $i^{\text{ème}}$ suspension itérée, et Ω^i le $i^{\text{ème}}$ espace de lacets,

$$\begin{aligned} \widetilde{KU}(\Sigma^{i+2} X) &\cong \lim_{\vec{n}} [\Sigma^{i+1} X, U(n)] \\ &\cong \lim_{\vec{n}} [\Sigma^{i-1} X, \Omega^2 U(n)] \\ &= \lim_{\vec{n}} [\Sigma^{i-1} X, U(n)] \\ &= \widetilde{KU}(\Sigma^i X) \end{aligned}$$

et de même, $\widetilde{KO}(\Sigma^{i+8} X) \cong \widetilde{KO}(\Sigma^i X)$. Atiyah et Hirzebruch définissent alors K^{-n} comme étant égal à $K \circ \Sigma^n$ $(n \geq 0)$, et définissent K^n pour $n \geq 0$ de façon que KU^n (resp. KO^n) soit périodique de période 2 (resp. 8) pour $n \in \mathbb{Z}$.

Les inconvénients de cette méthode sont multiples. D'abord, il est difficile de calculer effectivement les K^n et d'exprimer l'isomorphisme de Thom-Gysin (surtout en théorie réelle). Ensuite, ces définitions ne s'étendent pas au cadre algébrique que nous allons préciser. L'un des intérêts qu'il y a à définir directement une théorie périodique K^n (dans un cadre plus général) est de redémontrer le théorème de Bott (sous une forme généralisée).

Pour tout espace compact X , notons $A(X)$ l'anneau des fonctions continues sur X à valeurs complexes (resp. réelles. La catégorie additive $E(X)$ des fibrés vectoriels sur X de dimension finie est équivalente à la catégorie additive des modules projectifs de type fini sur $A(X)$: le foncteur section globale Γ qui, à tout fibré vectoriel $E \to X$, associe le $A(X)$-module $\Gamma(E)$ des sections continues de E , est en effet une équivalence de catégorie (Swan). ($\Gamma(E)$ est facteur direct d'un module libre de dimension finie, puisqu'il existe E' tel que $E \oplus E'$ soit un fibré trivial de dimension finie).

Soit donc P : Anneaux $\to$ Catégories additives, le foncteur qui, à tout anneau A , associe la catégorie additive des A-modules projectifs de type fini sur A . Le foncteur K se factorise à travers la catégorie des anneaux :

$$
\begin{tikzcd}
\text{Espaces topologiques compacts} \arrow[d, "A"'] \arrow[dr, "E"] & & \\
\text{Anneaux} \arrow[r, "P"'] & \text{Catégories additives} \arrow[r, "K"] & \text{Groupes abéliens}
\end{tikzcd}
$$

La <u>K-théorie algébrique</u> (H. Bass), consiste à définir et étudier des foncteurs K''^{n} sur la catégorie des <u>anneaux</u> (avec, évidemment, $K''^{0} = K \circ P$) .

Malheureusement, une telle théorie algébrique ne vérifie pas la périodicité de Bott et K^n ne se factorise pas à travers K''^n .

En fait, $A(X)$ est aussi une algèbre de Banach, pour la norme de la convergence uniforme (X compact). On définira plus loin une K-théorie $(K'^n)_{n\in \mathbb{Z}}$ sur les algèbres de Banach, vérifiant la périodicité de Bott, et telle que K^n se factorise à travers K'^n . Par abus de langage, on appellera encore <u>K-théorie topologique</u> une telle théorie sur les <u>algèbres de Banach</u>.

Au chapitre II, nous esquisserons une <u>K-théorie générale</u> sur les <u>anneaux de Banach</u>, qui contiendra à la fois les cadres algébriques et topologiques.

Un anneau de Banach est un anneau A (non nécessairement unitaire, ni commutatif), muni d'une application $A \xrightarrow{\|\ \|} R$ (appelée norme) vérifiant les axiomes :

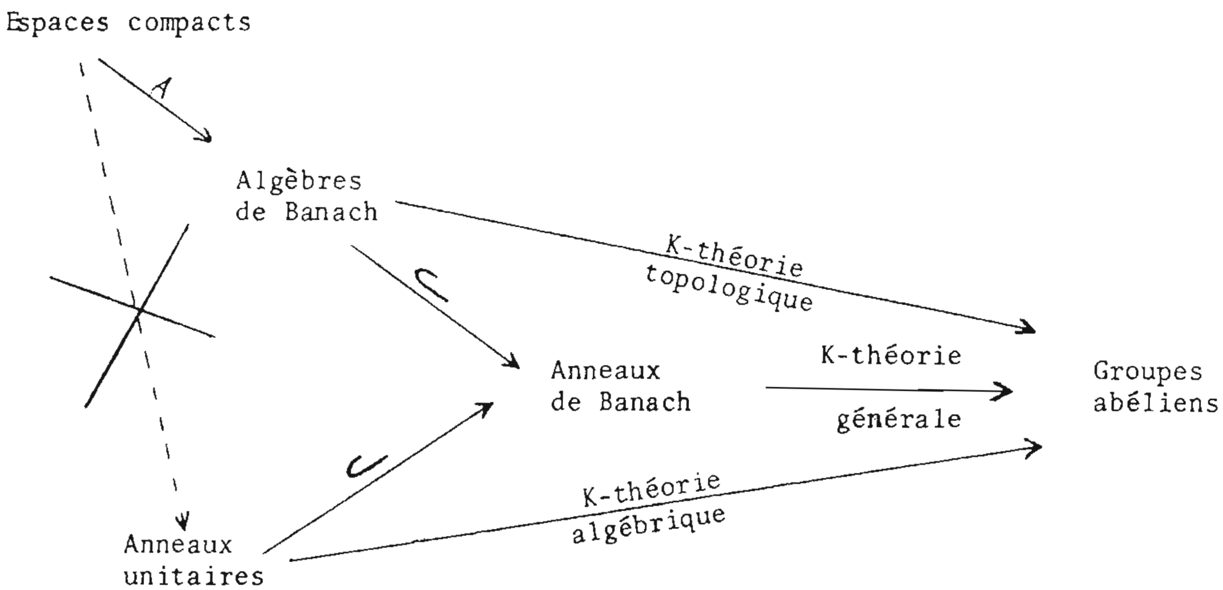
1) $||x|| = 0 \iff x = 0$,
2) $\forall\ x\in A \quad ||-x|| = ||x||$,
3) $\forall\ x,y \quad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$,
4) $\exists\ c > 0$ tel que, $\forall\ x,y \quad ||x\cdot y|| \leq c\cdot||x||\cdot||y||$,
5) A est complet pour la métrique $(x,y) \to ||x-y||$.

Un morphisme L d'anneaux de Banach est un morphisme d'anneaux qui est <u>borné</u> ($\exists\ M > 0$ tel que $\forall\ x \quad ||L(x)|| \leq M\cdot||x||$).

La catégorie des algèbres de Banach est évidemment une sous-catégorie pleine de celle des anneaux de Banach. La catégorie des anneaux est aussi une sous-catégorie pleine de celle des anneaux de Banach : tout anneau A peut être en effet muni de la norme
$||x|| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ (un tel anneau de Banach est dit "discret"), et les morphismes bornés entre anneaux discrets sont tous les morphismes d'anneaux.

Remarque :

Dans le cas d'un espace compact X , il importera de munir A(X) de sa norme d'algèbre de Banach, et non de la norme d'anneau discret.



CHAPITRE II

K-THEORIE DES ANNEAUX DE BANACH

Rappelons (cf. chap.I) qu'un anneau de Banach est un anneau A (non nécessairement unitaire, non nécessairement commutatif), muni d'une application $A \overset{\| \, \|}{\to} R^+$ (appelée "norme") et vérifiant les axiomes :

1) $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

2) $\forall\ x \in A \qquad ||-x|| = ||x||$

3) $\forall\ x,y \in A \qquad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

4) $\exists\ c > 0 \qquad \forall\ x,y \in A \quad ||x.y|| \leq c||x||\cdot||y||$

5) A est complet pour la distance $(x,y) \to ||x-y||$.

Un morphisme d'anneaux de Banach est un morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ qui est borné : $K > 0 \quad \forall\ x \in A \quad ||\varphi(x)||_B \leq K\cdot||x||_A$ (cette condition est en général plus forte que la continuité, alors que borné équivaut à continu pour les espaces ou les algèbres de Banach).

I - Exemples

1. les algèbres de Banach (utilisées en K-théorie topologique).

2. les anneaux discrets (utilisés en K-théorie algébrique).

3. soit A un anneau de Banach, et $A\{x\}$ l'anneau des séries formelles $S = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ à coefficients dans A telles que $\sum_{n\geq 0} ||a_n|| < +\infty$. Muni de la norme $||S|| = \sum_{n\geq 0} ||a_n||$, $A\{x\}$ est un anneau de Banach, et les deux morphismes $p_0, p_1 : A\{x\} \to A$ définis respectivement par $p_0(S) = a_0$ $p_1(S) = \sum_{n\geq 0} a_n$, sont bornés. Munis de la norme induite par celle de $A\{x\}$, les sous-anneaux $EA = \operatorname{Ker} p_0$ et $\Omega A = \operatorname{Ker} p_0 \cap \operatorname{Ker} p_1$ sont des anneaux de

Banach [appelés respectivement anneau des "chemins" (sous entendu d'origine 0) de A et anneau des "lacets" de A]. L'origine de cette terminologie provient de ce que, dans le cas où A est une algèbre de Banach, l'élément $S = \sum a_n x^n$ de $A\{x\}$ peut s'interpréter comme le chemin continu $t \to \sum_{n \geq 0} t^n a_n$ de $[0,1]$ dans A . Les extrémités de ce chemin sont alors effectivement $p_0(S)$ et $p_1(S)$.

Cette construction servira à définir les K^n pour $n < 0$. Notons que le foncteur Ω sur les anneaux correspond en effet à la suspension topologique : on a un homomorphisme naturel $\Omega\, A(X) \to A(\sum X)$, obtenu en associant au lacet $S = \sum a_n x^n$ dans l'algèbre de Banach $A(X)$ des fonctions continues sur l'espace compact X , la fonction $(t,x) \to \sum a_n(x)\, t^n$ définie sur la suspension $\sum X$.

On définit, plus généralement, $A\{x_1,\ldots,x_n\}$ $\forall\, n > 0$ par récurrence : $A\{x_1,\ldots,x_n\} = (A\{x_1,\ldots,x_{n-1}\})\,\{x_n\}$. $A\{x_1,\ldots,x_n\}$ est aussi égal à l'anneau des séries formelles $S = \sum a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ de n variables à coefficients dans A , telles que la famille $\sum_{i_1,\ldots,i_n} ||a_{i_1 \ldots i_n}||$ de nombres ≥ 0 soit sommable, avec la norme

$$||S|| = \sum_{i_1,\ldots,i_n} ||a_{i_1,i_2\ldots,i_n}|| .$$

4. soit A un anneau de Banach, et B l'algèbre des matrices infinies $M = ((a_{ji}))_{j,i \in N}$ à coefficients dans A telles que

$$\sup_i \sum_j ||a_{ji}|| < +\infty .$$

Muni de la norme $||M|| = \sup_i \sum_j ||a_{ji}||$, B est un anneau de Banach.

Une matrice $M = ((a_{ji})) \in B$ sera dite "permutante" si, dans chaque ligne et chaque colonne de M , il y a au plus 1 coefficient a_{ji} non nul [il revient au même de dire que M est de la forme DT où T est une matrice de permutation et D une matrice diagonale, ou encore qu'il existe une permutation $\varphi : N \xrightarrow{\sim} N$ telle que $a_{ji} = \delta_{(j),i} \cdot a_{ji}$, $\delta_{j,i}$ désignant le symbole de Kronecker] .

Soit CA ("cône" de A) le plus petit anneau de Banach contenu dans B et contenant les matrices permutantes [appelant $\sum$-permutantes les sommes finies de matrices permutantes, et $\sum^1$-permutantes les limites de matrice $\sum$-permutantes dans B , CA est égal à l'ensemble des matrices $\sum^1$-permutantes] .

Notons $A(n)$ l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans A et $A(\infty) = \varinjlim_{n} A(n)$ la limite inductive des algèbres $A(n)$ ($A(n)$ se plongeant dans $A(n+1)$ par le morphisme naturel $M \to \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$). Notons $\tilde{A}$ et appelons algèbre stabilisée de A la fermeture $\overline{A(\infty)}$ de $A(\infty)$ dans B . Il est clair que $\tilde{A}$ est un idéal fermé de CA . On appelle suspension de A et on note $\sum A$ l'anneau de Banach quotient $\sum A = CA/\tilde{A}$.

Cette construction servira à définir les K^n pour $n < 0$. On la comparera à celle du quotient $End(H)/\mathcal{K}(H)$ de l'algèbre $End(H)$ des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert H séparable de dimension infinie, par l'idéal $\mathcal{K}(H)$ des opérateurs compacts (i.e. limites dans $End(H)$ d'opérateurs dont l'image est de dimension finie).

II - Homotopie

Soient φ_0 et φ_1 deux morphismes (bornés) d'un anneau de Banach A dans un autre B . On dira que φ_0 et φ_1 sont "simplement homotopes" s'il existe un morphisme (borné) $\varphi : A \to B\{x\}$ tel que

$$\begin{cases} p_0 \cdot \varphi = \varphi_0 \\ p_1 \cdot \varphi = \varphi_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} p_0 \cdot \varphi = \varphi_1 \\ p_1 \cdot \varphi = \varphi_0 \end{cases}$$

(où $p_0(\sum a_n x^n) = a_0$ et $p_1(\sum a_n x^n) = \sum a_n$) . La relation d'homotopie simple n'étant pas transitive, on est amené à poser la définition suivante : on dira que φ_0 et φ_1 sont "homotopes" s'il existe une suite finie $(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_N)$ de morphismes bornés de A dans B telle que $\psi_0 = \phi_0$, $\psi_N = \varphi_1$, ψ_i et ψ_{i+1} sont simplement homotopes $\forall\ i = 0,\ldots, N-1$: l'homotopie est une relation d'équivalence.

Remarques :

1. Soient φ_0 et φ_1 deux morphismes bornés $A \to B$ entre algèbres de Banach, et soit $B(I)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues de $I = [0,1]$ dans B . On dira que φ_0 et φ_1 sont "topologiquement homotopes" s'il existe un morphisme (borné) $\varphi : A \to B(I)$ tel que $q_0 \cdot \varphi = \varphi_0$ et $q_1 \cdot \varphi = \varphi_1$ (où $q_0(f) = f(0)$ et $q_1(f) = f(1)$). On vérifie aisément :

Si φ_0 et φ_1 sont homotopes, ils sont topologiquement homotopes.

2. Soient X et Y deux espaces compacts, et f_0, f_1 deux applications continues de X dans Y . Soient φ_0 et φ_1 les morphismes

$A(Y) \to A(X)$ induits par f_0 et f_1 .

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1- f_0 et f_1 sont homotopes,

2- φ_0 et φ_1 sont topologiquement homotopes.

Un anneau de Banach A sera dit "contractile" si l'identité 1_A est homotope au morphisme 0 .

Exemple :

EA est contractile.

On définit en effet une homotopie $\varphi : EA \to EA\{t\} \subset A\{x,t\}$ entre 1_{EA} et 0 , en posant : $\varphi(\sum a_n x^n) = \sum a_n x^n t^n$.

III - Anneaux augmentés

Voici un procédé permettant d'ajouter un élément unité à un anneau de Banach non unitaire (penser à la reconstruction de l'anneau des fonctions continues d'un espace X , à partir du sous-anneau des fonctions nulles en $x_0 \in X$) :

Soit A un anneau de Banach ; A est une Z-algèbre. Notons A^+ l'anneau de Banach dont le groupe abélien sous-jacent est $A \times Z$; le produit est donné par la formule $(a,\lambda)(a',\lambda') = (aa' + \lambda a' + \lambda' a, \lambda\lambda')$ et la norme est $||(a,\lambda)|| = ||a|| + |\lambda|$. On vérifie sous peine que A^+ est complet. En outre, A^+ possède un élément unité, à savoir $(0,1)$, et une augmentation $\varepsilon : A^+ \to Z$ définie par $\varepsilon(a,\lambda) = \lambda$.

Si A est un anneau unitaire, on note $GL(A,n)$ le groupe des matrices inversibles dans $A(n)$. Dans le cas général, on pose : $GL(A,n) = \mathrm{Ker}\,[GL(A^+,n) \to GL(Z,n)]$ (si A est unitaire, les deux définitions coïncident) ($GL(A,n)$ peut encore se définir comme le groupe des matrices $u \in A(n)$ telles qu'il existe $v \in A(n)$ vérifiant $(u+v)+uv = 0$) . On définit alors : $GL(A) = \varinjlim_{n} GL(A,n)$. (1)

Le foncteur $\mathcal{P}$: Anneaux unitaires $\to$ Catégories additives associe, à tout anneau unitaire A , la catégorie additive des A.modules à droite projectifs de type fini, et à tout morphisme $A \to B$ le foncteur $\varphi_* = \cdot \otimes_A B$ de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(B)$. Le foncteur covariant $K = \mathcal{K} \circ \mathcal{P}$ (cf. la définition de $\mathcal{K}$ au chapitre I) est donc défini pour les anneaux unitaires.

Sur les anneaux de Banach non nécessairement unitaires, K se définit par $K(A) = \mathrm{Ker}(K(\varepsilon) : K(A^+) \to K(Z))$. Notant $j : Z \to A^+ = A \times Z$ l'inclusion canonique, $\varepsilon \cdot j = 1_Z$ de sorte que la suite exacte

$$0 \to K(A) \to K(A^+) \underset{K(j)}{\overset{K(\ )}{\rightleftarrows}} K(Z) \to 0$$

est canoniquement scindée : $K(A^+) = K(A) \oplus K(Z)$. (Si A est unitaire, les deux définitions de $K(A)$ coïncident).

IV - Fibrations de Serre

Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux de Banach. On dit que φ est une "fibration de Serre" si, $\forall\, n > 0$, l'application

$$\varphi_* : GL(A\{x_1,\dots,x_n\}) \to GL(B\{x_1,\dots,x_n\})$$

---

(1) L'inclusion $GL(A,n) \quad GL(A,n+1)$ est celle induite par $GL(A^+,n) \quad GL(A^+,n+1)$

vérifie la propriété suivante : $\forall\ \beta = \beta(x_1,\dots,x_n)\quad GL(B\{x_1,\dots,x_n\})$ tel que $\beta(0,0,\dots,0) = 1$, $\alpha\quad GL(A\{x_1,\dots,x_n\})$ tel que $\varphi(\alpha) = \beta$.

On vérifie aisément que :

> les deux propositions suivantes sont équivalentes :
>
> 1- $\varphi : A \to B$ est une fibration de Serre,
>
> 2- $\varphi^+ : A^+ \to B^+$ est une fibration de Serre.

Cette terminologie est justifiée par le

THEOREME

> Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'algèbres de Banach. Les 5 propositions suivantes sont équivalentes :
>
> 1- φ est surjectif.
>
> 1_n- $\varphi_n : A(n) \to B(n)$ est surjectif.
>
> 2_n- $GL(A,n) \to GL(B,n)$ est une fibration topologique localement triviale $(n \geq 1)$.
>
> 3_n- $GL(A,n) \to GL(B,n)$ est une fibration de Serre (au sens topologique) $(n \geq 1)$.
>
> 4- φ est une fibration de Serre (au sens algébrique).

$2_n \Longrightarrow 3_n$: c'est le théorème de relèvement des homotopies pour les fibrés localement triviaux.

$3_n \Longrightarrow 1$: soit en effet, x un élément de $GL(B,n)$ tel que $||x-1_{B^n}|| < ||x||$: $\forall\ t\quad [0,1]$, $u(t) = t\cdot 1_{B^n} + (1-t)\ x$ est alors inversible, de sorte que $u : [0,1] \to GL(B,n)$ est une homotopie. Puisque $GL(A,n) \to GL(B,n)$ est une fibration de Serre, l'homotopie se relève en une homotopie $u_1 : [0,1] \to GL(A,n)$:

$$\begin{tikzcd}
GL(A,n) \arrow[rr, "n"] & & GL(B,n) \\
& {[0,1]} \arrow[ul, dashed, "u_1"] \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

Puisque $x = u(0)$, $x = \varphi_*(y)$ où $y = u_1(0)$. Ainsi, la boule couverte de centre 1_{B^n} et de rayon 1 dans $B(n)$ est incluse dans l'image de l'homomorphisme $\varphi_n : A(n) \to B(n)$ entre algèbres de Banach : par translation et hémothotie, on en déduit que cet homomorphisme est surjectif : cela implique nécessairement que l'homomorphisme $\varphi = \varphi_1$ est lui-même surjectif.

$1 \Longrightarrow 1_n$ $\forall\, n \geq 1$: évident.

$1_1 \Longrightarrow 2_1$ est un résultat de Michael (Canadian Journal of Math., 1959)

$2_1 \Longrightarrow 2_n$ par récurrence sur n .

$4 \Longrightarrow 1$: le raisonnement est analogue à celui fait pour prouver que $3_n \Longrightarrow 1$.

$1 \Longrightarrow 4$: si φ est surjectif, $\{x_1,\dots,x_n\} : A\{x_1,\dots,x_n\} \to B\{x_1,\dots,x_n\}$ l'est en effet aussi, car $B \cong A/\mathrm{Ker}\,\varphi$ d'après le théorème de Banach, et $A\{x\} \to A/\mathrm{Ker}\,\varphi\,\{x\}$ est surjectif. Posons $A' = A\{x_1,\dots,x_n\}$ $B' = B\{x_1,\dots,x_n\}$, $\varphi' = \varphi\{x_1,\dots,x_n\}$. Puisque $1 \Longrightarrow 3$, il en résulte que $GL(A') \to GL(B')$ est un fibré au sens de Serre. Soit $b(x)$ $GL(B')$ tel que $b(0) = 1$, et soit $[0,1] \xrightarrow{\beta} GL(B')$ l'homotopie $\beta(t) = b(xt)$. Il existe un relèvement $\alpha : [0,1] \to GL(A')$ de β tel que $\varphi_*(\alpha) = \beta$: c'est dire que φ est une fibration de Serre (au sens algébrique).

THEOREME

> Si A et B sont des anneaux discrets, et si B est noethérien régulier, les deux propositions suivantes sont équivalentes :
>
> 1- $\phi : A \to B$ est un morphisme surjectif,
>
> 2- ϕ est une fibration de Serre.

$2 \Longrightarrow 1$ (sans aucune hypothèse sur A et B) : Soit λ B . Soit $\beta(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\forall\, t \in [0,1]$, $\beta(t) \in GL(B\{t\})$ et $\beta(0) = 1$; il existe donc $\alpha(t) \in GL(A\{t\})$ tel que $\beta = \varphi_*(\alpha)$: nécessairement $\lambda = \varphi(\mu)$ où μ est le coefficient de la première ligne et 2e colonne dans $\alpha(1)$.

$1 \Longrightarrow 2$ résulte de la proposition suivante (qui est une version appropriée d'un théorème de Bars, Heller et Swann) et que nous admettrons :

Soit $\beta = \beta(x) \in GL(B\{x\})$ et tel que $\beta(0) = 1$ (où $x = (x_1, \dots, x_n)$).

> Si B est un anneau discret noethérien régulier, $\beta(x)$ peut se mettre sous la forme $\prod_i \beta_i(x)$ d'un produit fini de matrices
>
> $$\beta_i(x) = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & \\ & 1 & 0 & \lambda_i(x) & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$
>
> ayant tous leurs éléments diagonaux égaux à 1 , et tous leurs éléments non diagonaux $\lambda^i_{k,l}(x)$ égaux à 0 sauf 1 (le couple k_i, l_i tel que $\lambda^i_{k_i,l_i}(x) \neq 0$ pouvant dépendre de i ; on notera $\lambda_i(x)$ cet élément).

Soit donc $\beta = \beta(x) = \prod_i \beta_i(x)$ un élément de $GL(B\{x\})$. Puisque A et B sont discrets, $A\{x\}$ et $B\{x\}$ sont respectivement égaux aux anneaux de polynômes $A[x]$ et $B[x]$; de sorte que si $\phi : A \to B$ est surjectif, l'homomorphisme induit $A\{x\} \to B\{x\}$ est aussi surjectif. Pour tout indice i, choisissons un élément $\tilde{\lambda}_i(x) \in A\{x\}$ se projetant sur $\lambda_i(x)$, et notons $\alpha_i(x)$

$$\alpha_i(x) = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 \quad 0 & \tilde{\lambda}_i(x) & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice $\in GL(A\{x\})$ dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1, et tous les éléments non diagonaux égaux à 0 sauf celui d'indice (k_i, l_i) égal à $\tilde{\lambda}_i(x)$. Posons $\alpha(x) = \prod_i \alpha_i(x)$: il est clair que $\varphi_k(\alpha) = \beta$, ce qui prouve que 1 entraîne 2.

Remarque

Si B n'est pas noethérien régulier, il se peut que 1- n'entraîne pas 2-. Par exemple, la projection naturelle $Z \to Z_4$ est surjective. Pourtant l'élément $\beta(x) \in GL(Z_4\{x\})$ provenant de la matrice inversible $\overline{\beta}(x) = \overline{1} + \overline{2}\cdot x \in GL(Z_4\{x\},1)$ (où $\overline{n}$ désigne la classe de n module 4) ne peut certainement pas se relever dans $GL(Z\{x\})$: le déterminant d'un relèvement des $\beta(x)$ devrait en effet être de la forme $1 + (4p + 2)x$ $(p \in Z)$, lequel élément n'est pas inversible dans $Z\{x\}$.

Exemples de fibration de Serre :

1- Pour tout anneau de Banach A, la projection $pr : EA \to A$ est une fibration de Serre [en effet si $\beta(x) = ((\beta_{ij}(x))) \in GL(A\{x\})$ vérifie $\beta(0) = 1$, où $x = (x_1,\ldots,x_n)$, on définit $\alpha = ((\alpha_{ij}(x)))$ comme la matrice à coefficients dans $EA\{x\} \subset A\{x,t\}$ définie par $\alpha_{ij}(x) = \beta_{ij}(tx)$ (où $tx = (t_{x_1},\ldots,t_{x_n})$) : il est clair que α $GL(EA\{x\})$ et que $(pr)_*(\alpha) = \beta$]

2- Soit Y un sous-espace fermé dans un espace compact X, et $\varphi : A(X) \to A(Y)$ la restriction des fonctions ; φ est surjectif (d'après le théorème de Tietze), et est un morphisme d'algèbres de Banach : φ est donc une fibration de Serre. C'est l'exemple type en topologie.

V - Définition axiomatique des K^n pour $n \leq 0$

Soit $A \xrightarrow{\varphi} A''$ une fibration de Serre. Soit $A' = \operatorname{Ker} \varphi$ le noyau de φ : A' s'appelle la "fibre" de φ, et on dit encore que la suite

$$A' \to A \xrightarrow{\varphi} A''$$

est une fibration de Serre (A' muni de la norme induite par celle de A, est encore un anneau de Banach, et l'inclusion naturelle $A' \to A$ est un morphisme d'anneaux de Banach).

Soit K une sous-catégorie pleine de celle des anneaux de Banach. On dira que K est "négativement admissible" si elle vérifie les deux axiomes suivants :

1- pour toute fibration $A' \to A \to A''$ telle que A et A'' soient des objets de K, A' est un objet de K.

2- si A est un objet de K , EA est un objet de K .

Exemples de catégories négativement admissibles :

- la catégorie de tous les anneaux de Banach,
- la catégorie des algèbres de Banach,
- la catégorie des anneaux dont la norme prend des valeurs discrètes (si A est un anneau discret, la norme dans EA ne prend que des valeurs entières mais EA n'est pas discret).

Soit K une catégorie négativement admissible. On appellera théorie sur K la donnée d'une famille (K^n , ∂^{n-1}) où, $\forall\, n \leq 0$ $K^n : K \to Ab$ désigne un foncteur covariant de K dans la catégorie des groupes abéliens, et où, pour toute fibration, $A' \to A \overset{\varphi}{\to} A''$ dans K , $\partial^{n-1}_{\varphi} : K^{n-1}(A'') \to K^n(A')$ désigne un morphisme de groupes abéliens, satisfaisant aux deux axiomes suivants :

1- ∂^{n-1} est fonctoriel en le sens suivant : pour tout diagramme commutatif dans K

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & A'' \\ \big\downarrow{\scriptstyle f'} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle f''} \\ B' & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\psi} & B'' \end{array}$$

où les 2 lignes horizontales sont des fibrations, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K^{n-1}(A'') & \xrightarrow{\quad\partial^{n-1}_{\varphi}\quad} & K^n(A') \\ \big\downarrow{\scriptstyle K^{n-1}(f'')} & & \big\downarrow{\scriptstyle K^n(f')} \\ K^{n-1}(B'') & \xrightarrow{\quad\partial^{n-1}_{\psi}\quad} & K^n(B') \end{array}$$ est commutatif.

2- pour toute fibration $A' \to A \overset{\varphi}{\to} A''$ la suite de groupes abéliens $\ldots \to K^{n-1}(A') \to K^{n-1}(A) \to K^{n-1}(A'') \xrightarrow{\partial_\varphi^{n-1}} K^n(A') \to \ldots$ est exacte.

THEOREME

Pour toute catégorie K négativement admissible, il existe une famille (K^n, ∂^{n-1}) $n \leq 0$ et une seule telle que

1- $(K^n, \partial^{n-1})_{n\leq 0}$ soit une théorie sur K

2- $K^n(A) = 0$ pour $n < 0$, chaque fois que A est contractile,

3- $K^0 = K$.

Puisque $\Omega A \to EA \overset{pr}{\to} A$ est une fibration de Serre, et que EA est contractile, on doit nécessairement avoir (à isomorphisme près) :

$$\begin{cases} K^{-1}(A) = \mathrm{Ker}(K(\Omega A) \to K(EA)) \\ K^n(A) = K^{n+1}(\Omega A) \qquad (n \leq -2) \\ \partial_{pr}^{-1} = \text{inclusion naturelle } K^{-1}(A) \to K(\ A) \\ \partial_{pr}^{n} = 1_{K^{n+1}(\Omega A)} \qquad (n \leq 2)\ . \end{cases}$$

Notons $GL^o(A)$ le sous-groupe de $GL(A)$ des matrices $\alpha \in GL(A)$ homotopes à 1_A (i.e. telles qu'il existe $\beta(x) \in GL(A\{x\})$ vérifiant $\beta(0) = 1_A$, $\beta(1) = \alpha$). On vérifie que $GL^o(A)$ est un sous-groupe distingué de $G(A)$, contenant les commutateurs et que $K^{-1}(A) = GL(A)/GL^o(A)$.

Dans le cas des algèbres de Banach, on trouverait les mêmes K^n en remplaçant l'axiome 2 par : $K^n(A) = 0$ pour $n \leq 0$, chaque fois que A est contractile au sens topologique.

En particulier,

$$K^{-p}(A) = \pi_{p-1}(GL(A))$$

puisque $(\Omega\ top)^p\ (A) = C(S^p,A)$ et que $K^{-n}(A) = K^{-1}(\Omega_{top}^{-(n-1)}\ A)$.

Par extension, on posera, pour tout anneau de Banach A :

$$\pi_i(GL(A)) = K^{-(i+1)}\ A\ .$$

On vérifie facilement : $\pi_0(GL(Z)) = Z_2$.

Milnor a démontré que : $\pi_1(GL(Z)) = Z_2$.

On ne connaît pas : $\pi_i(GL(Z))$ pour $i \geq 2$.

VI - Définition axiomatique des K^n pour $n \geq 0$

Soit $\varphi : A' \to A$ un morphisme d'anneaux de Banach. On dira que φ est une "cofibration" si

1- φ est surjectif,

2- φ réalise A' comme un idéal de A,

3- la norme de A' est celle induite par A .

On notera A'' l'anneau de Banach $A/\varphi(A')$, muni de la norme quotient. On appelle A'' la "cofibre" de φ. On note encore $A' \xrightarrow{\varphi} A \to A''$ la cofibration φ .

On dira, de l'anneau de Banach unitaire A , qu'il est flasque s'il existe un A.bimodule de Banach, projectif et de type fini à droite, tel que $M \oplus A \cong M$.

Exemples

1- pour tout anneau de Banach unitaire A , CA est flasque.

2- pour tout espace de Hilbert H de dimension infinie, End H est flasque.

On dira, d'une sous-catégorie pleine K de celle des anneaux de Banach, qu'elle est "positivement admissible" si

1- pour toute cofibration $A' \overset{\varphi}{\to} A \to A''$ telle que A' et A soient des objets de K , A'' est un objet de K .

2- pour tout objet A de K , $\tilde{A}$ et CA sont des objets de K .

On rappelle (cf. § I de ce chapitre), que si $A(\infty)$ désigne la limite inductive $\varinjlim_{n} A(n)$ des algèbres $A(n)$ (dont les normes passent à la limite inductive), on appelle algèbre stabilisée de A la fermeture $\tilde{A} = \overline{A(\infty)}$ de $A(\infty)$ dans B . On a donc une inclusion naturelle $A = A(1) \overset{\sim}{\to} \tilde{A}$.

On appellera théorie sur une catégorie positivement admissible K toute famille $(K^n, \partial^n)_{n \geq 0}$ où $\forall\, n > 0$, $K^n : K \to Ab$ est un foncteur covariant de K dans la catégorie des groupes abéliens, et où, pour toute cofibration $A' \overset{\varphi}{\to} A \to A''$ dans K , $\partial^n_\varphi : K^n(A'') \to K^{n\ 1}(A')$ désigne un morphisme de groupes abéliens, satisfaisant aux deux axiomes suivants :

1- ∂^n est fonctoriel relativement à la catégorie des cofibrations de K ,

2- pour toute cofibration $A' \overset{\varphi}{\to} A \to A''$ dans K , on a une suite exacte

$$\ldots \to K^n(A') \xrightarrow{K^n(\varphi)} K^n(A) \to K^n(A'') \xrightarrow{\partial^n_\varphi} K^{n+1}(A'') \to \ldots$$

THEOREME

> Pour toute catégorie K positivement admissible, il existe une famille $(K^n,\partial^n)_{n\geq 0}$ et une seule telle que
>
> 1- $(K^n,\partial^n)_{n\geq 0}$ soit une théorie sur K,
>
> 2- $K^n(A) = 0$ pour $n > 0$ chaque fois que A est flasque,
>
> 3- $K^o = K$,
>
> 4- l'injection naturelle $\sim : A \to \tilde{A}$ induit un isomorphisme
> $$K^n(A) \xrightarrow[\cong]{K^n(\sim)} K^n(\tilde{A}) . \qquad \forall\, n > 0 .$$

On doit nécessairement avoir : $K^n(A) = K^{n-1}(\sim A) \qquad \forall\, n \geq 1$.

Nous verrons plus loin que si K est la catégorie des algèbres de Banach sur R (resp. sur C) $K^{n+8}(A) \cong K^n(A)$ $\forall\, n\in Z$ (resp. $K^{n+2}(A) \cong K^n(A)$).

Puisque $K^{-p}(A) = \pi_{p-1}(GL(A))$, cela permettra de prouver la périodicité de Bott.

Si K est la catégorie des anneaux discrets, on a, pour tout n Z, $K^n(A) = K_{-n}(A)$ où les foncteurs K_{-n} sont ceux définis par H. Bass. En particulier $K^n(A) = 0$ $\forall\, n > 0$ si A est noethérien régulier. Il n'y a pas alors de périodicité pour $n \geq 0$ (exemple : pour R, muni de la topologie discrète, $K^8(R) = 0$).

Il résulte des exemples précédents que les $K^n(A)$ dépendent de la norme de l'anneau de Banach A ; par exemple :

$K^2(C) = Z$ si C est muni de sa norme habituelle,

$ = 0$ si C est discret.

CHAPITRE III

GENERALITES SUR LES CATEGORIES DE BANACH

I. Catégories de Banach

Définition:

Une catégorie de Banach est la donnée d'une catégorie additive $\mathcal{C}$, et d'une structure de k-espace de Banach ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sur chaque groupe $\mathcal{C}(E,F)$ ($E,F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$), telles que, pour toute famille E, F, G de trois objets de $\mathcal{C}$, l'application:

$$\mathcal{C}(E,F) \times \mathcal{C}(F,G) \longrightarrow \mathcal{C}(E,G)$$

soit bilinéaire et continue.[1]

Exemples triviaux:

$\mathcal{C}$ = la catégorie des espaces de Banach

$\mathcal{H}$ = la catégorie des espaces de Hilbert

$\mathcal{E}$ = la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie.

Définition:

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories de Banach. Un foncteur $\varphi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est dit banachique si c'est un foncteur additif et, si de

(1) Cette définition diffère très légèrement de celle proposée dans ma thèse [1] .

plus, l'application:

$$C(E,F) \longrightarrow C'(\varphi E,\varphi F)$$

est linéaire et continue.

Définition:

Un foncteur banachique φ: $C \longrightarrow C'$ est une équivalence entre deux catégories de Banach C, C' s'il existe un autre foncteur banachique ψ: $C' \longrightarrow C$ tel que

$$\psi\varphi \overset{\sim}{\sim} Id_C \quad \text{et} \quad \varphi\psi \overset{\sim}{\sim} Id_{C'}$$

où $\overset{\sim}{\sim}$ est un "isomorphisme de foncteurs banachiques" (définition laissée aux soins du lecteur).

THEOREME:

φ: $C \longrightarrow C'$ est une équivalence si et seulement si

1) $C(E,F) \longrightarrow C'(\varphi E,\varphi F)$ est bijectif (pleinement fidèle)

2) Pour tout $E' \in Ob\ C'$ il existe un $E \in Ob\ C$ tel que $\varphi E' \overset{\sim}{\sim} E'$ (essentiellement surjectif).

Preuve: $\Rightarrow$) facile.

$\Leftarrow$) On va construire un foncteur ψ: $C' \longrightarrow C$ qui est inverse de φ comme suit: Pour tout objet E' de C', choissisons (grâce à 2)) un $E \in \mathrm{Ob}\, C$ et un isomorphisme $h_{E'}: \varphi E \xrightarrow{\sim} E'$ dans C'. Posons $\psi(E') = E$. Pour tout morphisme $g: E' \longrightarrow F'$ dans C', on a

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, dotted, "f"'] & \varphi E \arrow[r, "h_{E'}"] \arrow[d, "h_{F'}^{-1} g h_{E'}"'] & E' \arrow[d, "g"] \\ F & \varphi F \arrow[r, "h_{F'}"'] & F' \end{tikzcd}$$

Grâce à 1), il existe un unique morphisme $f: E \longrightarrow F$ tel que

$$\varphi(f) = h_{F'}^{-1} . g . h_{E'} \; .$$

Définissons $\psi(g) = f$. Alors ψ est un foncteur banachique inverse de φ.

Exemples:

1) $C' = E$ = la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur R.

C = la sous-catégorie pleine de E engendrée par les objets $0, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$.

Alors, C' est équivalente à C.

Plus généralement, pour toute algèbre de Banach A, la catégorie $L(A)$ des A-modules à droite, libres de rang fini est équivalente à la sous-catégorie pleine de $L(A)$ engendrée par $0, A, A^2, A^3, \ldots$.

2) Soient H la catégorie des espaces de Hilbert et $H \in \mathrm{Ob}\, H$, i.e. un espace de Hilbert. Considérons:

C = la sous-catégorie pleine de H engendrée par $0, H, H^2, H^3, \ldots$.

$C' = L(A)$ où $A = \mathrm{End}(H)$ = l'algèbre de Banach des endomorphismes de H.

Alors, C, C' sont équivalentes.

En effet, considérons le foncteur $\varphi : C \longrightarrow C'$ défini comme suit:

Pour tout objet H^n, posons $\varphi(H^n) = A^n$.

Pour $f: H^n \longrightarrow H^p$, écrivons: $f = (f_{ij})$ $\quad 1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$

où $f_{ij} \in \mathrm{End}(H) = A$.

Définissons $\varphi(f) : A^n \longrightarrow A^p$ par la matrice (f_{ij}). Alors, le foncteur φ vérifie les deux conditions du théorème.

II. Catégories de Banach pseudo-abéliennes

Définition:

Une catégorie de Banach $\mathcal{C}$ est dite pseudo-abélienne si pour tout objet E de $\mathcal{C}$ et pour tout $p: E \longrightarrow E$ vérifiant $p^2 = p$ (dit projecteur), Ker p existe dans $\mathcal{C}$.

Alors, Im p existe aussi dans $\mathcal{C}$. En effet, on a:

$$\mathrm{Im}\ p = \mathrm{Ker}\ (1-p).$$

Problème

Etant donné une catégorie de Banach $\mathcal{C}$, trouver une catégorie de Banach pseudo-abélienne $\tilde{\mathcal{C}}$ et un foncteur banachique $i: \mathcal{C} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ tels que pour tout foncteur banachique $\varphi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est pseudo-abélienne, il existe un foncteur banachique $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{D}$ unique à isomorphisme près tel que le diagramme:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \tilde{\mathcal{C}} \arrow[dl, "\tilde{\varphi}"] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

soit commutatif à isomorphisme près.

Solution

Définissons la catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ comme suit:

$$\mathrm{Ob}\,\tilde{\mathcal{C}} = \{(E,p) \mid E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C},\ \ p\colon E \longrightarrow E,\ p^2 = p\} \quad \text{et}$$

$$\tilde{\mathcal{C}}((E,p),\ (F,q)) = \{f \in \mathcal{C}(E,F) \mid qf = fp = f\}.$$

Définissons $i\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ par

$$i(E) = (E,1) \quad \text{et} \quad i(f) = f.$$

Exemple

Soit A une algèbre de Banach. Alors la catégorie des A-modules projectifs de rang fini $\mathcal{P}(A)$ est une catégorie pseudo-abélienne.

En effet, si $M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{P}(A)$, il existe une surjection

$$A^n \longrightarrow M$$

donc, M est un espace de Banach. De plus, pour deux objets M,N de $\mathcal{P}(A)$, $\mathrm{Hom}_H(M,N)$ est un sous-espace fermé de l'espace de Banach $\mathrm{Hom}_k(M,N)$; donc $\mathcal{P}(A)$ est une catégorie de Banach. En outre, pour $p\colon E \longrightarrow E$, $p^2 = p$, Ker p est un facteur direct de E donc c'est un A-module projectif, i.e.

Ker $p \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{P}(A)$.

THEOREME:

$$\mathcal{P}(A) \overset{\sim}{\sim} \widetilde{\mathcal{L}(A)} = \text{la catégorie pseudo-abélienne associée à } \mathcal{L}(A).$$

Preuve:

Considérons le foncteur d'inclusion $i: \mathcal{L}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Il suffit de vérifier la propriété universelle:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(A) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{P}(A) \arrow[dl, dashed, "\exists!\tilde{\varphi}"] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

Soient $M, N \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{P}(A)$ et supposons que

$$M = \mathrm{Im}\ p, \quad N = \mathrm{Im}\ q \qquad \text{où} \qquad \begin{array}{ll} p: A^m \longrightarrow A^m, & p^2 = p \\ q: A^n \longrightarrow A^n, & q^2 = q. \end{array}$$

Définissons:

$\tilde{\varphi}(M) = \mathrm{Im}\ \varphi(p)$ (c'est un objet de $\mathcal{D}$ puisque $\mathcal{D}$ est pseudo-abélienne)

Pour $f: M \longrightarrow N$ de $\mathcal{P}(A)$, soit $g: A^m \longrightarrow A^n$ de $\mathcal{L}(A)$ tel que

$g \mid M = f$ (on peut supposer par exemple $g \mid \mathrm{Ker}\, p = 0$).

Définissons:

$$\tilde{\varphi}(f) = \varphi(g) \mid \tilde{\varphi}(M).$$

Alors, $\tilde{\varphi}$ est indépendant de g et vérifie la propriété cherchée.

Remarque 1:

Au paragraphe suivant, nous obtiendrons une interprétation du théorème précédent, lorsque A est l'algèbre de Banach des fonctions continues sur un espace compact X: $L(A)$ est alors la catégorie des fibrés triviaux (de dimension finie) sur X et $P(A)$ est la catégorie des fibrés localement triviaux (de dimension finie) sur X.

Remarque 2:

Si C est une catégorie additive (non nécessairement de Banach) on pourrait aussi bien définir $\tilde{\mathcal{C}}$.- on aurait aussi $\widetilde{L(A)} \approx P(A)$ pour tout anneau A.

III. Fibrés vectoriels et G-fibrés.

Soient X un espace compact, et

$\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_T(X)$ = la catégorie des fibrés vectoriels triviaux de dimension finie et de base X:

<u>Objet</u>: $E = X \times k^n$

<u>Morphisme</u>:
$$\begin{tikzcd} E = X \times k^n \arrow[rr] \arrow[dr, "pr_1"'] & & X \times k^p = F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
continue et k-linéaire sur chaque fibre.

i.e. fonction continue de X dans $\mathcal{E}(k^n,k^p)$.

Donc,

$$\mathcal{E}_T(E,F) = \{\text{fonctions continues de } X \text{ dans } \mathcal{E}(k^n,k^p)\}$$

est un espace de Banach.

Il est claire que $\mathcal{E}_T$ est une catégorie de Banach.

<u>THEOREME</u>:

La catégorie pseudo-abélienne $\widetilde{\mathcal{E}_T(X)}$ associée à $\mathcal{E}_T(X)$ s'identifie à la catégorie $\mathcal{E}(X)$ de tous les fibrés vectoriels de dimension finie et de base X.

Preuve:

Pour tout objet (E,p) de $\widetilde{\mathcal{E}_T(X)}$ associons Im p. C'est un fibré vectoriel i.e. localement trivial donc Im $p \in$ Ob $\mathcal{E}(X)$. Pour $f\colon (E,p) \longrightarrow (F,q)$ associons $f \mid \operatorname{Im} p$. On peut démontrer que c'est une identification de $\widetilde{\mathcal{E}_T(X)}$ avec $\mathcal{E}(X)$.

Plus généralement, soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach. Définissons $\mathcal{C}_T(X)$ = la catégorie des fibrés triviaux pour un espace paracompact X par

Objet: $X \times E$ où $E \in$ Ob $\mathcal{C}$

Morphisme:

$$\begin{tikzcd}
X \times E \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \times F \arrow[dl] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

i.e. par une fonction continue $f\colon X \longrightarrow \mathcal{C}(E,F)$.

Par définition, la catégorie des $\mathcal{C}$-fibrés sur l'espace X est $\mathcal{C}(X) = \widetilde{\mathcal{C}_T(X)}$. On pose alors

$$K(\mathcal{C}(X)) = K(X;\mathcal{C}).$$

Exemple:

Si A désigne l'algèbre de Banach des fonctions continues sur X, et si $\mathcal{C} = \mathcal{L}(A)$, alors $\mathcal{C}(X)$ est la sous-catégorie pleine des fibrés localement triviaux engendrée par les facteurs directs des fibrés triviaux. On pose alors:

$$K(X) = K(X;\mathcal{L}(A))$$

Si, de plus, X est un espace compact, $\mathcal{C}(X)$ est la catégorie des fibrés localement triviaux et peut être muni d'une structure de catégorie de Banach par la norme:

$$||f|| = \sup_{x \in X} ||f_x||.$$

Définition:

Soit G un groupe de Lie compact. Supposons que G opère sur un espace compact X. Un G-fibré est un fibré vectoriel sur X avec une opération $G \times E \longrightarrow E$ telle que

1) E soit un espace sur lequel G opère continuement,

2) le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} G \times E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ G \times X \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

3) pour chaque $g \in G$, $x \in X$, l'application

$$g : E_x \longrightarrow E_{gx} \quad \text{soit linéaire.}$$

Soit $E_G(X)$ = la catégorie de Banach des G-fibrés. En fait, $E_G(X)(E,F)$ est un sous-espace fermé de l'espace de Banach $E(X)(E,F)$ parce que $f \in E_G(X)(E,F)$ si et seulement si $fg = gf$ pour tout $g \in G$. Alors

$$K_G(X) = K(E_G(X))$$

permettra de définir la K-théorie équivariante de X par rapport à G.

IV. Catégories de Banach flasques

Définition:

Une algèbre de Banach A est dite flasque s'il existe un bi-module M qui est projectif de type fini à droite et isomorphe à $M \oplus A$ en tant que bi-module.

Définition:

Une catégorie de Banach $\mathcal{C}$ est dite flasque s'il existe un foncteur banachique $\tau: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que pour tout objet E de $\mathcal{C}$, on ait un isomorphisme naturel $\tau(E) \oplus E \cong \tau(E)$.

Proposition:

Une algèbre de Banach A est flasque si et seulement si la catégorie $\mathcal{P}(A)$ des A-modules projectifs de rang fini est flasque.

Preuve: =>) Définissons $\tau: \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ comme suit:

$$\tau(E) = E \oplus_A M \quad \text{et} \quad \tau(f) = f \oplus_A 1_M.$$

Alors, par définition,

$$\tau(E) \oplus E = (E \otimes_A M) \oplus (E \otimes_A A) \cong E \otimes_A (M \oplus A) \cong E \otimes_A M = \tau(E).$$

<=) Définissons $M = \tau(A)$. C'est un bi-module parce que τ est un foncteur banachique: En effet, pour chaque $x \in A$, considérons la multiplication à gauche $x: A \longrightarrow A$. C'est um morphisme dans $\mathcal{P}(A)$: $\tau(x): \tau(A) \longrightarrow \tau(A)$ est donc bien défini. C'est la multiplication à

gauche de $x \in A$ sur le module $M = \tau(A)$. Par définition, on a $\tau(A) \oplus A \simeq \tau(A)$.

<u>Exemple</u>:

La catégorie $\mathcal{H}$ des espaces de Hilbert est flasque. En effet, définissons pour tout $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{H}$,

$$\tau(E) = E \oplus E \oplus \dots \qquad \text{somme dénombrable,}$$

et pour $f\colon E \longrightarrow F$

$$\begin{tikzcd}
\tau(E) \arrow[rr, dashed, "\exists!\ \tau(f)"] & & \tau(F) \\
E \arrow[u] \arrow[rru] \arrow[rr] & & F \arrow[u]
\end{tikzcd} \qquad \dots \text{ chaque facteur.}$$

On a alors, $\tau(E) \oplus E \simeq \tau(E)$: un isomorphisme naturel.

Par suite, pour un espace de Hilbert H séparable de dimension infinie, l'algèbre de Banach $A = \mathrm{End}\,(H)$ est flasque. (En effet, $P(A) \simeq \tilde{\mathcal{H}}$ et $\tilde{\mathcal{H}}$ est flasque si $\mathcal{H}$ est flasque. Plus généralement, si une catégorie de Banach C est flasque, alors $\tilde{\mathcal{C}}$ est aussi flasque).

Remarque:

Si C est une catégorie de Banach flasque, alors $K(C) = 0$.

En effet, $\tau(E) \oplus E \simeq \tau(E) \Rightarrow [\tau(E)] + [E] = [\tau(E)]$ d'où $[E] = 0$.

V. A-modules dans une catégorie de Banach :

Définition:

Soient C une catégorie de Banach et A une algèbre de Banach. Un objet E de C avec un homomorphisme continu

$$\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}\ (E)$$

est dit un A-module dans C.

Exemple:

Si C est la catégorie des espaces de Banach, on a

$$C(E \otimes A, E) \simeq C(A, \mathrm{End}\ (E)).$$

Il y a donc correspondence biunivoque entre $\{\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}\ (E)\}$ et $\{\rho' : E \otimes A \longrightarrow E\}$ = {structures de A-module à droite sur E}.

On écrit souvent $x \cdot \lambda$ au lieu de $x \cdot \rho(\lambda)$ pour $x \in E$, $\lambda \in A$.

Définition:

On définit la catégorie $\mathcal{C}^A$ des A-modules dans une catégorie de Banach $\mathcal{C}$ comme suit:

$$\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}^A = \text{A-modules dans } \mathcal{C} = \{(E,\rho) \mid \rho: A \longrightarrow \mathrm{End}\,(E)\}$$

Morphisme: $f: (E,\rho) \longrightarrow (E',\rho')$

$f: E \longrightarrow E'$ dans $\mathcal{C}$ vérifiant $f\rho(\lambda) = \rho'(\lambda)f$ pour tout $\lambda \in A$

i.e.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho(\lambda)"'] & E' \arrow[d, "\rho'(\lambda)"] \\ E \arrow[r, "f"'] & E' \end{tikzcd}$$ commute.

Cette construction sera utilisée en particulier dans la suite quand A sera une algèbre de Clifford.

CHAPITRE IV

ALGEBRES DE CLIFFORD ET K-THEORIE TOPOLOGIQUE (PERIODICITE DE BOTT)

I. Algèbres de Clifford.

Nous allons définir l'algèbre de Clifford associée à une forme quadratique arbitraire. Nous allons utiliser de telles algèbres au Chapitre VI. Dans ce chapitre, il suffit de connaître les algèbres de Clifford de type (p.q).

Définition:

Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $k(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et Q une forme quadratique sur V. L'algèbre de Clifford associée à la forme quadratique Q est une k-algèbre unitaire $C(V)$ avec un homomorphisme de k-espaces vectoriels $i: V \longrightarrow C(V)$ vérifiant $(i(v))^2 = Q(v)\cdot 1_{(V)}$, le couple $(C(V), i)$ étant solution du problème universal suivant:

Pour toute k-algèbre unitaire A, et tout homomorphisme

$\varphi: V \longrightarrow A$ de k-espaces vectoriels vérifiant

$$\{\varphi(v)\}^2 = Q(v)\cdot 1_A \qquad \text{pour tout } v \in V,$$

il existe un homomorphisme $\tilde{\varphi}: C(V) \longrightarrow A$ de k-algèbres unitaires et un seul tel que $\tilde{\varphi}\circ i = \varphi$.

Actualement, $C(V)$ et $i: V \longrightarrow C(V)$ sont donnés par

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\text{injection}"'] & & C(V) = T(V)/I(Q) \\ & T(V) \arrow[ur, "\text{projection}"'] & \end{tikzcd}$$

où $T(V)$ = l'algèbre tensorielle sur V

$I(Q)$ = l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme

$$x \otimes x - Q(x)\cdot 1 \qquad (x \in V).$$

Exemple:

Si $Q = 0$, alors $C(V)$ est l'algèbre extérieure de V. On démontre (cf. Bourbaki [10]) que si $\dim V = n$, $\dim C(V) = 2^n$.

Définition:

L'algèbre de Clifford de type (p.q.), notée $C^{p,q}$, est l'algèbre de Clifford associée à la forme quadratique: sur $V = k^{p+q}$:

$$Q(x) = -x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2 \quad \text{où} \quad x = \sum_{i=1}^{p+q} x_i e_i$$

En fait, $C^{p,q}$ est une k-algèbre associative, engendrée par

$$e_1, \dots, e_p, \quad e_{p+1}, \dots, e_{p+q}$$

vérifiant

$$(*) \qquad \begin{cases} e_i^2 = -1 & \text{si} \quad 1 \leq i \leq p \\ e_j^2 = 1 & \text{si} \quad p+1 \leq j \leq q \\ e_i e_j + e_j e_i = 0 & \text{pour} \quad i \neq j. \end{cases}$$

2^{p+q} combinations $e_{i1} \dots e_{ik}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ forment une base du k-espace vectoriel $C^{p,q}$.

L'homomorphisme $i: V \longrightarrow C(V)$ est donné par

$$V = ke_1 + \dots + ke_{p\ q} \hookrightarrow C(V).$$

Exemples: $(k = \mathbb{R})$.

$\mathbb{R}$: $p = 0$, $q = 0$

$\mathbb{C}$: $p = 1$, $q = 0$, $e_1^2 = -1$ $(e_1 = i)$

$\mathbb{H}$(quaternion): $p = 2$, $q = 0$, $e_1^2 = -1$, $e_2^2 = -1$, $e_1e_2 = -e_2e_1$

$(e_1 = i, \quad e_2 = j, \quad e_1 e_2 = k)$.

On sait (Atiyah-Bott-Shapiro [11]) que si l'on écrit $C^n = C^{n,0}$ alors,

$C^{n+8} \approx C^n(16)$ (algèbre des matrices de type 16×16 à coefficients dans C^n) pour $k = \mathbb{R}$,

$C^{n+2} \approx C^n(2)$ (algèbre des matrices de type 2×2 à coefficients dans C^n) pour $k = \mathbb{C}$.

Tableau de $C^{p,q}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$C^{n,0}$ $(k = \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$
$C^{0,n}$ $(k = \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$
$C^{n,0}$ $(k = \mathbb{C})$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$						

En général, on a $C^{p,q} \hat{\otimes} C^{p',q'} \approx C^{p+p',q+q'}$ (voir Bourbaki [10])

II. Catégorie $C^{p,q}$ des $C^{p,q}$ - modules.

Définition:

Soit C une catégorie de Banach. $C^{p,q}$ est la catégorie des $C^{p,q}$-modules dans la catégorie C (voir, ch.III, §V).

Proposition:

Soit C une catégorie de Banach pseudo-abélienne (ch.III, §II). Alors les catégories $C^{p,q}$ et $C^{p+1,q+1}$ sont équivalentes.

Preuve:

Définissons φ: $C^{p,q} \longrightarrow C^{p+1,q+1}$ comme suit:
Soit $(E,\rho) \in \mathrm{Ob}\, C^{p,q}$ ($E \in \mathrm{Ob}\, C$, ρ: $C^{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}(E)$ homomorphisme de k-algèbres) i.e. la donnée de $p + q$ éléments

$$\rho(e_i),\quad 1 \leq i \leq p; \qquad \rho(\varepsilon_j),\quad 1 \leq j \leq q \qquad (\text{où} \quad \varepsilon_j = e_{p+j})$$

vérifiant (*) de §I.

Définissons $\varphi(E,\rho) = (E \oplus E,\rho') \in \mathrm{Ob}\ {}^{p+1,q+1}$ par la donnée de $(p+1) + (q+1)$ éléments suivants:

$$\rho'(e_i) = \begin{pmatrix} \rho(e_i) & 0 \\ 0 & -\rho(e_i) \end{pmatrix} \qquad 1 \leq i \leq p$$

$$\rho'(\varepsilon_j) = \begin{pmatrix} \rho(\varepsilon_j) & 0 \\ 0 & -\rho(\varepsilon_j) \end{pmatrix} \qquad 1 \leq j \leq q$$

$$\rho(e_{p+1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho'(\varepsilon_{q+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Pour tout homomorphisme $f: (E,\rho) \longrightarrow (F,\sigma)$ dans $\mathcal{C}^{p,q}$, définissons $\varphi(f): E \oplus E \longrightarrow F \oplus F$ par $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$. Alors, φ est un foncteur de $\mathcal{C}^{p,q}$ dans $\mathcal{C}^{p+1,q+1}$.

En suite, définissons un foncteur ψ: $C^{p+1,q+1} \longrightarrow C^{p,q}$ comme suit: Soit $(G,\rho) \in \mathrm{Ob}\, C^{p+1,q+1}$ ($G \in \mathrm{Ob}\, C$, ρ: $C^{p+1,q+1} \longrightarrow \mathrm{End}(G)$, homomorphisme de k-algèbres). Considérons le projecteur sur G défini par

$$p = \frac{\rho(e_{p+1})\ \rho(\varepsilon_{q+1}) + 1}{2} \quad \in \quad \mathrm{End}(G).$$

Puisque C est pseudo-abélienne, Ker p existe dans C. Par restriction de ρ: $C^{p+1,q+1} \longrightarrow \mathrm{End}(G)$ à $C^{p,q}$ ($C^{p,q} \subset C^{p+1,q+1}$) on munit G d'une structure de $C^{p,q}$-module et l'on observe que Ker p en est un sous $C^{p,q}$-module: soit $\psi(G,\rho)$ le $C^{p,q}$-module Ker p ainsi défini. Il est facile de définir $\psi(f)$ de sorte que ψ est un foncteur.

D'abord, on a $\psi\varphi \simeq \mathrm{Id}_{C^{p,q}}$. En effet, pour $(E,\rho) \in \mathrm{Ob}\, C^{p,q}$, $\varphi(E) = (E \oplus E, \rho')$ et

$$p = \frac{\rho'(e_{p+1})\ \rho'(\varepsilon_{q+1}) + 1}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où Ker p $\simeq$ E.

De plus, φ est bijectif sur les morphismes i.e.

$$C^{p,q}(E,F) \simeq C^{p+1,q+1}(\varphi E,\varphi F).$$

En effet, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $E \oplus E \longrightarrow F \oplus F$ est un homomorphisme de $C^{p+1,q+1}$-modules,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

d'où $c = b = 0$ et $a = d$ est un morphisme $f: E \longrightarrow F$, tel que $g = \varphi(f)$.

Comme $\psi\varphi \simeq \mathrm{Id}_{C^{p,q}}$, ψ est essentiellement surjectif et bijectif sur les morphismes, donc (Ch.III, §I), est une équivalence entre les catégories $C^{p+1,q+1}$ et $C^{p,q}$.

<u>Proposition:</u>

On a des équivalences de catégories

Entre $C^{p+4,q}$ et $C^{p,q+4}$ si $k = \mathbb{R}$,

entre $C^{p+1,q}$ et $C^{p,q+1}$ si $k = \mathbb{C}$.

Preuve:

En fait, on a des isomorphismes d'algèbres de Clifford:

$$C^{p+4,q} \approx C^{p,q+4} \qquad \text{si} \quad k = \mathbb{R}$$

$$C^{p+1,q} \approx C^{p,q+1} \qquad \text{si} \quad k = \mathbb{C}.$$

i) $k = \mathbb{R}$. Soit $\{e_1,\ldots,e_p, \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q, \lambda_1,\ldots,\lambda_4\}$ un système de générateurs de l'algèbre $C^{p,q+4}$ i.e.

$$e_1^2 = -1 \qquad 1 \leq i \leq p$$

$$\varepsilon_j^2 = 1 \qquad 1 \leq j \leq q$$

$$\lambda_k^2 = 1 \qquad 1 \leq k \leq 4$$

et anti-commutations entre $e_i, \varepsilon_j, \lambda_k$.

Définissons $f: C^{p,q+4} \longrightarrow C^{p+4,q}$ par

$$f(e_i) = e_i' \qquad 1 \leq i \leq p$$

$$f(\varepsilon_j) = \varepsilon_j' \qquad 1 \leq j \leq q$$

$$f(\lambda_k) = \lambda_1' \ldots \lambda_k' \ldots \lambda_4' \quad \text{(i.e. sans facteur } \lambda_k'\text{)} \ 1 \leq k \leq 4.$$

où $\{e_1',\ldots,e_p',\ \lambda_1',\ldots,\lambda_4',\ \varepsilon_1',\ldots,\varepsilon_q'\}$ est un système de générateurs de l'algèbre $C^{p+4,q}$.

On peut vérifier que f est un homomorphisme de k-algèbres. f est surjectif parce que $f(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\ldots,\lambda_4) = \pm\ \lambda_k'$, $1 \leq k \leq 4$. De plus, $\dim C^{p,q+4} = 2^{p+q+4} = \dim C^{p+4,q}$ donc, f est un isomorphisme.

ii) $k = \mathbb{C}$. Soit

$$\{e_1,\ldots,e_p,\ \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q,\ \lambda_1\}$$

un système de générateurs pour l'algèbre $C^{p,q+1}$. Définissons

$$f:\ C^{p,q+1} \longrightarrow C^{p+1,q}$$

par

$$f(e_i) = e_i' \quad , \quad 1 \leq i \leq p$$

$$f(\varepsilon_j) = \varepsilon_j' \quad , \quad 1 \leq j \leq q$$

$$f(\lambda_1) = \sqrt{-1}\cdot\lambda_1'$$

où $\{e'_1,\ldots,e'_p, \lambda'_1, \varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_q\}$ est un système de générateurs pour l'algèbre $C^{p+1,q}$.

Alors, f est un isomorphisme

Définition $\quad C^n = C^{n,0}$.

D'après la proposition $C^{p,q} \sim C^{p+1,q+1}$ (équivalence de catégories) on a $C^n \sim C^{p,q}$ si $n = p - q$.

Théorème (de périodicité) On a

$$C^n \sim C^{n+8} \qquad \text{si} \quad k = \mathbb{R}$$

$$C^n \sim C^{n+2} \qquad \text{si} \quad k = \mathbb{C}.$$

Preuve: Pour $p-q = n$, on a:

$$C^n \sim C^{p,q} \sim C^{p+4,q+4} \sim C^{p+8,q} \sim C^{n+8} \qquad \text{si} \quad k = \mathbb{R}$$

$$C^n \sim C^{p,q} \sim C^{p+1,q+1} \sim C^{p+2,q} \sim C^{n+2} \qquad \text{si} \quad k = \mathbb{C}.$$

III. Foncteurs banachiques de Serre.

Définition:

Un foncteur banachique $\varphi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est dit de Serre s'il vérifie une des conditions équivalentes:

i) Pour tout $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\mathrm{End}(E) \longrightarrow \mathrm{End}(\varphi E)$ est surjectif.

ii) Pour tout $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $GL(E) \longrightarrow GL(\varphi E)$ est une fibration de Serre, où $GL(E) = \mathrm{Ant}_{\mathcal{C}}(E)$ désigne le groupe des automorphismes de E dans $\mathcal{C}$ (de même pour $GL(\varphi E)$).

iii) Pour tout $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $GL(E) \longrightarrow GL(\varphi E)$ est une fibration localement triviale.

Exemple 1:

Soient X un espace compact, Y un sous-espace fermé de X et $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach. Alors le foncteur $\varphi: \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$ défini par la restriction est un foncteur de Serre. (Rappelons que $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}_T(X)$ (Ch.III, §III) est la catégorie des $\mathcal{C}$-fibrés).

Preuve:

Il suffit de vérifier que le foncteur $\varphi_T: C_T(X) \longrightarrow C_T(Y)$ est un foncteur de Serre. Or, si $\mathbb{E} = X \times E$ est le C-fibré trivial de fibre E, End($\mathbb{E}$) = F(X, End(E)) = l'ensemble des fonctions continues de X dans End(E).

Puisque Y est fermé dans le compact X, toute application continue $Y \longrightarrow$ End(E) se prolonge à X (Tietze). Par suite,

$$\mathrm{End}(\mathbb{E}) = F(X, \mathrm{End}\ (E)) \longrightarrow F(Y, \mathrm{End}\ (E)) = \mathrm{End}\ (\varphi_T\mathbb{E})$$

est surjectif.

Plus généralement

Exemple 2:

Soient A, B deux algèbres de Banach et $f: A \longrightarrow B$ un homomorphisme surjectif. Alors le foncteur $f_* = P(f): P(A) \longrightarrow P(B)$ est de Serre.

Définition:

Un foncteur banachique $\varphi\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est dit quasi-surjectif si pour tout $E' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ il existe un $E_1' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ et un $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ tels que $E' \oplus E_1' \simeq \varphi(E)$.

Exemple 1:

Le foncteur de restriction $\mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(Y)$ est quasi-surjectif.

Preuve:

Pour $E' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}(Y)$, il existe un fibré vectoriel E_1' tel que $E' \oplus E_1' \simeq Y \times k^n$. Posons $E = X \times k^n$. Alors $\varphi E \simeq Y \times k^n$. De même manière, on a

Exemple 2:

$f_*\colon\ \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ est quasi-surjectif.

Exemple 3:

Soit $\varphi\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ défini par $\varphi(E) = \underbrace{E \oplus \ldots \oplus E}_{n}$.

Alors, φ est quasi-surjectif. En effet, pour $E' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, poser $E_1' = \underbrace{E' \oplus \ldots \oplus E'}_{n-1}$ et $E = E'$.

Lemme:

Soit $\varphi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre (resp. quasi-surjectif). Alors le foncteur $\varphi^{p,q}: \mathcal{C}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{C}'^{p,q}$ est de Serre (resp. quasi-surjectif).

Preuve: Posons

$G = G^{p,q}$ = le groupe multiplicatif fini d'ordre 2^{p+q+1} dont les éléments sont $\pm e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ $(e_{i_o} = 1)$

$$0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p+q$$

Remarquons que si E est un $\mathcal{C}^{p,q}$-module dans $\mathcal{C}$, alors un morphisme $\alpha: E \longrightarrow E$ est un $\mathcal{C}^{p,q}$-homomorphisme si et seulement si $\alpha g = g\alpha$ pour tout $g \in G$. Supposons que φ soit un foncteur de Serre, i.e. $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(E) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{C}'}(E')$ est surjectif où $E' = \varphi E$. Considérons un $\alpha' \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}'^{p,q}}(E') \subset \mathrm{End}_{\mathcal{C}'}(E')$. Il existe un $\beta \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(E)$ tel que $\varphi(\beta) = \alpha'$. Posons

$$\alpha = \frac{1}{2^{p+q+1}} \sum_{v \in G} v^{-1} \beta v.$$

Alors, pour $g \in G$, on a

$$\alpha g = \frac{1}{2^{p+q+1}} \sum_{v \in G} v^{-1}\beta v g = \frac{1}{2^{p+q+1}} \sum_{v \in G} g(vg)^{-1}\beta(vg) = g\cdot\alpha$$

et

$$\varphi^{p,q}(\alpha) = \frac{1}{2^{p+q+1}} \sum_{v \in G} v^{-1}\varphi(\beta)v = \frac{1}{2^{p+q+1}} \sum_{v \in G} v^{-1}\alpha' v = \alpha'.$$

Ceci prouve que $\varphi^{p,q}$ est un foncteur de Serre. Ensuite, supposons que φ soit un foncteur quasi-surjectif. Soient $E' \in \mathrm{Ob}\, C'^{p,q}$ et $\overline{E'}$ l'objet de C' sousjacent à E', et considérons le $C^{p,q}$-module

$$\overline{E'} \otimes_k C^{p,q} \in \mathrm{Ob}\, C'^{p,q}.$$

E' est alors un facteur direct de $\overline{E'} \otimes C^{p,q}$ dans $C'^{p,q}$. En effet, si l'on définit

$$E' \underset{j}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \overline{E'} \otimes C^{p,q}$$

par

$$i(e') = \frac{1}{2^{p+q+1}} \sum_{v \in G} e'v \otimes v^{-1}\, 1 \quad \text{et} \quad j(e' \otimes \lambda) = e'\lambda$$

On a,

$$ji(e') = \frac{1}{2^{p+q+1}} \quad j(\sum_{v\in G} e'v \otimes v^{-1}1) = \frac{1}{2^{p+q+1}} \quad \sum_{v\in G} e'v\cdot v^{-1}\lambda = e'.$$

Or, par hypothèse il existe un $\overline{E}_1 \in \mathrm{Ob}\, C'$ et un $F \in \mathrm{Ob}\, C$ tels que $\varphi(F) = \overline{E}' \oplus \overline{E}_1$. Donc, E' est un facteur direct de $\overline{E}' \otimes C^{p,q}$ et $\overline{E}' \otimes C^{p,q}$ est un facteur direct de $\varphi(F) \otimes C^{p,q} = \varphi(F \otimes C^{p,q})$ i.e., E' est un facteur direct de $\varphi(E)$ où $E = F \otimes C^{p,q}$. Ceci prouve que $\varphi^{p,q}$ est un foncteur quasi-surjectif.

IV. Graduations de $C^{p,q}$-modules.

Soit (E,ρ) un objet de $C^{p,q}$ (C catégorie de Banach).

Proposition:

Les structures ρ' de $C^{p,q+1}$-module sur E admettant ρ comme $C^{p,q}$-module sous-jacent, correspondent biunivoquement à l'ensemble des $C^{p,q}$-automorphismes ε de E tels que

$$\varepsilon^2 = 1, \quad \varepsilon\rho(e_i) = \rho(e_i)\varepsilon, \qquad i = 1,\dots,p+q$$

grâce à l'application

$$\rho' \longrightarrow \varepsilon = \rho'(\varepsilon_{q+1}).$$

[La démonstration est immédiate].

On notera:

$GL^{p,q}(E)$ le groupe des $C^{p,q}$-automorphismes de E,

$GL^{p,q}(E)$ sa composante neutre,

$Grad^{p,q}(E)$ l'ensemble des $\varepsilon \in GL^{p,q}(E)$ tels que $\varepsilon^2 = 1$.

Un élément ε de $Grad^{p,q}(E)$ s'appelle une <u>graduation</u> de (E,ρ): cette terminologie provient de ce que, si C est pseudo-abélienne, ε permet de définir une $\mathbb{Z}_2$-graduation sur E en posant: $E_o = Ker(1-\varepsilon)$, $E_1 = Ker(1+\varepsilon)$ (E_o et E_1 sont échangés par $\rho(e_i)$ et par $\rho(\varepsilon_j)$).

Pour tout $C^{p,q+1}$-module (E,ρ), notons $\widetilde{Grad}^{p,q}(E)$ la composante connexe de $\rho(\varepsilon_{q+1})$ dans $Grad^{p,q}(E)$, et définissons

$$\theta : \widetilde{GL}^{p,q}(E) \longrightarrow \widetilde{Grad}^{p,q}(E)$$

par

$$\theta(\alpha) = \alpha\rho(\varepsilon_{q+1})\alpha^{-1}.$$

[Il est clair que $\theta(\alpha)$ est une graduation].

Proposition:

Pour tout $C^{p,q+1}$-module (E,ρ), l'application θ est continue, ouverte et surjective. En particulier

$$\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(E) \approx \widetilde{GL}^{p,q}(E)/\widetilde{G\ell}^{p,q+1}(E) \quad \text{(homéomorphisme)}$$

où

$$\widetilde{G\ell}^{p,q+1}(E) = \widetilde{GL}^{p,q}(E) \cap GL^{p,q+1}(E).$$

De plus, θ est une fibration principale localement triviale.

Preuve:

i) Im θ est ouvert.

En effet, soient $\varepsilon \in \mathrm{Im}\,\theta$ i.e. $\varepsilon = \alpha\rho(\varepsilon_{q\ 1})\alpha^{-1}$ avec $\alpha \in \widetilde{GL}^{p,q}(E)$ et $\eta \in \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(E)$ assez voisin de ε. Alors, on a

$$\left(\frac{1+\eta\varepsilon}{2}\right)\cdot\varepsilon = \eta\left(\frac{1+\eta\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon+\eta}{2}$$

et

$\gamma = \frac{1+\eta\varepsilon}{2}$ est assez voisin de 1 (parce que $1-\gamma = \frac{1-\eta\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}(\varepsilon-\eta)\varepsilon$) et appartient à $GL^{p,q}(E)$, donc à $\widetilde{GL}^{p,q}(E)$, d'où

$$\eta = \gamma\,\varepsilon\,\gamma^{-1} = (\gamma\alpha)\rho(\varepsilon_{q+1})(\gamma\alpha)^{-1} \in \mathrm{Im}\ \theta.$$

ii) Im θ est fermé.

En effet, si $\varepsilon_n' = \alpha_n\rho(\varepsilon_{q+1})\alpha_n^{-1}$ converge dans $\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(E)$ vers ε, où $\varepsilon_n' \in \mathrm{Im}\ \theta$, on a, pour n assez grand,

$$\varepsilon = \gamma_n\,\varepsilon_n'\,\gamma_n^{-1} \quad \text{où} \quad \gamma_n = \frac{1+\varepsilon\varepsilon_n'}{2} \in GL^{p,q}(E)$$

d'où $\varepsilon \in \mathrm{Im}\ \theta$.

iii) θ est une fibration principale localement triviale.

En effet, pour $\varepsilon \in \mathrm{Im}\ \theta$, $\varepsilon = \alpha\rho(\varepsilon_{q+1})\alpha^{-1}$, $\alpha \in GL^{p,q}(E)$, il existe une section locale:

$$s(\eta) = \left(\frac{1+\eta\varepsilon}{2}\right)\alpha$$

[où η varie dans un voisinage $V(\varepsilon)$ de ε suffisamment petit pour que

$\frac{1 + \eta\varepsilon}{2}$ reste dans $\widetilde{GL}^{p,q}(E)$].

i.e., pour tout $\beta \in \widetilde{G\ell}^{p,q+1}(E) = \widetilde{GL}^{p,q}(E) \cap GL^{p,q+1}(E)$, l'application

$$\eta \times \beta \longmapsto \left(\frac{1 + \eta\varepsilon}{2}\right)\alpha\beta$$

est un homéomorphisme: $V(\varepsilon) \times \widetilde{G\ell}^{p,q+1}(E) \stackrel{\sim}{\sim} \theta^{-1}(V(\varepsilon))$ commutant aux actions de $\widetilde{G\ell}^{p,q+1}(E)$; c'est-à-dire θ est une fibration principale localement triviale.

Proposition:

Soient $\varphi: C \longrightarrow C'$ un foncteur banachique de Serre et E un $C^{p,q+1}$-module dans C. Alors, l'application induite:

$$\widetilde{Grad}^{p,q}(E) \xrightarrow{\varphi'} \widetilde{Grad}^{p,q}(\varphi E)$$

est une fibration de Serre.

Preuve:

Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{GL}^{p,q}(E) \arrow[r, "\varphi''"] \arrow[d, "\theta"] & \widetilde{GL}^{p,q}(\varphi E) \arrow[d, "\theta'"] \\
\widetilde{Grad}^{p,q}(E) \arrow[r, "\varphi'"] & \widetilde{Grad}^{p,q}(\varphi E).
\end{tikzcd}$$

On sait que θ, θ' (par la proposition précédente) et φ'' (par Ch.IV, §III) sont des fibrations de Serre. Considérons $L \subset K$ où K est le polyhèdre $\Lambda_m \times I$ et $L = \Lambda_m \times \{0\}$ rétract par déformations de K, et deux applications:

$$h: K \longrightarrow \widetilde{Grad}^{p,q}(\varphi E)$$

$$f: L \longrightarrow \widetilde{Grad}^{p,q}(E)$$

vérifiant $\varphi' f = h|L$.

Comme θ est une fibration de Serre et que L est contratile, il existe

$$f': L \longrightarrow \widetilde{GL}^{p,q}(E)$$

tel que

$$f = \theta f'.$$

$$\begin{tikzcd}
GL^{p,q}(E) \arrow[r, "\varphi''"] \arrow[d, "\theta"'] & GL^{p,q}(\varphi E) \arrow[d, "\theta'"] \\
Grad^{p,q}(E) \arrow[r, "\varphi'"] & Grad^{p,q}(\varphi E) \\
L \arrow[u, "f"] \arrow[uu, bend left, "f'"] \arrow[r, hook] & K \arrow[ul, "f''"'] \arrow[uul, bend right, dashed, "h''"'] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

De plus, φ'' et θ' étant des fibrations de Serre, il existe $h'': K \longrightarrow \widetilde{GL}^{p,q}(E)$ tel que

$$h''|_L = f' \qquad \text{et} \quad \theta'\varphi''h'' = h.$$

Posons $f'' = \theta h'': K \longrightarrow \widetilde{Grad}^{p,q}(E)$. Alors, on a

$$\varphi' f'' = \varphi'\theta h'' = \theta'\varphi'' h'' = h$$

et

$$f''|_L = \theta h''|_L = \theta f' = f.$$

<u>Exemple</u>: $K = [0,1], \qquad L = (0)$

$$\varepsilon: K \longrightarrow \widetilde{Grad}^{p,q}(\varphi E)$$

$$\varepsilon(0) = (\varepsilon_{q+1})_{\varphi(E)}$$

Alors, il existe une <u>déformation</u> de graduations

$$\eta: K \longrightarrow \widetilde{Grad}^{p,q}(E) \qquad \text{telle que}$$

$$\varphi'(\eta(t)) = \varepsilon(t) \qquad \text{et} \quad \eta(0) = (\varepsilon_{q+1})_E.$$

Application:

Le foncteur $K(X;C) = K(C(X))$ est un invariant homotopique de X où X est un espace compact, i.e.,

$$K(X;C) \stackrel{\sim}{\sim} K(X \times I;C) \quad \text{où} \quad I = [0,1].$$

Preuve: On a

$$K(X \times I;C) = K(C(X \times I)) \stackrel{\sim}{\sim} K(C(X)(I)).$$

Donc, il suffit de supposer que X est réduit à un seul point i.e., démontrons $K(C) \stackrel{\sim}{\sim} K(C(I))$.

Considérons un C-fibré sur I:

$$\begin{array}{c} E \\ \big\downarrow \\ I. \end{array}$$

i.e. $E = (M,p)$ où $M \in \mathrm{Ob}\, C$ et $p: I \longrightarrow \mathrm{End}(M)$ tel que $p(t)^2 = p(t)$ (projecteur pour tout $t \in I$). Si $p \in \mathrm{End}(M)$ est un projecteur alors $\varepsilon = 2p - 1$ est une graduation $\in \mathrm{Grad}^{00}(M)$. Inversement, si $\varepsilon \in \mathrm{Grad}^{00}(M)$.

$p = \frac{\varepsilon + 1}{2}$ est un projecteur. Considérons l'application

$$\theta\colon \widetilde{GL}^{00}(M) \longrightarrow \widetilde{Grad}^{00}(M)$$

où M est considéré comme un $C^{0,1}$-module par $\varepsilon(0) = 2p(0) - 1$. D'après la proposition, il existe $\alpha\colon I \longrightarrow \widetilde{GL}^{00}(M)$ tel que

$$\varepsilon(t) = \alpha(t)\ \varepsilon(0)(\alpha(t))^{-1} \qquad \text{pour tout} \quad t \in I,$$

i.e.,

$$E = (M, p(t)) \approx (M, p(0))$$

i.e. le fibré E est trivial sur I.

V. Les groupes $K^{p,q}(\varphi)$ et $K^{p,q}(C)$.

Pour un foncteur de Serre, quasi-surjectif $\varphi\colon C \longrightarrow C'$, on va définir les groupes relatifs $K^{p,q}(\varphi)$ comme suit:

Définition:

Considérons les triples:

(E,η_1,η_2) où $E \in \mathrm{Ob}\, C^{p,q}$, $\eta_1, \eta_2 \in \mathrm{Grad}^{p,q}(E)$ tels que $\varphi(\eta_1) = \varphi(\eta_2)$.

On dira que

$(E,\eta_1,\eta_2) \sim (F,\zeta_1,\zeta_2)$ s'il existe (G,ξ,ξ) tel que $\eta_1 \oplus \zeta_2 \oplus \xi$ soit "homotope" à $\eta_2 \oplus \zeta_1 \oplus \xi$ dans $\mathrm{Grad}^{p,q}(E \oplus F \oplus G)$ relativement à φ i.e. φ (cette homotopie) = constante.

(autrement dit: $\exists\gamma : I \longrightarrow \mathrm{Grad}^{p,q}(E \oplus F \oplus G)$ tel que

$\gamma(0) = \eta_1 \oplus \zeta_2 \oplus \xi$, $\gamma(1) = \eta_2 \oplus \zeta_1 \oplus \xi$, $\varphi(\gamma(t))$ = indépendant de t).

Définissons

$K^{p,q}(\varphi)$ = l'ensemble des classes d'équivalences de tels triples

$$(E,\eta_1,\eta_2)$$

$K^{p,q}(C) = K^{p,q}(\varphi_o)$ où $\varphi_o : C \longrightarrow 0$.

<u>Propriétés élémentaires</u>

0) $\sim$ est une relation d'équivalence.

Vérifions e.q. $(E,\eta_1,\eta_2) \sim (E,\eta_1,\eta_2)$. Il suffit de démontrer que $\eta_1 \oplus \eta_2$ est homotope à $\eta_2 \oplus \eta_1$ relativement à φ. En effet,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} & \text{pour } \theta = 0 \\[2ex] \begin{pmatrix} \eta_2 & 0 \\ 0 & \eta_1 \end{pmatrix} & \text{pour } \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

et

$$\varphi\left[\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \varphi(\eta_1) & 0 \\ 0 & \varphi(\eta_2) \end{pmatrix} = \text{constante}$$

parce que $\varphi(\eta_1) = \varphi(\eta_2)$ par hypothèse.

1) $K^{p,q}(\varphi)$ devient un groupe abélien par l'opération:

$$(E,\eta_1,\eta_2) + (F,\zeta_1,\zeta_2) = (E \oplus F,\ \eta_1 \oplus \zeta_1,\ \eta_2 \oplus \zeta_2).$$

Il est clair que l'on a un monoide abélien. Tout élément a un inverse, car $(E,\eta_1,\eta_2) + (E,\eta_2,\eta_1) \sim 0$:

en effet, $\eta_1 \oplus \eta_2$ est homotope à $\eta_2 \oplus \eta_1$ relativement à φ.

2) $(E,\eta_1,\eta_2) \sim (F,\zeta_1,\zeta_2)$ s'il existe $f\colon E \xrightarrow{\sim} F$ tel que $\zeta_i = f\eta_i f^{-1}$, $i = 1,2$. On écrit $(E,\eta_1,\eta_2) \overset{\sim}{\sim} (F,\zeta_1,\zeta_2)$.

<u>Preuve</u>:

Il suffit de vérifier que $\eta_1 \oplus \zeta_2$ est homotope à $\eta_2 \oplus \zeta_1$ relativement à φ. Or,

$$\eta_1 \oplus \zeta_2 = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^{-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_2 & 0 \\ 0 & \eta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \eta_2 & 0 \\ 0 & \zeta_1 \end{pmatrix} = \eta_2 \oplus \zeta_1.$$

3) <u>Définition</u>:

(E,η_1,η_2) est dit <u>élémentaire</u> si η_1 est homotope à η_2 relativement à φ. Deux triples σ, σ' sont

$\sigma \overset{\bullet}{\sim} \sigma'$ s'il existe deux triples élémentaires τ, τ' tels que $\sigma + \tau \overset{\sim}{\sim} \sigma' + \tau'$.

Alors, $\sigma \overset{\bullet}{\sim} \sigma'$ si et seulement si $\sigma \sim \sigma'$.

4) Considérons les catégories de Banach pseudo-abéliennes associées:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\ i\ } & \tilde{\mathcal{C}} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\varphi}} \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow[i']{} & \tilde{\mathcal{C}}' \end{array}$$

On a, $K^{p,q}(\varphi) \xrightarrow{\sim} K^{p,q}(\tilde{\varphi})$.

<u>Preuve</u>:

<u>Surjectivité</u>: Soit (E,η_1,η_2) un triple de $K^{p,q}(\tilde{\varphi})$. Comme $(E,\eta_1) \in \mathrm{Ob}\, \tilde{\mathcal{C}}^{p,q+1}$ et $\mathcal{C}^{p,q+1} \xrightarrow{\ i\ } \tilde{\mathcal{C}}^{p,q+1}$ est quasi-surjectif (Ch.IV, §III), il existe $(E',\eta_1') \in \mathrm{Ob}\, \tilde{\mathcal{C}}^{p,q+1}$ et $(F,\zeta) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^{p,q+1}$ tels que

$$(E,\eta_1) \oplus (E',\eta_1') = i(F,\zeta).$$

Donc,

$$\begin{aligned}(E,\eta_1,\eta_2) + (E',\eta_1',\eta_1') &= (E \oplus E',\ \eta_1 \oplus \eta_1',\ \eta_2 \oplus \eta_1') \\ &= i(F,\zeta,\ \eta_2 \oplus \eta_1')\end{aligned}$$

où $(E',\eta_1',\eta_1') \sim 0$ d'où $(E,\eta_1,\eta_2) \sim i(F,\zeta,\eta_2 \oplus \eta_1')$.

Injectivité: Soit (E,η_1,η_2) un triple de $K^{p,q}(\varphi)$ tel que

$$(E,\eta_1,\eta_2) \sim 0 \quad \text{dans} \quad K^{p,q}(\tilde{\varphi}).$$

i.e., il existe $(G,\zeta) \in \mathrm{Ob}\,\tilde{C}^{p,q+1}$ tel que $\eta_1 \oplus \zeta$ soit homotope à $\eta_2 \oplus \zeta$ relativement à φ. Prenons $(G',\zeta') \in \mathrm{Ob}\,\tilde{C}^{p,q+1}$ tel que

$$(G \oplus G', \zeta \oplus \zeta') = i(F,\xi)$$

avec $(F,\xi) \in \mathrm{Ob}\,C^{p,q+1}$. Alors, $\eta_1 \oplus \xi$ est homotope à $\eta_2 \oplus \xi$ relativement à φ i.e.

$$(E,\eta_1,\eta_2) \sim 0 \quad \text{dans} \quad K^{p,q}(\varphi).$$

5) Le groupe $K^{p,q}(\varphi)$ ne dépend que la différence $p-q$ mod 8 dans le cas réel ou mod 2 dans le cas complexe.

Preuve:

L'équivalence de catégories $C^{p,q} \sim C^{p+1,q+1}$ induit

$$K^{p,q}(\varphi) \overset{\sim}{\sim} K^{p+1,q+1}(\varphi).$$

De l'équivalence $C^{p+4,q} \sim C^{p,q+4}$ on a $K^{p+4,q}(\varphi) \overset{\sim}{\sim} K^{p,q+4}(\varphi)$ dans le cas réel. De même manière pour le cas complexe.

6) $K^{p,q}(C)$ est un invariant homotopique i.e., $K^{p,q}(C(I)) \overset{\sim}{\sim} K^{p,q}(C)$.

<u>Application</u>: Pour $C = E$, on va définir

$$K^{p,q}(X) = K^{p,q}(E(X)) \qquad \text{pour X compact.}$$

Plus généralement, on peut définir

$K^{p,q}(X,Y;C)$ où X est un espace paracompact

Y est un fermé dans X

par les triples:

$(E,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ où E est un fibré sur X à fibre dans $C^{p,q}$

ε_i: $X \longrightarrow$ End (fibre)

tels que $\varepsilon_1(y) = \varepsilon_2(y)$ pour tout $y \in Y$.

Si X est un espace compact et φ: $C(X) \longrightarrow C(Y)$ est la restriction des fibrés, on a un isomorphisme:

$$K^{p,q}(X,Y;C) \stackrel{\sim}{\sim} K^{p,q}(\varphi).$$

7) Si C est une catégorie de Banach pseudo-abélienne, alors

$$K^{0,0}(C) \stackrel{\sim}{\sim} K(C).$$

<u>Preuve</u>:

Pour $E \in \mathrm{Ob}\, C$, $E \longmapsto (E,-1,+1)$ définit une application de $K(C)$ dans $K^{0,0}(C)$. Pour un triple $(E,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$,

$$(E,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \longmapsto [\mathrm{Ker}\ \frac{1-\varepsilon_1}{2}] - [\mathrm{Ker}\ \frac{1-\varepsilon_2}{2}] \in K(C)$$

donne une application de $K^{0,0}(C)$ dans $K(C)$ qui est inverse de l'application précédente. Pour $C = L(A)$, A une algèbre de Banach, définissons

$$K^{p,q}(X,A) = K^{p,q}(X;L(A)).$$

On verra au Ch.V (§I) que

$$K^{p,q}(X,A) = \varinjlim_{n} [X,\ F^{p,q}(A,n)]$$

où $F^{p,q}(A,n) = K^{p,q}(A) \times \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(n,A)$

avec la topologie discrète sur $K^{p,q}(A) = K^{p,q}(L(A))$ et

$\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(n,A) = \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(A^n \otimes C^{p,q+1})$.

Exercice:

$$K^{0,1}(X;A) = [X, GL(A)]$$

où $GL(A) = \varinjlim_{n} GL(A,n)$.

VI. Théorème d'excision:

Théorème d'excision: Considérons le diagramme cartésien suivant:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & C_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\ C_1 \arrow[r, "\psi_1"'] & C' \end{tikzcd}$$

où les objets de C, C', C_1, C_2 sont les mêmes, où les foncteurs $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sont les identités sur les objets et où φ_1 et ψ_2 sont des foncteurs de Serre et où (φ_1, φ_2) est le produit cartésien de (ψ_1, ψ_2). Alors, on a un isomorphisme $K^{p,q}(\varphi_1) \xrightarrow{\sim} K^{p,q}(\psi_2)$.

Preuve:

Surjectivité de $K^{p,q}(\varphi_1) \longrightarrow K^{p,q}(\psi_2)$ défini par $(E,\varepsilon,\eta) \longrightarrow (\varphi_2(E), \varphi_2(\varepsilon), \varphi_2(\eta))$.

Soit (E,ε',η') un triple pour $K^{p,q}(\psi_2)$ i.e., $E \in \mathrm{Ob}\, C_2^{p,q}$ et ε',η' sont deux graduations telles que $\psi_2(\varepsilon') = \psi_2(\eta')$. Par hypothèse, φ_2 est quasi-surjectif donc $\varphi_2^{p,q+1}$ l'est aussi (Ch.IV,§III) i.e., il existe un couple (F,ζ) tel que

$$(E,\varepsilon',\eta') + (F,\zeta,\zeta) = (\varphi_2(G), \varphi_2(\xi), \eta' \oplus \zeta)$$

pour un $C^{p,q+1}$-module (G,ξ) dans C. Par suite $(E,\varepsilon',\eta') \sim (\varphi_2(G),\varphi_2(\xi),\eta'\oplus\zeta)$ i.e., on peut supposer

$$\varepsilon' = \varphi_2(E)$$

pour un $\varepsilon \in \mathrm{Grad}_C^{p,q}(E)$.

Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & C_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\ C_1 \arrow[r, "\psi_1"'] & C' \end{tikzcd}$$

On a, $\psi_1\varphi_1(\varepsilon) = \psi_2\varphi_2(\varepsilon) = \psi_2(\varepsilon') = \psi_2(\eta')$; puisque le diagramme est cartésien, il existe une graduation $\eta \in \mathrm{Grad}_C^{p,q}(E)$ telle que $\varphi_2(\eta) = \eta'$ et $\varphi_1(\eta) = \varphi_1(\varepsilon)$. Donc

$$\varphi_2(E,\varepsilon,\eta) = (E,\varepsilon',\eta').$$

<u>Injectivité</u> de $K^{p,q}(\varphi_1) \longrightarrow K^{p,q}(\psi_2)$. Soit (E,ε,η) un triple pour $K^{p,q}(\varphi_1)$. Supposons que $(\varphi_2(E),\varphi_2(\varepsilon),\varphi_2(\eta)) \sim 0$: il existe un $(F,\zeta) \in \mathrm{Ob}\, C_2^{p,q+1}$ tel que

$$\varphi_2(\varepsilon) \oplus \zeta \text{ est homotope à } \varphi_2(\eta) \oplus \zeta \text{ relativement à } \psi_2.$$

Comme $\varphi_2^{p,q+1}$ est quasi-surjectif, il existe (F',ζ') et (G,ξ) tels que

$$(F,\zeta) + (F',\zeta') = \varphi_2(G,\xi).$$

Considérons deux éléments $\varepsilon \oplus \xi$ et $\eta \oplus \xi$ dans $\mathrm{Grad}_C^{p,q}(E \oplus G)$: $\varphi_2(\varepsilon \oplus \xi)$ est homotope à $\varphi_2(\eta \oplus \xi)$ relativement à ψ_2. D'autre part, $\varphi_1(\varepsilon \oplus \xi) = \varphi_2(\eta \oplus \xi)$. Par suite, $\varepsilon \oplus \xi$ est homotope à $\eta \oplus \xi$ relativement à φ_1 car φ_1 est un foncteur de Serre: donc

$$(E,\varepsilon,\eta) \sim 0 \quad \text{dans } K^{p,q}(\varphi_1).$$

<u>Application</u> Considérons le diagramme cartésien:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] & A' \end{tikzcd}$$

d'algèbres de Banach i.e., $A = A_1 \times_{A'} A_2$. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} L(A) \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & L(A_2) \arrow[d, "\psi_2"] \\ L(A_1) \arrow[r, "\psi_1"'] & L(A') \end{tikzcd}$$

est aussi cartésien et les foncteurs φ_1 et ψ_2 sont de Serre. Par le théorème d'excision, on a $K^{p,q}(\varphi_1) \xrightarrow{\sim} K^{p,q}(\psi_2)$. Considérons le cas particulier suivant où

ψ: $B \longrightarrow B''$ un épimorphisme d'algèbres de Banach

$B' = \mathrm{Ker}\ \psi$, $(B')^+$ = l'algèbre unitaire associée à B'.

Alors,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}((B')^{+}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"'] & \mathcal{L}(B) \arrow[d, "\psi_2"] \\
\mathcal{L}(k) \arrow[r] & \mathcal{L}(B'')
\end{tikzcd}$$

est cartésien et les foncteurs φ_1 et ψ_2 sont de Serre de sorte que $K^{p,q}(\varphi_1) = K^{p,q}(B') \simeq K^{p,q}(\psi_2)$. E.g. soient X un espace compact et X" un fermé de X. Prenons B = C(X), B" = C(X"), ψ = l'application de restriction. Alors,

$$K^{p,q}(\psi) \underset{\text{déf}}{=} K^{p,q}(X,X'') \simeq K^{p,q}(X/X'',*) = K^{p,q}(\varphi)$$

où * est le point de base de l'espace quotient X/X".

VII: <u>Théorème d'exactitude</u>

<u>Théorème d'exactitude</u> Soit $\varphi: C \longrightarrow C'$ un foncteur banachique de Serre, quasi-surjectif. Alors il existe une suite exacte de la forme:

$$\longrightarrow K^{p,q+1}(C) \longrightarrow K^{p,q+1}(C') \xrightarrow{\partial^{p,q+1}} K^{p,q}(\varphi) \longrightarrow K^{p,q}(C) \longrightarrow K^{p,q}(C') \longrightarrow$$

où $\partial^{p,q+1}$ seront définis plus tard.

Pour la démonstration, nous allons considérer deux suites:

$$\begin{tikzcd}
\longrightarrow K^{p,q+1}(C) \arrow[r] \arrow[d, "t"] & K^{p,q+1}(C') \arrow[r, "\partial^{p,q+1}"] \arrow[d, "t'"] & K^{p,q}(\varphi) \arrow[r] & K^{p,q}(C) \arrow[r] & K^{p,q}(C') \longrightarrow \\
\longrightarrow K^{p,q}(D',S^o;C) \arrow[r] & K^{p,q}(D',S^o;C') \arrow[ur, "\partial'"'] & & &
\end{tikzcd}$$

où t, t', ∂' seront définis plus tard et vérifient $\partial' t' = \partial^{p,q+1}$.

Dans cette section, nous allons démontrer que la deuxième suite:

$$K^{p,q}(D',S^o;C) \longrightarrow K^{p,q}(D',S^o;C') \xrightarrow{\partial'} K^{p,q}(\varphi) \longrightarrow K^{p,q}(C) \longrightarrow K^{p,q}(C')$$

est exacte. En suite, dans la section suivante (§VIII), nous démontrerons que

$$K^{p,q+1}(C) \xrightarrow{\ t\ } K^{p,q}(D',S^o;C)$$

(donc $K^{p,q+1}(C') \xrightarrow{t'} K^{p,q}(D',S^o;C')$) est un isomorphisme. Ceci démontrera l'exactitude de la première suite:

$$\longrightarrow K^{p,q+1}(C) \longrightarrow K^{p,q+1}(C') \xrightarrow{\partial^{p,q+1}} K^{p,q}(\varphi) \longrightarrow K^{p,q}(C) \longrightarrow K^{p,q}(C') \longrightarrow .$$

<u>Définition</u> de $\partial^{p,q+1}$: $K^{p,q+1}(C') \longrightarrow K^{p,q}(\varphi)$.

Soit $x' = (E',\varepsilon'_{q+1};\ \eta'_1,\eta'_2)$ un triple de $K^{p,q+1}(C')$ où E' est un $C^{p,q}$-module dans C' et ε'_{q+1} une graduation sur E'. Comme $\varphi: C \longrightarrow C'$, donc $\varphi^{p,q+1}$ est quasi-surjectif, on peut supposer, quitte à ajouter triple élémentaire, que (E',ε'_{q+1}) est de la forme $\varphi(E,\varepsilon_{q+1})$.

Considérons les deux chemins suivants:

$$\eta'_i(\theta) = \varepsilon'_{q+1}\cos\theta + \eta'_i\ \sin\theta,\quad i = 1,2,\quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

dans $\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(\varphi E)$ qui transforment ε'_{q+1} en $-\varepsilon'_{q+1}$. Comme $\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(E) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(\varphi E)$ est une fibration de Serre, il existe deux chemins $\eta_i(\theta)$ $i = 1,2$ au dessus de $\eta'_i(\theta)$, $i = 1,2$. Définissons

$$\partial^{p,q+1}(x') = (E,\eta_1(\pi),\eta_2(\pi)).$$

C'est un triple pour $K^{p,q}(\varphi)$ parce que

$$\varphi(\eta_1(\pi)) = \eta'_1(\pi) = -\varepsilon'_{q+1}$$

$$\varphi(\eta_2(\pi)) = \eta'_2(\pi) = -\varepsilon'_{q+1}.$$

On vérifie que cette définition ne dépend pas des représentants choisis.

<u>Définition</u> de $t: K^{p,q+1}(C) \longrightarrow K^{p,q}(D^1,S^o;C)$.

Pour un triple $(E,\varepsilon_{q+1};\eta_1,\eta_2)$ de $K^{p,q+1}(C)$ où $(E,\varepsilon_{q+1}) \in \mathrm{Ob}\ C^{p,q+1}$, posons

$$t(E,\varepsilon_{q+1};\eta_1,\eta_2) = (\pi^*E,\eta_1(\theta),\eta_2(\theta))$$

où $\pi: D^1 \longrightarrow$ un seul point

$$\eta_i(\theta) = \varepsilon_{q+1}\cos\theta + \eta_i \sin\theta \qquad i = 1,2, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

C'est un triple de $K^{p,q}(D^1,S^o;C)$ en utilisant les représentations: $D^1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$, $S^o = \{-1,1\}$. On vérifie qu'il ne dépend pas des représentants choisis.

<u>Définition</u> de $\partial': K^{p,q}(D^1,S^o;C') \longrightarrow K^{p,q}(\varphi)$. Remarquons d'abord que tout triple de $K^{p,q}(D',S^o;C')$ est équivalent à un triple de la forme:

$$(\varphi^{p,q}\ \pi^*\ E,\ \eta_1'(\theta),\ \eta_2'(\theta))$$

où E est un objet de $C^{p,q}$ et $\eta_1'(0) = \eta_2'(0)$ se relève en une graduation η de E, parce que $\varphi^{p,q+1}$ est quasi-surjectif et que π est une équivalence d'homotopie. De plus, $(\varphi^{p,q}\pi^*E,\ \eta_1'(\theta),\eta_2'(\theta)) \sim (\varphi^{p,q}\pi^*F,\ \zeta_1'(\theta),\ \zeta_2'(\theta))$ si et seulement s'il existe $(\varphi^{p,q}\pi^*G,\ \xi'(\theta),\ \xi'(\theta))$ tel que $\eta_1'(\theta) \oplus \zeta_2'(\theta) \oplus \xi'(\theta)$ est homotope à $\eta_2'(\theta) \oplus \zeta_1'(\theta) \oplus \xi'(\theta)$ relativement à S^o. Soient $\eta_1(\theta)$,

$\eta_2(\theta)$ des relèvements de $\eta_1'(\theta)$, $\eta_2'(\theta)$ tels que $\eta_i(0) = \eta$, $i = 1,2$. (de tels relèvements existent parce que $\varphi^{p,q+1}$ est de Serre). Définissons

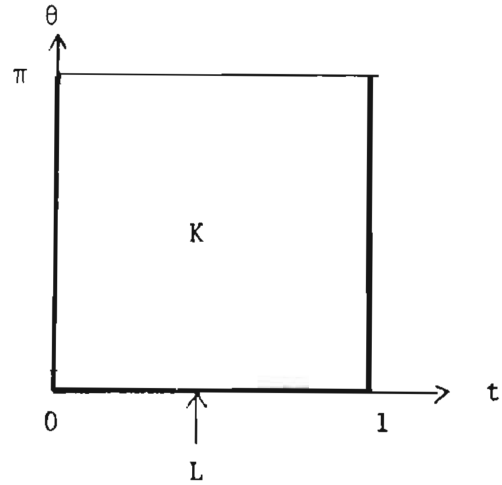
$$\partial'(\varphi^{p,q}\pi^*E,\ \eta_1'(\theta),\ \eta_2'(\theta)) = (E,\ \eta_1(\pi),\ \eta_2(\pi)).$$

∂' est bien défini

En effet, soient $(\varphi^{p,q}\pi^*E, \eta_1'(\theta), \eta_2'(\theta)) \sim (\varphi^{p,q}\pi^*F, \zeta_1'(\theta), \zeta_2'(\theta))$ et $\partial(\varphi^{p,q}\pi^*F, \zeta_1'(\theta), \zeta_2'(\theta)) = (F, \zeta_1(\pi), \zeta_2(\pi))$. Par hypothèse, il existe $\xi'(\theta)$ et une homotopie $\gamma'(t,\theta)$ entre $\eta_1'(\theta) \oplus \zeta_2'(\theta) \oplus \xi'(\theta)$ et $\eta_2'(\theta) \oplus \zeta_1'(\theta) \oplus \xi'(\theta)$ relativement à S^0 i.e. $\gamma'(t,0)$ et $\gamma'(t,\pi)$ sont des fonctions constantes de t.

Considérons

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(E) \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(\varphi E) \\
L \arrow[u, "\gamma_1"] \arrow[r, hook] & K \arrow[u, "\gamma'"']
\end{tikzcd}$$



où

$$L = (\{0,1\} \times D^1) \cup ([0,1] \times \{0\}), \qquad K = [0,1] \times D^1$$

$$\gamma_1(0,\theta) = \eta_1(\theta) \oplus \zeta_2(\theta) \oplus \xi(\theta)$$

$$\gamma_1(1,\theta) = \eta_2(\theta) \oplus \zeta_1(\theta) \oplus \xi(\theta)$$

$$\gamma_1(t,0) = \eta_1(0) \oplus \zeta_2(0) \oplus \xi(0).$$

Comme φ: $\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(E) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(\varphi E)$ est une fibration de Serre, il existe un relèvement $\gamma(t,\theta)$ de $\gamma'(t,\theta)$ vers K prolongement γ_1. Alors, $\gamma(t,\pi)$ est une homotopie entre $\eta_1(\pi) \oplus \zeta_2(\pi) \oplus \xi(\pi)$ et $\eta_2(\pi) \oplus \zeta_1(\pi) \oplus \xi(\pi)$ relativement à φ, i.e.,

$$(E,\eta_1(\pi),\eta_2(\pi)) \sim (F,\zeta_1(\pi),\zeta_2(\pi)) \quad \text{dans} \quad K^{p,q}(\varphi).$$

<u>Vérification</u> de $\partial' t' = \partial^{p,q+1}$. En fait, soit $x' = (E',\varepsilon'_{q+1};\eta'_1,\eta'_2)$ un triple de $K^{p,q+1}(C')$. On peut toujours supposer $(E',\varepsilon'_{q+1}) = \varphi^{p,q+1}(E,\varepsilon_{q+1})$ avec $(E,\varepsilon_{q+1}) \in \mathrm{Ob}\, C^{p,q+1}$. Posons

$$\left.\begin{array}{l} \eta'_i(\theta) = \varepsilon'_{q+1}\cos\theta + \eta'_i \sin\theta \\ \\ \eta_i(\theta)\text{: relèvement de } \eta'_i(\theta) \text{ tel que } \eta_i(0) = \varepsilon_{q+1} \end{array}\right\} \quad i = 1,2$$

$$0 \leq \theta \leq \pi.$$

Alors,

$$t'(x') = (\pi^*E',\ \eta'_1(\theta),\ \eta'_2(\theta)) = (\varphi^{p,q}\pi^*E,\ \eta'_1(\theta),\ \eta'_2(\theta))$$

et

$$\partial' t'(x') = (E, \eta_1(\pi), \eta_2(\pi')) = \partial^{p,q+1}(x').$$

Proposition La suite

$$K^{p,q}(D^1, S^o; C) \longrightarrow K^{p,q}(D^1, S^o; C') \xrightarrow{\partial'} K^{p,q}(\varphi) \longrightarrow K^{p,q}(C) \longrightarrow K^{p,q}(C')$$

est exacte.

Preuve:

Vérifions e.g., l'exactitude en $K^{p,q}(\varphi)$. Soit $(\varphi^{p,q}\pi^*E,\ \eta_1'(\theta),\ \eta_2'(\theta))$ un triple de $K^{p,q}(D^1, S^o; C')$. Alors,

$$\partial'(\varphi^{p,q}\pi^*E,\ \eta_1'(\theta),\ \eta_2'(\theta)) = (E, \eta_1(\pi), \eta_2(\pi)) \sim 0 \quad \text{dans} \quad K^{p,q}(C)$$

parce que $\eta_1(\pi)$ est homotope à $\eta_1(0) = \eta_2(0)$ et $\eta_2(\pi)$ est homotope à $\eta_2(0)$: $\eta_1(\pi)$ est donc homotope à $\eta_2(\pi)$. Soit (E, η_1, η_2) un triple de $K^{p,q}(\varphi)$ tel que $(E, \eta_1, \eta_2) \sim 0$ dans $K^{p,q}(C)$. Il existe alors un (F, ξ, ξ) tel que $\eta_1 \oplus \xi$ soit homotope à $\eta_2 \oplus \xi$. Soit $\gamma(\theta)$ une homotopie entre $\eta_1 \oplus \xi$ et $\eta_2 \oplus \xi$. Considérons le triple suivant dans $K^{p,q}(D^1, S^o; C')$:

$$(\varphi^{p,q}\pi^*(E \oplus F),\ -\cos\theta\ \varphi\eta_1 \oplus \sin\theta\ \xi,\ \varphi\gamma(\theta)).$$

On a,

$$\partial'(\varphi^{p,q}\pi^*(E \oplus F), -\cos\theta\varphi\eta_1 \oplus \sin\theta\varphi\xi, \varphi\gamma(\theta)) = (E \oplus F, \eta_1 \oplus \xi, \gamma(\pi))$$

$$= \quad (E \oplus F, \eta_1 \oplus \xi, \eta_2 \oplus \xi) = (E,\eta_1,\eta_2) + (F,\xi,\xi)$$

$$\sim \quad (E,\eta_1,\eta_2)$$

dans $K^{p,q}(\varphi)$.

VIII: Théorème fondamental

Nous allons esquisser la preuve du théorème suivant. Voir plus détail dans M. KAROUBI, thèse [1] p.210-217.

Théorème fondamental: Pour toute catégorie de Banach $\mathcal{C}$, l'homomorphisme

$$t : K^{p,q+1}(\mathcal{C}) \longrightarrow K^{p,q}(D^1,S^o;\mathcal{C})$$

défini dans §VII est un isomorphisme.

Exemple: Pour $\mathcal{C} = \mathcal{E}(X)$, X un espace compact, on a

$$K^n(X) = K^{p,q+1}(\mathcal{C}) \qquad \text{pour } n = p-(q+1)$$

par définition, et

$$K^{p,q}(S^1, \text{point};C) \underset{\sim}{\sim} K^{p,q}(D^1,S^o;C)$$

par excision (§VI). D'où, pour les groupes réduits, l'isomorphisme

$$\tilde{K}^n(X) \approx \tilde{K}^{n+1}(\Sigma X)$$

où ΣX est la suspension réduite de l'espace pointé X.

La démonstration du théorème fondamental va utiliser des techniques dues initialement à ATIYAH-BOTT et dévelopées par WOOD.

D'abord, nous allons trouver une forme convenable pour les triples de $K^{p,q}(D^1,S^o;C)$:

<u>Lemme</u>:

Tout élément de $K^{p,q}(D^1,S^o;C)$ est représenté par un triple de la forme suivante:

$$(\pi^*E,\ \varepsilon_{q+1}\cos\theta + \eta_1 \sin\theta,\ \ \alpha(\theta)\ \varepsilon_{q+1}\alpha(\theta)^{-1})$$

où $(E, \varepsilon_{q+1},\eta_1) \in \text{Ob}\ C^{p,q+2}$ et $\alpha(\theta) \in GL^{p,q}(E)$ vérifient

i) $\alpha(0) = \mathrm{Id}$

ii) $\alpha(\pi)\,\varepsilon_{q+1} = -\,\varepsilon_{q+1}\alpha(\pi)$.

Preuve:

Comme D^1 est contractile, on peut supposer que le triple donné est de la forme:

$$(\pi^*E,\ \varepsilon_{q+1},\ \eta_2(\theta))$$

où $(E,\varepsilon_{q+1}) \in \mathrm{Ob}\ C^{p,q+1}$. Soit d'autre part $\eta_1 \in \mathrm{Grad}^{p,q+1}(E,\varepsilon_{q+1})$. Posons

$$\zeta = \cos\ \frac{\theta}{2} + \eta_1\varepsilon_{q+1}\ \sin\ \frac{\theta}{2}\ .$$

Alors,

$$\zeta^{-1} = \cos\ \frac{\theta}{2}\ -\ \eta_1\varepsilon_{q+1}\ \sin\ \frac{\theta}{2}$$

et

$$\zeta\varepsilon_{q+1}\zeta^{-1} = \varepsilon_{q+1}\ \cos\ \theta + \eta_1\ \sin\ \theta.$$

Donc, grâce à l'isomorphisme ζ, on peut supposer que le triple donné est de la forme:

$$(\pi^*E,\ \varepsilon_{q+1}\cos\theta + \eta_1 \sin\theta,\ \eta_2(\theta)).$$

C'est un triple de $K^{p,q}(D^1,S^o;C)$, donc

$$\eta_2(0) = \varepsilon_{q+1} \quad \text{et} \quad \eta_2(\pi) = -\varepsilon_{q+1}.$$

Considérons l'application

$$\widetilde{GL}^{p,q}(E) \ni \alpha \longmapsto \alpha\varepsilon_{q+1}\alpha^{-1} \in \widetilde{Grad}^{p,q}(E)$$

qui est une fibration de Serre. Il existe donc une fonction continue $\alpha(\theta)\colon [0,\pi] \longrightarrow \widetilde{GL}^{p,q}$ telle que $\alpha(\theta)\ \varepsilon_{q+1}\ \alpha(\theta)^{-1} = \eta_2(\theta)$ et

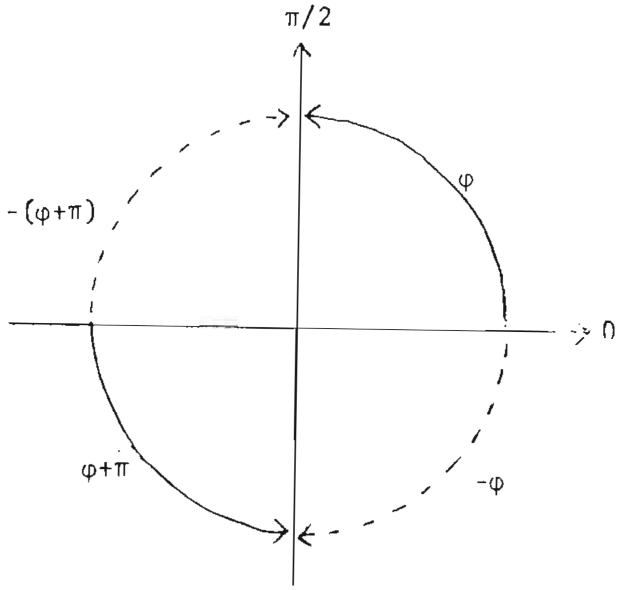
i) $\alpha(0) = Id$

ii) $\alpha(\pi)\varepsilon_{q+1} = -\ \varepsilon_{q+1}\alpha(\pi)$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Utilisons une nouvelle variable , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et définissons une fonction continue β sur S^1 à valeurs dans $GL^{p,q}(E)$ par la formule:

$$\begin{cases} \beta(\varphi) = \alpha(2\varphi) \quad \text{pour} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ \beta(\varphi + \pi) = -\beta(\varphi) \\ \beta(-\varphi) = \varepsilon_{q+1}\, \beta(\varphi)\, \varepsilon_{q+1} \\ \beta(-(\varphi + \pi)) = -\varepsilon_{q+1}\, \beta(\varphi)\, \varepsilon_{q+1} \end{cases}$$



Ecrivons la fonction $\beta(\varphi)$ comme une série de Fourier:

$$\beta(\varphi) = \frac{\alpha_o}{2} + \sum_{n>0} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \text{ (convergence au sens de Cesaro)}$$

où

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2} \beta(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi .$$

En utilisant $\zeta = \cos \varphi + \eta_1\, \varepsilon_{q+1} \sin \varphi$, on a

$$\beta(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n \qquad \text{(convergence au sens de Cesaro)}$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \beta(\varphi)\,\zeta^{-n}d\varphi.$$

Nous allons introduire trois monoides intermédianes $K_A^{p,q}$, $K_P^{p,q}$, $K_L^{p,q}$ (Affines, Polynômes, Laurentiens) et quatre morphismes $t_1,\ldots,t_4$ tels que l'on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
K^{p,q+1}(C) \arrow[rr, "t"] \arrow[d, "t_4"] & & K^{p,q}(D^1,S^o;C) \\
K_A^{p,q} \arrow[r, "t_3"] & K_P^{p,q} \arrow[r, "t_2"] & K_L^{p,q} \arrow[u, "t_1"']
\end{tikzcd}$$

Ensuite, démontrons que chaque $t_1,\ldots,t_4$ sont des isomorphismes d'où le théorème fondamental.

Définition de $K_L^{p,q}$. Considérons

$$(E,\beta) \quad \text{où} \quad E = (E,\, \varepsilon_{q+1}, \eta_1) \in \text{Ob}\ C^{p,q+2}$$

$$\beta(\varphi)\colon S^1 \longrightarrow \text{End}^{p,q}(E)$$

vérifiant

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \beta(0) = 1 \\ \beta(\varphi + \pi) = - \beta(\varphi) \\ \beta(-\varphi) = \varepsilon_{q+1}\, \beta(\varphi)\, \varepsilon_{q+1} \quad (\text{d'où } \beta(\tfrac{\pi}{2})\varepsilon_{q+1} = - \varepsilon_{q+1}\, \beta(\tfrac{\pi}{2})). \end{cases}$$

De plus, on a

$$(\mathrm{L}) \qquad \beta(\varphi) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \zeta^n \quad \text{où} \quad \zeta = \zeta_E = \cos\varphi + \eta_1 \varepsilon_{q+1} \sin\varphi .$$

Définissons

$(E,\beta) \sim (E',\beta')$ s'il existe $G \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^{p,q+2}$ tel que

$\beta \oplus \zeta_{E'} \oplus \zeta_G$ soit homotope à $\zeta_E \oplus \beta' \oplus \zeta_G$ parmi les fonctions vérifiant (L).

Alors,

$$K_L^{p,q} = \frac{\{(E,\beta)\}}{(\sim)} .$$

Définitions de $K_P^{p,q}$, $K_A^{p,q}$ sont les mêmes sauf la condition (L) doit être remplacée par

$$\text{(P)} \qquad \beta(\varphi) = \sum_{n=-1}^{N} a_n \zeta^n$$

ou

$$\text{(A)} \qquad \beta(\varphi) = a_{-1} \zeta^{-1} + a_1\zeta.$$

Remarquons que dans la présentation

$$\beta(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$$

$a_n = 0$ si n est pair. Parce que $\beta(\varphi + \pi) = -\beta(\varphi)$ et

$\zeta^n(\varphi + \pi) = \cos(n\varphi + n\pi) + \eta_1\varepsilon_{q+1} \sin(n\varphi + n\pi) = \zeta^n(\varphi)$ si n est pair.

Définitions de $t_4,\dots,t_1$

$$t_4(E,\eta_1,\eta_2) = (E,\beta(\varphi)) \quad \text{où} \quad \beta(\varphi) = \cos\varphi + \eta_2\, \varepsilon_{q+1} \sin\varphi.$$

En effet,

$$\cos \varphi + \eta_2 \, \varepsilon_{q+1} \sin \varphi = \frac{1-\eta_2\eta_1}{2} \, \zeta^{-1} + \frac{1+\eta_2\eta_1}{2} \, \zeta$$

vérifie (A).

t_3, t_2, t_1 sont les inclusions naturelles.

Nous allons voir e.g. les surjectivités de $t_1,\dots,t_4$.

Surjectivité de t_1.

Soit $(E,\beta(\varphi))$ un élément de $K^{p,q}(D^1,S^o;C)$ au sens du lemme. Soient $\beta(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$ et $S_N(\varphi) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \zeta^n$. Alors $S_N(\varphi)$ converge en norme vers $\beta(\varphi)$. Posons

$$\check{S}_N(\varphi) = S_N(0)^{-1} S_N(\varphi).$$

Alors, $t\check{S}_N(\varphi) + (1-t)\beta(\varphi)$ est inversible pour tout $t \in [0,1]$ si N est grand. Donc, $(E,\beta(\varphi)) = t_1(E,\check{S}_N)$ et $(E,\check{S}_N) \in K_L^{p,q}$.

Surjectivité de t_2.

Soit $(E,\beta(\varphi)) \in K_L^{p,q}$ i.e., $\beta(\varphi) = \sum_{n=-2N-1}^{2N+1} a_n\zeta^n$. Alors,

$$\beta(\varphi) = P\,\zeta^{-2N-1} \quad \text{où} \quad P \text{ est un polynôme en } \zeta.$$

Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} P\zeta^{-2N+1} & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} P\zeta^{-2N-1} & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} & \text{pour} \quad u = 0 \\ \begin{pmatrix} P\zeta^{-2N+1} & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} & \text{pour} \quad u = \pi. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$(E,\beta(\varphi)) \sim (E \oplus E,\ P\zeta^{-2N-1} \oplus \zeta) \underset{-}{\sim} (E,P\zeta^{-2N+1}) + (E,\zeta^{-1}).$$

Par répétition, on a

$$(E,\beta(\varphi)) \sim (E,\ P\zeta^{-1}) + N\cdot(E,\zeta^{-1}) \in K_P^{p,q}\ .$$

Surjectivité de t_3.

Soit $(E,\beta) \in K_p^{p,q}$ où $\beta = a_{-1}\zeta^{-1} + a_1\zeta + a_3\zeta^3 + \ldots + a_{2N-1}\zeta^{2N-1}$.

Considérons un automorphisme de E^{N+1}:

$$L^n(\beta) = \begin{bmatrix} a_{-1} & a_1 & a_3 ,\ldots, & a_{2N-1} \\ -\zeta^2 & 1, & 0 ,\ldots, & 0 \\ 0, & -\zeta^2, & 1 ,\ldots, & 0 \\ 0, & 0, & 0 ,\ldots, -\zeta^2, & 1 \end{bmatrix}$$

Considérons en plus,

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 ,\ldots, & 0 \\ \zeta & 1 ,\ldots, & 0 \\ \zeta^2 & ,\ldots, & 0 \\ \zeta^N & \zeta^{N-1},\ldots,\zeta, & 1 \end{bmatrix}$$

qui est homotope à l'identité de E^{N+1} et

$$L^n(\beta)\zeta^{-1}h = \begin{bmatrix} \beta, & \beta_1 & ,\dots, & \beta_n \\ 0, & \zeta^{-1}, & 0 ,\dots, & 0 \\ 0, & 0, & \zeta^{-1},\dots, & 0 \\ 0, & 0, & 0,\dots, & \zeta^{-1} \end{bmatrix}$$

qui est un automorphisme de E^{N+1}. Donc

$$(E,\beta) + N\cdot(E,\zeta^{-1}) \sim (E^{N+1},\ L^n(\check{\beta})\zeta^{-1})$$

où $\check{M} = M(0)^{-1}M(\varphi)$ est la normalisée de $M(\varphi)$.

Par suite,

$$(E,\beta) \sim (E^{N+1},\ L^n(\check{\beta})\zeta^{-1}) + N\cdot(E^*,\zeta_{E^*}^{-1}) \in K_A^{p,q}$$

où $(E^*,\zeta_{E^*}^{-1}) \sim -\ (E,\zeta^{-1})$ dans $K_A^{p,q}$.

<u>Surjectivité de t_4:</u>

Soit $(E,\beta) \in K_A^{p,q}$ où $\beta = a_{-1}\zeta^{-1} + a_1\zeta$. Ecrivons

$$\beta = a_{-1}\zeta^{-1} + a_1\zeta = \cos\varphi + g\sin\varphi \quad (\text{parce que } \beta(0) = a_{-1} + a_1 = 1).$$

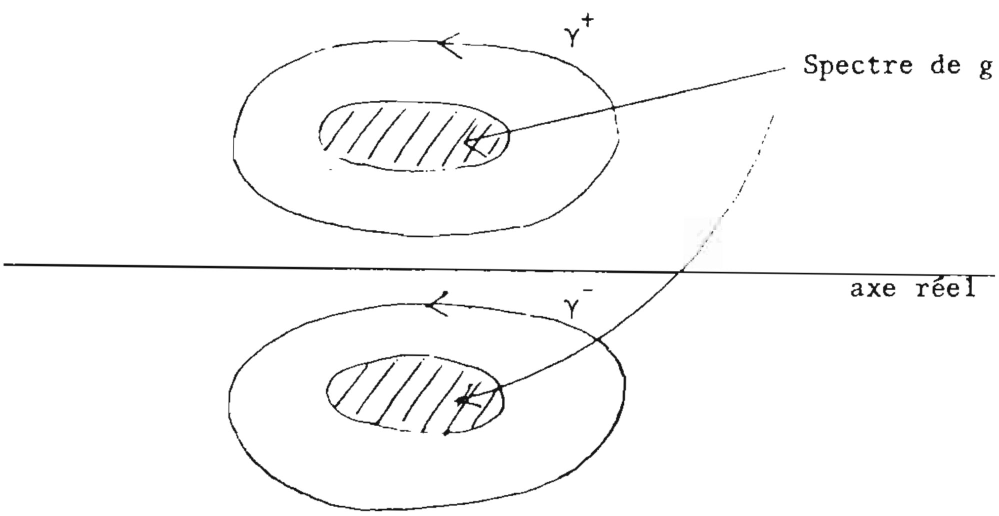
Par définition, $\beta = \beta(\varphi)$ est inversible pour tout φ donc le spectre de $g \in \mathrm{End}^{p,q}(E) \otimes_k \mathbb{C} = A$ est disjoint à l'axe réel i.e.

$$\mathrm{Spec}\, g \cap \mathbb{R} = \phi.$$

Considérons

$$\hat{g} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \frac{i dz}{z - g} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} \frac{(-i)dz}{z - g} \qquad (\text{où} \quad i = \sqrt{-1})$$

dans l'algèbre de Banach A où



Alors,

$$(\hat{g})^2 = -1$$

et si l'on pose $h_t = t\hat{g} + (1-t)g$ pour $0 \leq t \leq 1$, on a,

$$\varepsilon_{q+1}\, h_t\, \varepsilon_{q+1} = -\, h_t$$

$$\mathrm{Spec}\ h_t \cap \mathbb{R} = \phi.$$

Par suite,

$$(E,\beta) \sim (E,\ \cos\varphi + \eta_2\, \varepsilon_{q+1} \sin\varphi) = t_4(E,\eta_1,\eta_2)$$

où $\eta_2 = \hat{g}\, \varepsilon_{q+1}$.

CHAPITRE V

ESPACES CLASSIFIANTS ET K-THEORIES AXIOMATIQUES

I. Espaces classifiants classiques:

Soient X un espace compact, Y une partie fermée de X et A une algèbre de Banach. Posons

$$K^n(X;A) = K^n(C)$$

$$K^n(Y;A) = K^n(C')$$

$$K^n(X,Y;A) = K^n(\varphi)$$

et

$$\partial^{n-1}: \ K^{n-1}(Y,A) \longrightarrow K^n(X,Y;A)$$

où $A(X)$ (resp. $A(Y)$) = l'algèbre des fonctions continues sur X (resp. sur Y) à valeurs dans A.

$$C = P(A(X))$$

$$C' = P(A(Y))$$

et

$\varphi: C \longrightarrow C'$ induite par la restriction des fonctions: $A(X) \longrightarrow A(Y)$.

Dans le Ch.IV, nous avons montré que

$$\{K^n(X,Y;A),\ \partial^{n-1}\}_{n\in Z}$$

est une théorie de la cohomologie généralisée i.e. vérifiant tous les axiomes de Carton-Eilenberg sauf l'axiome de dimension. Le théorème suivant montre que cette théorie est représentable.

<u>THEOREME</u>: (Existence d'espaces classifiants). On a

$$K^n(X;A) \stackrel{\sim}{\sim} \varinjlim_r [X,\ F^n_r(A)] \stackrel{\sim}{\sim} [X,\ \varinjlim_r\ F^n_r(A)]$$

pour un espace compact X,

où $F^n_r(A) = K^n(A) \times \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r)$ avec la topologie discrète sur $K^n(A)$ et $n = p-q$.

<u>Preuve</u>: Définissons les applications:

$$[X,\ K^n(A) \times \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r)] \xrightarrow{\theta_r} K^n(X;A)$$

comme suit:

$$\eta_1(x) = \varepsilon_{q+1}$$

$$\eta_2 : \quad X \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r) = E$$

$$g : \quad X \longrightarrow K^{p,q}(A)$$

π^*g = l'élément de $K^{p,q}(X,A)$ déterminé dans chaque composante connexe $X_i \ni x_i$ par le triple

$$\pi_i^* g(x_i) \qquad \text{où} \quad \pi_i : X \longrightarrow x_i$$

et posons

$$(g,\eta_2) \longmapsto (E,\eta_1,\eta_2) + \pi^*g.$$

Alors, avec l'application naturelle

$$K^n(A) \times \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r) \xrightarrow{\theta_r^{r+1}} K^n(A) \times \mathrm{Grad}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^{r+1})$$

définie par

$$(\xi,\varepsilon) \longmapsto (\xi, \varepsilon \oplus \varepsilon_{q+1})$$

le diagramme

$$\begin{tikzcd} & K^n(X,A) & \\ {[X,F^n_r(A)]} \arrow[ur, "\theta_r"] \arrow[rr, "\theta^{r+1}_{r*}"'] & & {[X, F^n_{r+1}(A)]} \arrow[ul, "\theta_{r+1}"'] \end{tikzcd}$$

devient un système direct et on peut démontrer actualement

$$K^n(X,A) \simeq \varinjlim_r [X,F^n_r(A)].$$

Parce que X est compact, on a de plus

$$\varinjlim_r [X,F^n_r(A)] \simeq [X, \varinjlim_r F^n_r(A)].$$

Remarque: Si l'on pose

$$F^n(A) = \varinjlim_r F^n_r(A),$$

c'est un spectre pour la K-théorie $K^n(\ ;A)$ i.e., il existe une équivalence d'homotopie:

$$h: F^n(A) \longrightarrow \Omega F^{n+1}(A).$$

De plus, on peut écrire h de manière explicite au moyen de l'homomorphisme t défini dans le Ch. IV, §VII.

<u>Table</u> de $F^n(A)$ (aux composants connexes près)

n	$C^n = C^{n,0}$	$F^n(A)$	$A = \mathbb{R}$	$K^n(\mathbb{R})$
0	$\mathbb{R}$	$B_{GL}(A)$	BO	$\mathbb{Z}$
1	$\mathbb{C}$	$GL(A_{\mathbb{C}})/GL(A)$	U/O	0
2	$\mathbb{H}$	$GL(A_{\mathbb{H}})/GL(A_{\mathbb{C}})$	S_p/U	0
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$GL(A_{\mathbb{H}})$	S_p	0
4	$\mathbb{H}(2)$	$B_{GL}(A_{\mathbb{H}})$	B_{S_p}	$\mathbb{Z}$
5	$\mathbb{C}(4)$	$GL(A_{\mathbb{C}})/GL(A_{\mathbb{H}})$	U/S_p	0
6	$\mathbb{R}(8)$	$GL(A)/GL(A_{\mathbb{C}})$	O/U	0
7	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$GL(A)$	O	0

où

$$A_{\mathbb{C}} = A \otimes_R \mathbb{C}$$

$$A_{\mathbb{H}} = A \otimes_R \mathbb{H}$$

$$GL(A) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ r}} GL(A,r).$$

Dans la table, on a utilisé l'application

$$A_{\mathbb{C}} \longrightarrow A(2)$$

définie par

$$x + iy \longmapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

II. Algèbres de Banach stables

Si X est un espace paracompact, l'isomorphisme

$$\lim_{\substack{\to \\ r}} \ [X, F_r^n(A)] \overset{\sim}{\sim} [X, \lim_{\substack{\to \\ r}} F_r^n(A)]$$

aura lieu si A est une algèbre de Banach stable définie comme suit:

Définition:

Une algèbre de Banach A est dite quasi-stable si l'application

$$GL(A,n) \longrightarrow GL(A,n+1)$$

définie par

$$M \longmapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

induit une équivalence d'homotopie pour n assez grand. Une algèbre de Banach A est dite <u>stable</u> si A, $A_{\mathbb{C}}$ et $A_{\mathbb{H}}$ sont quasi-stables.

Proposition:

Si A est une algèbre de Banach stable, alors

$$\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^{r+1})$$

définie par

$$\varepsilon \longmapsto \varepsilon \otimes \varepsilon_{q+1}$$

est une équivalence d'homotopie pour r assez grand.

Preuve:

Considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{GL}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{GL}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^{r+1}) \arrow[d] \\
\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r) \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^{r+1}).
\end{tikzcd}$$

On a des isomorphismes de groupes d'homotopie, si r est assez grand:

$$\pi_i(\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^r) \xrightarrow{\sim} \pi_i(\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(C^{p,q+1} \otimes A^{r+1}))$$

d'où l'équivalence d'homotopie par un théorème de J.H.C. Whitehead.

Par suite, si A est stable, on a

$$\varinjlim_r [X,F^n_r(A)] \simeq \varinjlim_r [X,F^n_s(A)] = [X, \varinjlim_r F^n_s(A)]$$

$$\simeq [X, \varinjlim_r F^n_r(A)]$$

pour un s assez grand, i.e. la K-théorie $K^n(X;A)$ est représentable pour X paracompact, A stable.

<u>THEOREME</u>:

Si A est une algèbre de Banach stable et X est un espace paracompact, on a

$$K^n(X;A) \simeq K^{n+1}(X \times D^1, X \times S^o;A).$$

<u>Preuve</u>:

On a, pour A stable

$$K^n(X;A) = [X, F^n(A)]$$

et

$$K^{n+1}(X \times D^1, X \times S^o;A) = [X, \Omega F^{n+1}(A)].$$

Or, $F^n \xrightarrow{h} \Omega F^{n+1}$ est une équivalence d'homotopie, d'où

$$K^n(X;A) = K^{n+1}(X \times D^1, X \times S^o;A).$$

Exemples d'algèbres de Banach stables.

1) Soit H un espace d'Hilbert. Alors, l'algèbre de Banach

$$A = \text{End } H/K$$

où K est l'idéal des opérateurs compacts est stable (Voir §IV). Par suite

$$K^n(X) = K^{n-1}(X,A)$$

est une bonne définition de K-théorie pour X paracompact.

2) Pour toute algèbre de Banach A, son stabilisé $\tilde{A}$ défini dans le Ch.II, §I est stable.

6

III. K-théorie de la catégorie des algèbres de Banach

Comme une application du Chapitre IV, nous allons formuler la K-théorie pour la catégorie K des algèbres de Banach sur le corps $k(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Bien entendu, c'est un cas particulier de K-théories mentionnées dans le Ch.II, §V et §VI.

THEOREME 1:

Soit K = la catégorie des algèbres de Banach sur $k(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Alors il existe une seule suite $\{K^n\}_{n\leq 0}$ des foncteurs sur K à valeurs dans Ab. telle que

1) $K^o(A) = K(A)$

2) (Exactitude) Pour toute fibration $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ (i.e. une suite exacte), on a une suite exacte:

$$\longrightarrow K^{n-1}(A) \longrightarrow K^{n-1}(A^n) \longrightarrow K^n(A') \longrightarrow K^n(A) \longrightarrow \ldots \longrightarrow K^o(A'').$$

3) (Homotopie) Si A est contractile, alors

$$K^n(A) = 0 \qquad \text{pour tout } n \leq 0.$$

Preuve:

Pour une algèbre de Banach unitaire (i.e. ayant un élément unité), on pose

$$K^n(A) = K^n(L(A)).$$

Pour une algèbre de Banach A non unitaire, soit A l'algèbre augumentée (Ch.II, §III) avec ε: $A^+ \longrightarrow k$, on pose alors

$$K^n(A) = \text{Ker}\ (K^n(A^+) \longrightarrow K^n(k)).$$

Vérifions e.g. 3). Soient $A \underset{f_1}{\overset{f_o}{\rightrightarrows}} B$ deux applications homotopiques où A, B sont unitaires. Démontrons d'abord que

$$f_o^* = f_1^* : K^n(A) \longrightarrow K^n(B).$$

Il suffit de supposer que f_o, f_1 sont topologiquement homotopiques i.e. il existe f: $A \longrightarrow B(I)$ tel que

$$A \xrightarrow{f} B(I) \begin{array}{l} \xrightarrow{p_o} B \\ \xrightarrow[p_1]{} B \end{array} \qquad p_o f = f_o \quad \text{et} \quad p_1 f = f_1.$$

où pour $\alpha: I \longrightarrow B$, $p_t(\alpha) = \alpha(t)$, $t \in I$.

Considérons un élément

$$x = (C^{p,q} \otimes A^r; \eta, \zeta) \in K^{p,q}(L(A)).$$

Pour $g: A \longrightarrow B$, on a

$$g^*(x) = (C^{p,q} \otimes B^r;\ g(\eta),\ g(\zeta))$$

donc

$$f_t^*(x) = (C^{p,q} \otimes B^r;\ f_t(\eta), f_t(\zeta)) \quad \text{où} \quad f_t = p_t f \quad \text{pour } t \in I.$$

Par suite, $f_o(\eta)$ (resp. $f_o(\zeta)$) est homotope à $f_1(\eta)$(resp. $f_1(\zeta)$), d'où

$$f_o^*(x) = f_1^*(x) \quad \text{dans} \quad K^{p,q}(B).$$

Si A et B ne sont pas nécessairement unitaires, le même résultat subsiste: $f_o, f_1: A \rightrightarrows B$ homotopiques $\Rightarrow f_o^* = f_1^*$.

Supposons maintenant A est contractile i.e. $Id_A \sim 0$ (homotope à 0). En considérant

$$A \overset{1_A}{\longrightarrow} A$$
$$\longrightarrow 0 \longrightarrow$$

on a $K^n(A) = 0$ parce que $K^n(0) = 0$.

THEOREME 2:

On a des isomorphismes

$K^n \approx K^{n+8}$ si $k = \mathbb{R}$

$K^n \approx K^{n+2}$ si $k = \mathbb{C}$.

Preuve:

Conséquence immédiate de la définition et le théorème de périodicité du Ch.IV, §II.

THEOREME 3:

Soit $\mathcal{K}$ = la catégorie des algèbres de Banach sur k(= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors il existe une seule suite $\{K^n\}_{n \geq 0}$ de foncteurs de $\mathcal{K}$ à valeurs dans Ab telle que

1) $K^o(A) = K(A)$

2) Exactitude, même que 2) du théorème 1.

3) $K^n(A) = 0$ si A est flasque

4) $A \longrightarrow \tilde{A}$ (stabilisé) induit un isomorphisme $K^n(A) \xrightarrow{\sim} K^n(\tilde{A})$.

Preuve:

On va définir $K^n(A)$ même manière que pour $n \leq 0$ i.e.,

$$K^n(A) = K^n(L(A)) \quad \text{si A est unitaire}$$

$$K^n(A) = \mathrm{Ker}\ (K^n(A^+) \longrightarrow K^n(k)) \quad \text{si A n'est pas unitaire.}$$

Vérifions e.g. 3). Il suffit de montrer que

$K^n(C) = 0$ si C est une catégorie flasque (Ch.III, §IV). i.e. il existe un foncteur $\tau: C \longrightarrow C$ tel que $\tau \oplus \mathrm{Id}_C \simeq \tau$. Soit

$$x = (E,\eta_1,\eta_2) \in K^{p,q}(C), \qquad n = p - q.$$

Considérons

$$\tau(x) = (\tau(E),\ \tau(\eta_1),\ \tau(\eta_2)) \in K^{p,q}(C).$$

On a alors

$$x + \tau(x) = \tau(x) \qquad \text{dans} \quad K^{p,q}(C)$$

d'où $x = 0$.

IV. Utilisation des opérateurs de Fredholm

Définition:

Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Un opérateur linéaire $D: H \longrightarrow H$ est dit de Fredholm si

$$\dim \operatorname{Ker} D < +\infty \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Coker} D < +\infty.$$

Soit $F(H)$ = l'ensemble des opérateurs de Fredholm $\subset$ End (H) topologiesé par la norme uniforme

Une relation avec la K-théorie est donnée par

THEOREME (Jänich-Atiyah).

$F(H)$ est un espace classifiant pour $K(X)$, X compact, i.e.,

$$K(X) \stackrel{\sim}{\sim} [X, F(H)].$$

On sait:

<u>THEOREME</u> (classique):

D est un opérateur de Fredholm si et seulement s'il existe un opérateur D' tel que DD' - 1 et D'D - 1 sont des opérateurs compacts.

En utilisant ce théorème, on peut écrire l'espace $F(H)$ comme suit: Soit

$$A = \text{End } H/K$$

où K est l'idéal des opérateurs compacts. Soit

$$\varphi\colon \text{End } H \longrightarrow A$$

la projection canonique. Alors, on a

$$F(H) = \varphi^{-1}(A^*)$$

où $A^* = GL(A,1)$ = les éléments inversibles de A.

Une conséquence de cette considération est que $GL(A,1)$ est aussi un espace classifiant pour $K(X)$ parce que on a une fibration $F(H) \longrightarrow GL(A,1)$ de fibre K qui est contractile.

De plus, on a

THEOREME

$$A = \mathrm{End}\, H/K$$

est une algèbre de Banach stable.

Preuve:

D'après le théorème de Jänich-Atiyah, on a

$$\begin{tikzcd}
K(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\wr"'] & {[X, F(H)]} \arrow[d] \\
 & {[X, F(H \oplus H)]}
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est donnée par

$$F(H) \ni D \longmapsto D \oplus 1 \in F(H \oplus H).$$

Donc, on a

$$[X, F(H)] \xrightarrow{\sim} [X, F(H \oplus H)].$$

D'après l'existence de fibrations à fibres contractiles:

$$F(H) \longrightarrow GL(A,1) \quad \text{et} \quad F(H \oplus H) \longrightarrow GL(A,2)$$

on a,

$$[X, GL(A,1)] \xrightarrow{\sim} [X,F(H)] \xrightarrow{\sim} [X, F(H \oplus H)] \xrightarrow{\sim} [X,GL(A,2)].$$

qui est induite par

$$GL(A,1) \ni a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(A,2).$$

Plus généralement, on a

$$[X, GL(A,n)] \xrightarrow{\sim} [X, GL(A,n+1)].$$

Donc, en particulier

$$\pi_i(GL(A,n)) \xrightarrow{\sim} \pi_i(GL(A,n+1)),$$

d'où, d'après un théorème de J.H.C. Whitehead, on a une équivalence d'homotopie:

$$GL(A,n) \sim GL(A,n+1).$$

V. Filtrations de catégories de Banach.

Considérons deux catégories de Banach

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}.$$

Utilisons les notations suivantes:

$\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \ldots,$ objets de $\mathcal{D}$

$E, F, G, \ldots,$ objets de $\mathcal{C}$

$(s,p): \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ dit morphisme direct dans $\mathcal{D}$

où $s: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ et $p: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$ tels que $ps = Id_{\mathbb{E}}$.

Définition:

Soit $\mathbb{E} \in Ob\, \mathcal{D}$. Une $\mathcal{C}$-filtration de $\mathbb{E}$ est la donnée de $E_i \in Ob\, \mathcal{C}$ et morphismes directs $(s_i,p_i): E_i \longrightarrow \mathbb{E}$ vérifiant l'axiome:

F.1: Pour tout i,j il existe k tel que on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{E} & \\
 & E_k \arrow[u] & \\
E_i \arrow[uur] \arrow[ur] & & E_j \arrow[uul] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Définition:

La catégorie $\mathcal{D}$ est dite C-filtrée si pour tout objet $\mathbb{E}$ de $\mathcal{D}$, une C-filtration $(s_i, p_i): E_i \longrightarrow \mathbb{E}$ est donnée de telle façon que les axiomes F.2 - F.4 sont vérifiés:

F.2: Soient $F \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ et $f: \mathbb{E} \longrightarrow F$ dans $\mathcal{D}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_i: E_i \longrightarrow F$ dans $\mathcal{C}$ tels que

$$||f - f_i p_i|| < \varepsilon$$

i.e.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_i"'] & & F \\ & E_i \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

commute à ε près.

F.3 (dual de F.2) Soient $E \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ et $g: E \longrightarrow \mathbb{E}$ dans $\mathcal{D}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_j: E \longrightarrow E_j$ dans $\mathcal{C}$ tels que

$$||g - s_j g_j|| < \varepsilon$$

i.e.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g_j"'] & & \mathbb{E} \\ & E_j \arrow[ur, "s_j"'] & \end{tikzcd}$$

commute à ε près.

F.4: Pour deux objets $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ de $\mathcal{D}$, la C-filtration de $\mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$ est équivalente à la C-filtration:

$$(s_i,p_i) \oplus (s_j',p_j'): E_i \oplus E_j \longrightarrow \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}.$$

i.e. pour tout k, il existe i,j tels que

$$\begin{tikzcd} G_k \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & \mathbb{E} \oplus \mathbb{F} \\ & E_i \oplus E_j \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et pour tout i,j il existe ℓ tel que

$$\begin{tikzcd}
E_i \oplus E_j \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & \mathbb{E} \oplus \mathbb{F} \\
& G_\ell \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Exemples:

1) $\mathcal{C} = \mathcal{E}$ = la catégorie des espaces vectoriels de dimension fini

$\mathcal{D} = \mathcal{H}$ = la catégorie des espaces de Hilbert

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[d, shift right, "p_i"'] \\
E_i \arrow[u, shift right, "s_i"']
\end{tikzcd}$$

un espace de Hilbert

où $s_i: E_i \longrightarrow \mathbb{E}$ inclusion

$p_i: \mathbb{E} \longrightarrow E_i$ projection orthogonale.

2) Si $\mathcal{D}$ est $\mathcal{C}$-filtrée, alors la catégorie $\mathcal{D}_T(X)$ des fibrés triviaux sur un espace compact X est $\mathcal{C}_T(X)$-filtrée.

3) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach quelconque. Définissons deux catégories $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}'$ de sorte que

i) $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}'$ est $\mathcal{C}'$-filtrée.

ii) $\mathcal{C}'$ est équivalente à $\mathcal{C}$

iii) $\mathcal{C}_1$ est flasque.

Définition de C_1:

Ob C_1: une suite $(E^1,E^2,E^3,\ldots,)$ où $E^i \in \text{Ob } C$ et il y a un nombre fini d'objets distincts parmi E^1, E^2, $E^3,\ldots,$.

Morphisme dans C_1:

$$(E^1,E^2,E^3,\ldots,) \xrightarrow{f} (F^1,F^2,F^3,\ldots,)$$

est une matrice $f = (f_{ji})$ où $f_{ji} \in C\ (E^i,E^j)$ telle que

$$||f|| = \sup_i \sum_j ||f_{ji}|| < +\infty .$$

Définition de C'.

La sous-catégorie pleine de C_1 dont les objets sont les suites finies i.e.

$$(E^1,E^2,\ldots,E^n,0,0,\ldots,) .$$

Vérification de i) C_1 est C'-filtrée.

Définissons une C'-filtration pour

$$\mathbf{E} = (E^1,E^2,E^3,\ldots,) \in \text{Ob } C_1.$$

comme suit:

$$E_i = (E^1, E^2, \ldots, E^i, 0, 0, 0, \ldots,) \in \mathrm{Ob}\, C'$$

$$s_i\colon\ E_i \longrightarrow \mathbb{E} \quad \text{injection canonique}$$

$$p_i\colon\ \mathbb{E} \longrightarrow E_i \quad \text{projection canonique.}$$

Vérification de ii) $C' \sim C$ (équivalence de catégories)

Définissons $\theta\colon\ C \longrightarrow C'$ par

$$\theta(E) = (E, 0, 0, \ldots,) \in \mathrm{Ob}\, C'.$$

Alors θ est pleinement fidèle et essentielement surjectif e.g.

$$(E^1, E^2, \ldots, E^n, 0, 0, \ldots,) \overset{\sim}{\sim} (E^1 \oplus \ldots \oplus E^n, 0, 0, \ldots,) \quad \text{dans} \quad C'.$$

Vérification de iii) C_1 est flasque.

Pour $\mathbb{E} = (E^1, E^2, E^3, \ldots,) \in \mathrm{Ob}\, C_1$, définissons

$$\tau(\mathbb{E}) = \mathbb{E} \oplus \mathbb{E} \oplus \mathbb{E} \oplus \ldots \qquad \text{(somme dénombrable)}$$

et pour $f\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, $\tau(f) = f \oplus f \oplus f \oplus \ldots$. Alors, on a

$$\tau \oplus \mathrm{Id}_{C_1} \overset{\sim}{\sim} \tau.$$

VI. Suites exactes et résolutions de catégories de Banach.

Définition:

Soient $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$ deux catégories de Banach telles que $\mathcal{D}$ est $\mathcal{C}$-filtrée. Un morphisme $k: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ de $\mathcal{D}$ est dit complètement continu (par rapport à cette $\mathcal{C}$-filtration) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $F_i \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $s_i: F_i \longrightarrow \mathbb{F}$ et $k_i: \mathbb{E} \longrightarrow F_i$ tels que le diagramme:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "k_i"'] & & \mathbb{F} \\ & F_i \arrow[ur, "s_i"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif à ε près, i.e. $||k - s_i k_i|| < \varepsilon$.

Remarque: $k: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ est complètement continu

$\Longleftrightarrow$ Existence d'un diagramme commutatif à ε près:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "p_j"'] & & \mathbb{F} \\ & E_j \arrow[ur, "\ell_j"'] & \end{tikzcd}$$

$\Longleftrightarrow$ Existence d'un diagramme commutatif à ε près:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p_j"'] & \mathbb{F} \\
E_j \arrow[r, "k_{ji}"'] & F_i \arrow[u, "s_i"']
\end{tikzcd}$$

<u>Notation</u>:

$\mathcal{K}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ = l'ensemble des morphismes complètement continus.

<u>Proposition</u>:

Si $k\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ est complètement continu et si $f\colon \mathbb{E}' \longrightarrow \mathbb{E}$, $g\colon \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}'$ sont des morphismes de $\mathcal{D}$, les morphismes $kf\colon \mathbb{E}' \longrightarrow \mathbb{F}$ et $gk\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}'$ sont aussi complètement continus i.e., $\mathcal{K}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est un idéal dans $\mathcal{D}$.

<u>Définition</u>: de la catégorie quotient $\mathcal{D}/\mathcal{C}$.

$$\mathrm{Ob}\ \mathcal{D}/\mathcal{C} = \mathrm{Ob}\ \mathcal{D},$$

$$\mathcal{D}/\mathcal{C}\ (\mathbb{E},\mathbb{F}) = \mathcal{D}(\mathbb{E},\mathbb{F})/\mathcal{K}(\mathbb{E},\mathbb{F}).$$

Définition:

Une suite

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{\theta} \mathcal{C} \xrightarrow{\chi} \mathcal{C}''$$

est dite exacte si

1) $\mathcal{C}$ est $\theta(\mathcal{C}')$-filtrée.

2) $\mathrm{Ker}\ (\mathcal{C}(\mathbb{E},\mathbb{F}) \longrightarrow \mathcal{C}''(\chi\mathbb{E},\chi\mathbb{F})) = \mathcal{K}(\mathbb{E},\mathbb{F})$

3) θ et χ sont des foncteurs de Serre.

Exemple:

Si $\mathcal{D}$ est $\mathcal{C}$-filtrée, alors la suite

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$$

est exacte.

On dit aussi la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C} \longrightarrow 0$$

est exacte.

<u>THEOREME</u> (d'exactitude) Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\theta} \mathcal{D} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}/\mathcal{C} \longrightarrow 0$$

une suite exacte. Alors, on a une suite exacte:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & K^{n-1}(\mathcal{D}) \arrow[r] & K^{n-1}(\mathcal{D}/\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[dr] & K^{n}(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\wr"] & K^{n}(\mathcal{D}) \arrow[r] & K^{n}(\mathcal{D}/\mathcal{C}) \arrow[r] & {} \\
 & & & K^{n}(\varphi) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

<u>Preuve</u>:

Définissons deux applications $K^n(C) \longrightarrow K^n(\varphi)$ et $K^n(\varphi) \longrightarrow K^n(C)$ qui sont inverses l'une l'autre.

Définition de $K^n(C) \longrightarrow K^n(\varphi)$.

Soit $(E,\eta_1,\eta_2) \in K^{p,q}(C)$ où $n = p-q$. Considérons $(\theta(E), \theta(\eta_1), \theta(\eta_2))$. Alors $\varphi\theta(\eta_1) = \varphi\theta(\eta_2) = 0$ d'où

$$(\theta(E),\ \theta(\eta_1),\ \theta(\eta_2)) \in K^{p,q}(\varphi).$$

Définition de $K^n(\varphi) \longrightarrow K^n(C)$.

Soit $(C^{p,q+1} \otimes F, \eta_1, \eta_2) \in K^{p,q}(\varphi)$ où $\eta_1 = \varepsilon_{q+1}$ et $\varphi(\eta_1) = \varphi(\eta_2)$. Posons $\zeta = \eta_1 - \eta_2$. Alors $\varphi(\zeta) = 0$ i.e. ζ est complètement continu. Prenons ε-approximation ζ_i de ζ dans $\mathrm{End}(C^{p,q+1} \otimes F_i)$:

$$\begin{array}{ccc} C^{p,q+1} \otimes F & \xrightarrow{\zeta} & C^{p,q+1} \otimes F \\ \downarrow & & \uparrow \\ C^{p,q+1} \otimes F_i & \xrightarrow[\zeta_i]{} & C^{p,q+1} \otimes F_i \end{array}$$

où $F_i \in \mathrm{Ob}\ C$.

Soient

$$\eta_1' = \varepsilon_{q+1} \quad \text{et} \quad \eta_2' = \eta_1' + \zeta_i.$$

Définissons

$$(C^{p,q+1} \otimes F_i,\ \eta_1',\ \eta_2') \in K^n(C)$$

comme l'image de $(C^{p,q+1} \otimes F, \eta_1, \eta_2)$.

D'après l'exemple 3) du §V, il existe toujours une résolution flasque d'une catégorie de Banach C quelconque:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow \dots$$

où chaque C_i est flasque.

<u>Définition</u>:

La <u>suspension</u> SC d'une catégorie de Banach C est définie par une suite exacte:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow C_1 \longrightarrow SC \longrightarrow 0$$

où C_1 est flasque. Plus généralement, pour une résolution flasque de C:

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\theta_1} C_1 \xrightarrow{\theta_2} C_2 \xrightarrow{\theta_3} C_3 \xrightarrow{\theta_4} \dots$$

on a $S^nC = S(S^{n-1}C) = C_n/\theta_n(C_{n-1})$.

D'après le théorème d'exactitude, on a

$$K^n(C) \simeq K(S^n C).$$

Remarque:

Si $C = L(A)$, on peut démontrer

$\tilde{C}_1 \simeq P(CA)$ où CA est la cône de A

$\widetilde{SC} \simeq P(SA)$ où SA est la suspension de A définies dans le Ch.II, §1.

Vérification de $\tilde{C}_1 = P(CA)$.

Considérons le foncteur $L(CA) \longrightarrow C_1$ défini par

$$(CA)^n \longmapsto (A^n, A^n, A^n, \ldots,) = B_n$$

$$CA(n,m) \ni f \longmapsto \text{transformation } B_n \longrightarrow B_m$$

Par définition, c'est un foncteur pleinement fidèle et tout objet de C_1 est un foncteur direct d'un B_n. Donc,

$$P(CA) = \widetilde{L(CA)} = \tilde{C}_1.$$

VII. Construction de $K^{p,q}$ à l'aide d'opérateurs de Fredholm

Considérons la suite exacte:

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow \check{H} \longrightarrow 0$$

de l'exemple 1) de §V avec H flasque et $\check{H} = H/E$. Pour un espace compact X, la suite

$$0 \longrightarrow E_T(X) \longrightarrow H_T(X) \longrightarrow \check{H}_T(X) \longrightarrow 0$$

est aussi exacte. Donc, d'après le théorème d'exactitude (§VI), on a

$$K^{n-1}(X,\check{H}) = K^{n-1}(\check{H}_T(X)) \simeq K^n(E_T(X)) = K^n(X).$$

Remarque:

Pour un espace paracompact X, on peut définir $K^n(X)$ par $K^{n-1}(\check{H}_T(X))$.

Nous allons construire les groupes $K^{p,q}(X)$ à l'aide d'opérateurs de Fredholm:

Définition:

Soit X un espace compact. Considérons les paires:

(E,D) où E est un fibré hilbertion de $C^{p,q}$-module gradué i.e. $C^{p,q+1}$-module. $D: E \longrightarrow E$ est une famille continue d'opérateurs de Fredholm $D_x: E_x \longrightarrow E_x$ $(x \in X)$ telle que

$$D^* = D \qquad \text{autoadjoint}$$

$$De_i = - e_i D \qquad i = 1,2,\dots,p+q+1.$$

On dit que deux paires sont homotopiques:

$$(E,D) \sim (E',D')$$

s'il existe une paire $(\mathbb{E},\mathbb{D})$ sur $X \times I$ avec projections (E,D) et (E',D'). Finalement,

$\overline{K}^{p,q}(X)$ = le groupe de Grothendieck du monoide engendré par les classes d'équivalence homotopique des paires (E,D).

Notation:

$\sigma(E,D) \in \overline{K}^{p,q}(X)$ déterminé par la paire (E,D).

Lemme 1:

Si D est inversible, alors $\sigma(E,D) = 0$.

Preuve: Posons

$$E' = E \oplus E \oplus \ldots \qquad \text{somme dénombrable}$$

$$D' = D \oplus D \oplus \ldots$$

Comme D est inversible, D' est aussi une famille d'opérateurs de Fredholm de sorte que (E',D') est aussi une paire et

$$(E,D) + (E',D') = (E',D')$$

d'où $\sigma(E,D) = 0$.

Lemme 2:

Soit (E,D) une paire. Il existe une paire (F,Δ) avec Δ inversible et une graduation η_1' de $C^{p,q+1}$-module $E \oplus F$.

Preuve: Posons

$$F = \overline{E} \oplus E \oplus \overline{E} \oplus E \oplus \ldots \ .$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus$$

Alors,

$$E \oplus F = E \oplus \overline{E} \oplus E \oplus \overline{E} \oplus \dots$$

et

$$\eta_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \qquad \text{sur } E \oplus F$$

est une graduation de $C^{p,q+1}$-module $E \oplus F$.

Nous allons définir une application

$$\vec{K}^{p,q}(X) \longrightarrow K^{p,q\ 1}(X;\check{H}) \simeq K^{p,q}(X).$$

On peut démontrer que c'est un isomorphisme.

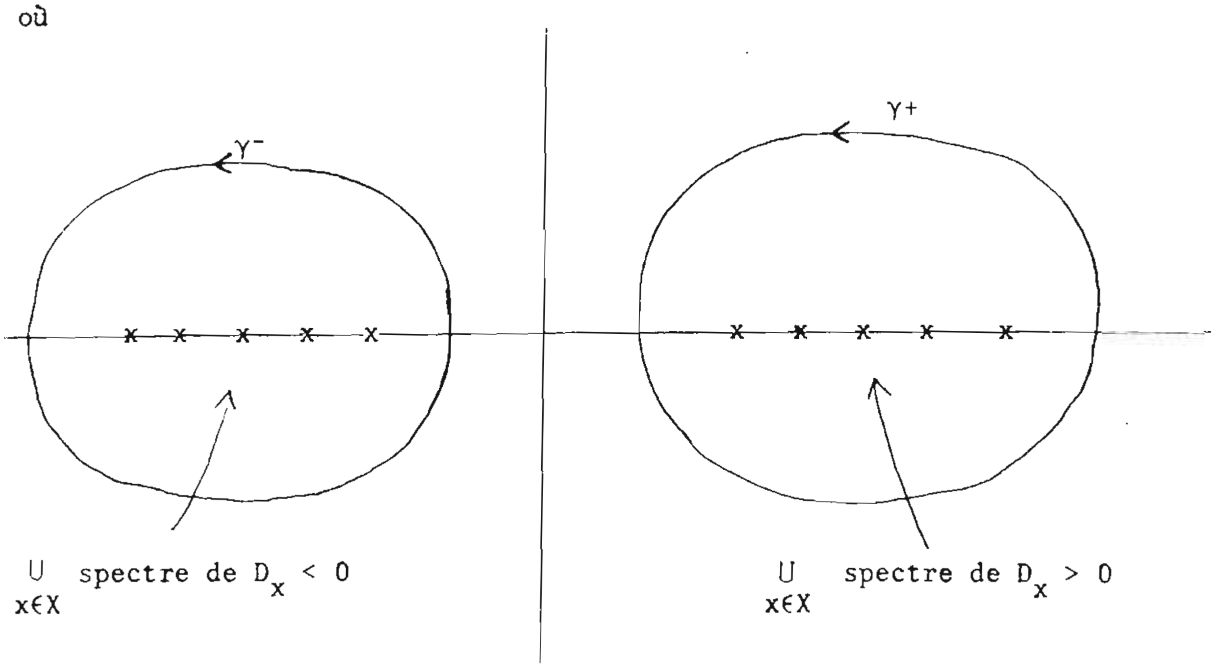
<u>Définition</u> de $\vec{K}^{p,q}(X) \longrightarrow K^{p,q\ 1}(X;\check{H})$.

Soit $\sigma(E,D) \in \vec{K}^{p,q}(X)$. D'après le lemme 2, on peut supposer que E possède une graduation η_1' de $C^{p,q+1}$-module. Par définition, D_x

est un opérateur autoadjoint, donc son spectre est contenu dans l'axe réel. De plus, D_x est un opérateur de Fredholm donc 0 n'est pas dans le spectre de D_x, parce que D_x est inversible modulo les opérateurs compacts (Le théorème classique cité dans §IV). Donc, on peut déformer $\check{D}$ (l'image de D) en une graduation de $\check{E}$ (l'image de E dans $\check{H}$):

$$\eta_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+} \frac{dz}{z - \check{D}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} \frac{dz}{z - \check{D}}$$

où



Finalement, l'image de $\sigma(E,\check{D})$ est

$$(E,\eta_1,\eta_2) \in K^{p,q+1}(X,\check{H})$$

où $\eta_1 = \check{\eta}_1'$ et η_2 défini en haut.

Remarque:

L'isomorphisme $\overline{K}^{p,q}(X) \xrightarrow{\sim} K^{p,q}(X)$ contient le théorème de Jänich-Atiyah (§IV). Parce que

$$K(X) = K^{0,0}(X)$$

et

$$\overline{K}^{0,0}(X) = [X,F(H)]$$

par définition, où H est un espace de Hilbert de dimension infinie.

CHAPITRE VI

K-THEORIE A COEFFICIENTS LOCAUX

I. Groupes de Brauer gradués

On notera k l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appellera algèbre centrale simple une k-algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée $A = A^o \oplus A^1$, de dimension finie, unitaire, dont les seuls éléments du centre qui soient de degré 0 sont les scalaires ($Z(A) \cap A^o = k$), et dont les seuls idéaux gradués soient $\{0\}$ ou A.

Exemples:

1°) Soit $E = E^o \oplus E^1$ un k-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué. Graduons la k-algèbre A = End E en prenant pour A^o (resp. A^1) l'ensemble des endomorphismes $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$) qui conservent (resp. échangent E^o et E^1: A est centrale simple.

2°) Les algèbres de Clifford $C^{p,q}$ (resp. $C^{p,q} \underset{R}{\otimes} C$) sont centrales simples sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

3°) Si A et B sont deux algèbres centrales simples, il en est encore de même de leur produit tensoriel gradué $A \hat{\otimes} B$.

Définition:

On dira que deux k-algèbres centrales simples A et A' sont "équivalentes" s'il existe deux k-espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués E et E' tels que $A \hat{\otimes} \text{End } E$ et $A' \hat{\otimes} \text{End } E'$ soient isomorphes. On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des classes d'isomorphie de k-algèbres centrales simples. Soit GBr(k) l'ensemble quotient. Le produit tensoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\hat{\otimes}$ passe aux quotients et définit sur GBr(k) une structure de groupe abélien qu'on appelle le <u>groupe de Brauer gradué de k</u>; il est en effet clair que la loi obtenue sur le quotient est associative et commutative; par ailleurs $A \hat{\otimes} A^{\text{opposé}} \cong \text{End}_k A$ ($\text{End}_k A$ désignant les endomorphismes d'espace vectoriel, et non d'algèbre), ce qui prouve que la classe d'équivalence de $A^{\text{opposé}}$ est inverse de celle de A dans GBr(k).

<u>THEOREME</u>: (Wall)

(1) $GBr(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_8$, et est engendré par les algèbres de Clifford réelles, la classe de $C^{p,q}$ dans $GBr(\mathbb{R})$ étant p-q (mod 8).

(2) $GBr(C) = \mathbb{Z}_2$, et est engendré par les algèbres de Clifford complexes, la classe de $C^{p,q} \underset{R}{\otimes} \mathbb{C}$ dans $GBr(\mathbb{C})$ étant p-q (mod 2).

Plus généralement soit X un espace topologique. Considérons les fibrés $\mathcal{A} \longrightarrow X$ en k-algèbres centrales simples. [Par exemple, si $E = E^o \oplus E^1$ est un fibré vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, de dimension finie, de base X, et si END(E) le fibré en endomorphismes $(\mathrm{END}(E))_x = \mathrm{End}(E_x)$ $\forall x \in X$, END(E) est un tel fibré]. Deux tels fibrés $\mathcal{A} \longrightarrow X$ et $\mathcal{A}' \longrightarrow X$ en k-algèbres centrales simples seront dits "équivalents" s'il existe deux k-fibrés vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués de dimension finie $E \longrightarrow X$ et $E' \longrightarrow X$ tels que

$$\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathrm{END}(E) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}' \hat{\otimes} \mathrm{END}(E')$$

soient isomorphes. On note GBr(X) l'ensemble des classes d'équivalence: c'est un groupe pour le produit tensoriel gradué $\hat{\otimes}$ des fibrés en algèbres graduées. Plus précisément, on notera GBrO(X) et GBr U(X) les groupes correspondant respectivement à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. [On a évidemment $\mathrm{GBr}\ O(p^t) = \mathrm{GBr}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GBr}\ U(p^t) = \mathrm{GBr}(\mathbb{C})$].

THEOREME [7]:

Si X est un C.W. complexe fini connexe,

$$\mathrm{GBr}\ O(X) = \mathbb{Z}_8 \times H^1(X,\mathbb{Z}_2) \times H^2(X,\mathbb{Z}_2)$$

$$\mathrm{GBr}\ U(X) = \mathbb{Z}_2 \times H^1(X,\mathbb{Z}_2) \times \text{Torsion } H^3(X,\mathbb{Z}).$$

<u>Attention</u>:

La loi de groupe n'est pas le produit direct; pour GBr O(X) par exemple, elle est donnée par:

$$(\lambda, W_1, W_2)(\lambda', W_1', W_2') = (\lambda + \lambda', W_1 + W_1', W_1W_1' + W_2 + W_2').$$

D'autre part, la composante λ dans $\mathbb{Z}_8$ (resp. $\mathbb{Z}_2$) de la classe d'équivalence (λ, W_1, W_2) de $\mathcal{A}$ dans GBr(X) n'est autre que la classe d'équivalence dans GBr(k) de la fibre type de $\mathcal{A}$.

<u>Esquisse de la démonstration</u> pour $k = \mathbb{R}$:

Quitte à prendre le produit tensoriel gradué de $\mathcal{A}$ par un fibré trivial, on peut supposer que la composante X est 0, i.e. que la fibre type de $\mathcal{A}$ est l'algèbre $M_{2n}(\mathbb{R})$ des matrices $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, M étant de degré 0 si $\beta = \gamma = 0$, et de degré 1 si $\alpha = \delta = 0$. Notons E_n le groupe des automorphismes d'algèbre graduée de $M_{2n}(\mathbb{R})$: la classe d'isomorphie de $\mathcal{A}$ définit un élément (encore noté $\mathcal{A}$) de $H^1(X, (E_n)_C)$. [Pour tout groupe topologique G, on note G_C le faisceau des germes de fonctions continues de X dans G].

Rappelons (théorème de Skolem.Noether) que tout automorphisme d'algèbre simple est intérieur: on en déduit, si $\varphi \in E_n$, qu'il existe $T \in GL(2n,\mathbb{R})$ tel que, $\forall M \in M_{2n}(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = TMT^{-1}$. En outre, puisque le centre de $M_{2n}(\mathbb{R})$ ne contient que les scalaires, T est définie à multiplication près par un scalaire non nul. Pour que φ soit un automorphisme d'algèbre graduée, il faut en plus que T appartienne au sous groupe $F_n \cup F'_n$ de $GL(2n,\mathbb{R})$ où F_n (resp. F'_n) désigne l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (resp $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$) où a et b appartiennent à $GL(n,\mathbb{R})$. On en déduit que $E_n = F_n \cup F'_n / \mathbb{R}^*$.

D'autre part, F_n est un sous-groupe distingué de $F_n \cup F'_n$, et la multiplication à droite par $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ dans $F_n \cup F'_n$ définit une bijection de F_n sur F'_n. Comme, en outre $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}^2 = I_{2n}$, le groupe quotient $F_n \cup F'_n/F_n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$. On obtient par conséquent le diagramme commutatif ci-dessous, dont les lignes et les colonnes sont exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mathbb{R}^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & F_n \arrow[r] \arrow[d] & F_n/\mathbb{R}^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{R}^* \arrow[r] & F_n \cup F'_n \arrow[r] \arrow[d] & E_n = F_n \cup F'_n/\mathbb{R}^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & \mathbb{Z}_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d] & \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Notons $W_1 : H^1(X,(E_n)_C) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}_2)$ le morphisme induit par la projection $E_n \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, et $W_2 : H^1(X,(E_n)_C) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}_2)$ le morphisme bord induit par la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}^* \longrightarrow F_n \cup F'_n \longrightarrow E_n \longrightarrow 1$$

[Rappelons que $H^2(X,(\mathbb{R}^*)_C) \cong H^2(X,\mathbb{Z}_2)$ puisqu'on peut restreindre à $\mathbb{Z}_2$ le groupe structural $\mathbb{R}^*$ des fibrés vectoriels réels de rang 1].

Pour que $\mathcal{A}$ ($\in H^1(X,(E_n)_C)$) provienne d'un élément de $H^1(X,(F_n)_C)$, il faut et il suffit que $W_1(\mathcal{A}) = 0$ et $W_2(\mathcal{A}) = 0$; dire qu'il en est ainsi signifie précisément qu'il existe un fibré vectoriel E, $\mathbb{Z}_2$-gradué, tel que $\mathcal{A} \cong \mathrm{END}(F)$: c'est dire que la classe de $\mathcal{A}$ est nulle dans $\mathrm{GBrO}(X)$. Plus généralement, on associe à tout fibré $\mathcal{A}$ de fibre type $M_{2n}(\mathbb{R})$ le couple $(W_1(\mathcal{A}), W_2(\mathcal{A})) \in H^1(X,\mathbb{Z}_2) \times H^2(X,\mathbb{Z}_2)$ et à tout fibré $\mathcal{A}$ de fibre type centrale simple réelle un triplet $(\lambda_1(\mathcal{A}), W_1(\mathcal{A}), W_2(\mathcal{A})) \in \mathbb{Z}_8 \times H^1(X,\mathbb{Z}_2) \times H^2(X,\mathbb{Z}_4)$ qui ne dépend en fait que de la classe de $\mathcal{A}$ dans $\mathrm{GBrO}(X)$. On démontre que l'application $\mathrm{GBr}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \times H^1(X,\mathbb{Z}_2) \times H^2(X,\mathbb{Z}_2)$ ainsi définie est bijective grâce à la théorie générale des foncteurs semi-exacts sur la catégorie des CW-complexes finis.

Exemples:

Soit $V \longrightarrow X$ un fibré vectoriel réel muni d'une métrique riemannienne définie négative et $C(V)$ le fibré en algèbres de Clifford correspondant. Nous admettrons le

THEOREME:

(1) La classe de $C(V)$ dans $\mathrm{GBrO}(X)$ est égale à (dim V (mod 8), $W_1(V)$, $W_2(V)$), $W_i(V)$ désignant la $i^{\text{ème}}$ classe de Stiefel-Whitney de V.

(2) La classe de $C(V) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ dans $GBr\,U(X)$ est égale à $(\dim V \pmod 2),\ W_1(V),\ \beta(W_2(V)))$ où β: $H^2(X,\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^3(X,\mathbb{Z})$ est le morphisme bord associé à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{x2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

En particulier, pour que la classe de $C(V)$ soit nulle dans $GBr\,O(X)$, il faut et il suffit que V soit spinoriel et de dimension multiple de 8.

II. K-théorie à coefficients locaux

Soit $\mathcal{A} \longrightarrow X$ un fibré en k-algèbres graduées centrales amples, dont la base X est compacte. On va définir un groupe $K^{\mathcal{A}}(X)$ qui généralise le groupe $\overline{K}^{p,q}(x)$ défini au chap.V (qui correspond au cas où $\mathcal{A}$ est le fibré trivial $C^{p,q} \times X \longrightarrow X$, muni d'une graduation triviale ε).

Soit $E \longrightarrow X$ un k-fibré hilbertion muni d'une structure de $\mathcal{A}$-module à gauche $\mathbb{Z}_2$-gradué, et soit $D: E \longrightarrow E$ une famille continue d'opérateurs de Fredholm de degré un, $D_x: E_x \longrightarrow E_x$ $(x \in X)$ telle que (1) $D^* = D$.

$$(2)\quad D o a_i = (-1)^i\ a_i\ o\ D \quad \forall a_i \in \mathcal{A}^i \quad (i = 0,1)$$

Deux tels couples (E,D) et (E',D') sur X seront dits "homotopes" s'il existe un couple analogue (E,D) sur $X \times [0,1]$ dont les restrictions à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ soient respectivement (E,D) et (E',D'). Soit $C^{\mathcal{A}}(X)$ l'ensemble des classes d'homotopie de tels couples (E,D): c'est un monoide abélien pour la loi induite par la somme directe

$$(E,D) + (E',D') = (E \oplus E',\ D \oplus D').$$

Soit $K^{\mathcal{A}}(X)$ le groupe obtenu par symétrisation.

<u>Proposition</u>:

$K^{\mathcal{A}}(X)$ ne dépend que la classe α de $\mathcal{A}$, dans $GB_r(X)$.

Il s'agit de montrer que pour tout k-fibré vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de dimension finie $E \longrightarrow X$, $K^{\mathcal{A}}(X)$ et $K^{\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathrm{END}(E)}(X)$ sont isomorphes. Il suffit, pour celà, de montrer qu'il existe une équivalence de catégories

$$X : \mathcal{H}^{\mathcal{A}}(X) \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathrm{END}(E)}(X)$$

où $\mathcal{H}^{\mathcal{A}}(X)$ désigne la catégorie des k-fibrés vectoriels hilbertiens sur X qui sont des $\mathcal{A}$-modules à gauche $\mathbb{Z}_2$-gradués: on définit X en posant

$$\mathcal{X}(M) = M \underset{k}{\otimes} E \qquad \text{pour tout objet } M \text{ de } \mathcal{H}^{\mathcal{A}}(X)$$

$$\mathcal{X}(f) = f \otimes Id_E \qquad \text{pour tout morphisme } f: M \longrightarrow M \text{ dans } \mathcal{H}^{\mathcal{A}}(X).$$

Puisque les fibrés considérés sont localement triviaux, il suffit - pour démontrer que $\mathcal{X}$ est une équivalence de catégorie - de faire la démonstration lorsque X est un point. Si $E = \mathbb{R}^n$, on alors $M \otimes E = M^n$ et $f \otimes Id_E = f \oplus f \oplus \ldots \oplus f$ (n fois), ceci pour tout objet M et tout morphisme f dans $\mathcal{H}^{\mathcal{A}}(p^t)$. Soit $a = ((a_{ij})): M^n \longrightarrow M^n$ un morphisme de $\mathcal{A} \hat{\otimes} End(R^n)$-modules; puisque $a\lambda = \lambda a \quad \forall \lambda \in End(\mathbb{R}^n)$, on en déduit que a est nécessairement diagonale, et que les termes de la diagonale sont tous égaux: l'application $f \longrightarrow f \oplus \ldots \oplus f$ de $\mathcal{H}^{\mathcal{A}}(p^t)$ (M,N) dans $\mathcal{H}^{\mathcal{A} \hat{\otimes} End\, R^n}(M^n,N^n)$ est donc surjective; par ailleurs, elle est évidemment surjective. Ainsi, $\mathcal{X}$ est une équivalence de catégorie, dont on montre en plus qu'elle est compatible avec les graduations.

Ainsi, pour tout $\alpha \in GBr(X)$, on définit $K^{\alpha}(X)$ (K-théorie "tordue ou "à coefficients locaux").

Si $u: Y \longrightarrow X$ est une application continue entre espaces compacts, on définit de façon évidente, pour tout $\alpha \in GBr(X)$, un morphisme

$$u^*: K^{\alpha}(X) \longrightarrow K^{u^{-1}(\alpha)}(Y)$$

où $u^{-1}(\alpha)$ désigne la classe de $u^{-1}(\mathcal{A})$ dans GBr(Y), $\mathcal{A}$ étant un quelconque représentant de α dans GBr(X): par abus de notation, on écrira souvent $K^{\alpha}(Y)$ au lieu de $K^{u^{-1}(\alpha)}(Y)$ lorsqu'aucune ambiguité ne sera possible sur u.

Structures multiplicatives

Soient X et X' deux espaces compacts, et soient α dans GBr(X) et α' dans GBr(X'). On définit une application

$$K^{\alpha}(X) \times K^{\alpha'}(X') \longrightarrow K^{\alpha \hat{\otimes} \alpha'}(X \times X')$$

en associant, aux classes d'équivalence des couples (E,D) et (E',D'), celle du couple

$$E \hat{\otimes} E', \quad \Lambda = D \hat{\otimes} ID_{E'} + Id_E \hat{\otimes} D'$$

($\hat{\otimes}$ désignant le produit tensoriel gradué complet , on vérifie que Λ est bien de Fredholm, de degré un auto-adjoint, et (anti)-commutant avec les éléments homogènes de degré (im)pair de $\alpha \hat{\otimes} \alpha'$).

Si $X = X'$, l'application diagonale permet de définir une structure d'anneau sur $\bigoplus_{\alpha \in GBr(X)} K^{\alpha}(X)$. Si $u : Y \longrightarrow X$ est une application continue $\bigoplus_{\beta \in GBr(Y)} K^{\beta}(Y)$ est muni d'une structure de $(\bigoplus_{\alpha \in GBr(X)} K^{\alpha}(X))$- module.

K-théorie à support compact:

Si l'on suppose plus généralement que X est localement compact, mais non nécessairement compact, on définit, pour tout $\alpha \in GBr(X)$, le groupe $K_C^{\alpha}(X)$ comme le symétrisé du monoide des classes d'homotopie de couples (E,D) définis exactement comme dans le cas compact, avec en plus la condition que D est "acyclique à l'infini" (i.e. il existe un compact Q de X tel que $D|_{X-Q}$ soit un automorphisme de $E|_{X-Q}$).

Si X est compact, on peut prendre, pour Q, X tout entier, de sorte que $K_C^{\alpha}(X) = K^{\alpha}(X)$.

Si X est localement compact et non compact et si α se prolonge en α au compactifié X, on a un homomorphisme évident $K_C^{\alpha}(X) \longrightarrow K^{\dot{\alpha}}(\dot{X})$ ($\mathring{X}$ désignant le compactifié d'Alexandroff) qui induit un isomorphisme de $K_C^{\alpha}(X)$ sur $\tilde{K}^{\dot{\alpha}}(\dot{X}) = \operatorname{Ker}[K^{\dot{\alpha}}(\dot{X}) \longrightarrow K^{\alpha}(p^t)]$.

Toutes les définitions et constructions faites ci-dessus dans le cas compact s'étendent immédiatement au cas localement compact.

III. Classe fondamentale d'un fibré vectoriel réel

Soit $V \longrightarrow X$ un fibré vectoriel réel de dimension finie et de base compacte, et soit Q une métrique riemannienne définie positive sur V. Posons $V^+ = (V,Q)$ et $V^- = (V,-Q)$. Le fibré $C(V^+ \oplus V^-) = C(V^+)\hat{\otimes}C(V^-)$ opère sur le fibre $\wedge V = \bigoplus_{i \geq 0} \overset{i}{\wedge} V$ de la façon suivante: Pour tout $v \in V$, définissons

$d_v : \wedge V \longrightarrow \wedge V$ comme étant la multiplication extérieure par v, et

$\delta_v : \wedge V \longrightarrow \wedge V$ comme étant égale à la transposée $(d_v)^t$ de d_v [rappelons que V est muni de la forme Q, non dégénérée].

Pour tout $w = (v^+, v^-) \in V^+ \oplus V^-$, on définit $\varphi(w) \in END(V)$ comme étant égal à $d_{v^+ + v^-} + \delta_{v^+ - v^-}$. On vérifie aisément que $\varphi(w) \cdot \varphi(w) = [Q(v^+) - Q(v^-)] Id_{\wedge V}$. Par conséquent φ définit un homomorphisme $\tilde{\varphi}: C(V^+ \oplus V^-) \longrightarrow END(\wedge V)$ de fibrés en algèbres, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} V^+ \oplus V^- \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathrm{END}(\wedge V) \\ C(V^+ \oplus V^-) \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

[En fait $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme: cf. Bourbaki-Algèbre].

Soit $\pi : V \longrightarrow X$ la projection de V. Sur le fibré image réciproque $\pi^{-1}\wedge V$, de base V, définissons l'opérateur $\Lambda : \pi^{-1}\wedge V \longrightarrow \pi^{-1}\wedge V$ en posant, $\forall v \in V$, Δ_v = multiplication par $(v,0)$ dans le $C(V^+ \oplus V^-)_x$-module $(\pi^{-1}\wedge V)_v = \wedge V_x$ (où $x = \pi(v)$). Puisque $C(V^-)$ est inclus dans $C(V^+ \oplus V^-)$, et que $\pi^{-1}(\wedge V)$ est un $C(V^+ \oplus V^-)$-module, c'est aussi un $C(V^-)$-module; et puisque $\varphi(v,0)\cdot\varphi(0,v') = -\varphi(0,v')\cdot\varphi(v,0)$, Λ anti-commute avec les générateurs de degré 1 de $C(V^-)$; par ailleurs, $\varphi(v,0) = d_v + \delta_v = \Lambda_v$ est auto-adjoint; enfin, puisque $(\varphi(v,0))^2 = Q(v)\mathrm{Id}_{\wedge V_x}$ est un automorphisme de $\wedge V_x$ dès que $v \neq 0$, Λ est un automorphisme en dehors de la section nulle de V (qui est un compact de V, puisque X est compact): c'est dire que le couple $(\pi^{-1}\wedge V, \Delta)$ définit un élément u_V de $KO_c^{C(V^-)}(V)$, qu'on appellera la <u>classe fondamentale</u> du fibré V (il est clair que u_V ne dépend pas de la métrique définie positive Q).

IV- Théorème de Thom-Gysin

Soit $V \longrightarrow X$ un fibré vectoriel réel de dimension finie et de base compacte, et reprenons les notations du § précédent.

THEOREME de Thom -Gysin

La multiplication Φ par u_V induit, pour tout $\alpha \in GBrO(X)$, un isomorphisme de $KO^{\alpha}(X)$ sur $KO_c^{\alpha \hat{\otimes} C(V^-)}(V)$

Remarque

En particulier, si V est spinoriel, la classe de $C(V^-)$ dans $GBrO(X)$ est égale à $(\dim V \pmod 8), 0,0)$, et Φ est un isomorphisme de $KO^{\alpha}(X)$ sur $KO^{\alpha+\dim V \pmod 8}(\dot{V})$. Si, de plus, $\alpha = (i \pmod 8), 0,0)$ (i.e. α est trivial), on obtient, compte tenu de ce que la KO-théorie est périodique de période 8 - que Φ est un isomorphisme de $KO^i(X)$ sur $\widetilde{KO}^{i+\dim V}(V)$: on retrouve ainsi le théorème classique de Thom -Gysin en KO-théorie pour les fibrés spinoriels. Pour les fibrés non spinoriels, il est indispensable d'introduite la K-théorie tordue si l'on veut obtenir un isomorphisme de Thom -Gysim.

Démonstration

Soit $T \xrightarrow{p} X$ un fibré vectoriel réel de dimension finie et Q une métrique riemannienne définie positive sur T. Définissons, pour tout $\beta \in GBrO(X)$, l'application $\bar{t}_T: KO^{\beta\hat{\otimes}C(T)}(X) \longrightarrow KO_c^{\beta}(T)$ en associant, à la classe dans $KO^{\beta\hat{\otimes}C(T)}(X)$ du couple (E,D) la classe dans $KO_c^{\beta}(T)$ du couple $(p^{-1}E,\Delta)$ où $\Delta: p^{-1}E \longrightarrow p^{-1}E$ est défini par $\Delta_t = D_x + \rho(t): E_x \longrightarrow E_x$, où $x = p(t)$, et où $\rho(t)$ désigne la multiplication par t dans le $C(T_x)$-module E_x (E est un $\beta \hat{\otimes} C(T)$-module, donc en particulier un $C(T)$-module). On laisse au lecteur le soin de vérifier que $(p^{-1}E,\Delta)$ définit bien un élément de $KO_c^{\beta}(T)$.

<u>Lemme</u>:

$\bar{t}_T$ est un isomorphisme.

Montrons comment le théorème de Thom -Gysin s'en déduit. On a vu en effet au §III que ΛV est un $C(V^+ \oplus V^-)$-module grâce à $\tilde{\varphi}: C(V^+ \oplus V^-) \longrightarrow END\ (\Lambda V)$. Comme $\tilde{\varphi}$ est même un isomorphisme, la classe de $C(V^+ \oplus V^-) = C(V^+) \hat{\otimes} C(V^-)$ est nulle dans $GBrO(X)$, de sorte que l'homomorphisme

$$\mu: KO^{\alpha}(X) \longrightarrow KO^{\alpha\hat{\otimes}C(V^+)\hat{\otimes}C(V^-)}(X)$$

défini par $(E,D) \longrightarrow (\Lambda V \hat{\otimes} E,\ Id_{\Lambda V} \hat{\otimes} D)$ est en fait un isomorphisme: c'est en effet celui qui exprime que $KO^{\alpha}(X)$ ne dépend que de la classe

α de $\mathcal{A}$ dans $GBrO(X)$. Mais, puisque $\bar{t}_V : KO^{\alpha\hat{\otimes}C(V^+)\ C(V^-)}(X) \longrightarrow KO_C^{\alpha\hat{\otimes}C(V^-)}(V)$ est un isomorphisme d'après le lemme, $\bar{t}_V \circ r : KO^{\alpha}(X) \longrightarrow KO^{\alpha\hat{\otimes}C(V^-)}(V)$ est encore un isomorphisme. Or $\bar{t}(\wedge V\hat{\otimes}E, \mathrm{Id}_{\wedge V}\hat{\otimes}D) = \Phi(E,D)$: ceci prouve que Φ est un isomorphisme.

Démonstration du lemme (esquisse)

(i) $\bar{t}$ est transitive en le sens suivant: $\forall\beta \in GBrO(X)$ et pour tout couple T, T' de fibrés vectoriels réels de dimension finie et de base X, le diagramme suivant est commutatif (p désignant la projection $T' \longrightarrow X$):

$$\begin{tikzcd} KO^{\beta\hat{\otimes}C(T\oplus T')}(X) \arrow[rr, "\bar{t}_{T\oplus T'}"] \arrow[dr, "\bar{t}_{T'}"'] & & KO_C^{\beta}(T \oplus T') \\ & KO_C^{\beta\hat{\otimes}C(T)}(T') \arrow[ur, "\bar{t}_{p^{-1}T}"'] & \end{tikzcd}$$

(ii) Grâce à la suite exacte de Mayer-Vietoris, on se ramène au cas où T et β sont triviaux ($\beta = C^{p,q}$)

(iii) Par transitivité, on se ramène ensuite au cas où T est trivial de rang 1 et $\beta = C^{p,q}$.

(iv) Dans ce cas

$$\bar{t}_T\colon \ \bar{K}^{p,q+1}(X) \longrightarrow \bar{K}_C^{p,q}(X \times \mathbb{R})$$

Mais $\bar{K}_C^{p,q}(X \times \mathbb{R}) = K^{p,q}(X \times D^1, X \times S^o)$. On vérifie que $\bar{t}_T$ coïncide alors avec l'isomorphisme $\bar{t}$ figurant dans la démonstration du théorème de périodicité de Bott (cf. chap. IV), d'où le lemme.

RÉFÉRENCES

Pour les démonstrations détaillées, voir pour la K-théorie des catégories de Banach et la périodicité de Bott:

[1] M. Karoubi: "Annales de l'E.N.S. 1968, p.161-270.

[2] M. Karoubi: "Comptes Rendus à l'Acad. des Sc. (Paris) t.263, p.275, 341, 357.

[3] M. Karoubi: "Comptes Rendus à l'Acad. des Sc. (Paris) t.267 p.305, 328, 345.

[4] M. Karoubi: "Comptes Rendus à l'Acad. des Sc. (Paris) t.268, p.596, 710.

[5] R. Wood: "Topology" 1965, p.371-389.

- Pour la K-théorie algébrique:

[6] Karoubi et Willamayor: (à paraître)

- Pour la K-théorie à coefficients locaux et le théorème de Thom-Gysm

[7] Donovan and Karoubi: "Graded Brauer group and K-theory with local coefficients" (à paraître aux Publ. Math. IHES).

Livres classiques de K théorie:

[8] M. Atiyah: "K-theory" (Benjamin, 1967).

[9] D. Husemollor: "Vector bundles (Mac Graw Hill, 1967)

Pour les algèbres de Clifford:

[10] N. Bourbaki: "Algèbre" Ch.9 (Hermann 1959).

[11] Atiyah-Bott-Shapiro: "Topology 1964 p.3-38

FACULTÉ DES SCIENCES - UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PUBLICATIONS DU SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

1. LIONS, Jacques L., Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, (1re session, été 1962), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1965, 176 p., $3.00.

2. WAELBROECK, Lucien, Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes, (1re session, été 1962), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1965, 148 p., $2.50.

3. MARANDA, Jean-Marie, Introduction à l'algèbre homologique, (1re session, été 1962), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1966, 52 p., $2.00.

4. KAHANE, Jean-Pierre, Séries de Fourier aléatoires, (2e session, été 1963), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1966, 188 p., $3.00.

5. PISOT, Charles, Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques, (2e session, été 1963), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1966, 188 p., $3.00.

6. DAIGNEAULT, Aubert, Théorie des modèles en logique mathématique, (2e session, été 1963), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1967, 138 p., $2.50.

7. JOFFE, Anatole, Promenades aléatoires et mouvement brownien, (2e session, été 1963), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1965, viii et 144 p., $2.50.

8. DIEUDONNÉ, Jean, Fondements de la géométrie algébrique moderne, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1968, x et 154 p., $3.00.

9. RIBENBOIM, Paulo, Théorie des valuations, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1968, 317 p., $4.00.

10. HILTON, Peter, Catégories non abéliennes, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1967, 151 p., $2.50.

11. ECKMANN, Beno, Homotopie et cohomologie, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 1965, 134 p., $2.50.

12. FOX, Geoffrey, Intégration dans les groupes topologiques, (3e session, été 1964), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 360 p., $4.00.

13. AGMON, Shmuel, Unicité et convexité dans les problèmes différentiels, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 156 p., $3.00.

14. BRELOT, Marcel, Axiomatique des fonctions harmoniques, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 2e éd. 1969, 148 p., $2.50.

15. BROWDER, Felix E., Problèmes non linéaires, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 156 p., $3.00.

16. STAMPACCHIA, Guido, Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 328 p., $4.00.

17. BARROS-NETO, José, Problèmes aux limites non homogènes, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 87 p., $2.00.

18. ZAIDMAN, Samuel, Equations différentielles abstraites, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 81 p., $2.00.

19. SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES, Equations aux dérivées partielles, textes de : Robert CARROLL, George DUFF, Jöran FRIBERG, Jules GOBERT, Pierre GRISVARD, Jindřich NEČAS et Robert SEELEY, (4e session, été 1965), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 144 p., $2.50.

20. FRAÏSSÉ, Roland, L'algèbre logique et ses rapports avec la théorie des relations, (5e session, été 1966), Les Presses de l'Université de Montréal, 1967, 81 p., $2.00.

21. HENKIN, Leon, Logical Systems Containing Only a Finite Number of Symbols, (5e session, été 1966), Les Presses de l'Université de Montréal, 1967, 50 p., $2.00.

22. Non disponible.

23. Non disponible.

24. LEBLANC, Léon, Représentabilité et définissabilité dans les algèbres transformationnelles et dans les algèbres polyadiques, (5e session, été 1966), Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, 126 p., $2.50.

25. MOSTOWSKI, Andrzej, Modèles transitifs de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, (5e session, été 1966), Les Presses de l'Université de Montréal, 1967, 174 p., $3.00.

26. FUCHS, Wolfgang H. J., Théorie de l'approximation des fonctions d'une variable complexe, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 138 p., $2.50.

27. HAYMAN, Walter K., Les fonctions multivalentes, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 56 p., $2.00.

28. LELONG, Pierre, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables)*, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 304 p., $4.25.

29. RAHMAN, Qazi Ibadur, *Applications of Functional Analysis to Extremal Problems for Polynomials*, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 69 p., $2.00.

30. ROSSI, Hugo, *Topics in Complex Manifolds*, (6e session, été 1967), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 85 p., $2.00.

31. HUBER, Peter J., *Théorie de l'inférence statistique robuste*, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1969, 148 p., $2.75.

32. KAC, Mark, *Aspects probabilistes de la théorie du potentiel*, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1970, 154 p., $3.25.

33, LECAM, Lucien M., *Théorie asymptotique de la décision statistique*, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1969, 146 p. $2.75.

34. NEVEU, Jacques, *Processus aléatoires gaussiens*, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 230 p., $3.75.

35. VAN EEDEN, Constance, *Nonparametric Estimation*, (7e session, été 1968), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, 48 p., $2.25.

36. KAROUBI, Max, *K-théorie*, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, 1971, 182 p., $3.25.

37. KOHN, Joseph J., *Complexes différentiels*, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.

38. KUIPER, Nicolas H., *Variétés hilbertiennes: aspects géométriques*, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, 1971, 154 p., $3.25.

39. KURANISHI, Masatake, *Déformations des variétés complexes compactes*, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.

40. NARASIMHAN, Raghavan, *Global Problems on Stein Manifolds*, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.

41. SPENCER, Donald D., *Systèmes d'équations différentielles partielles linéaires et déformations des structures de pseudo-groupes*, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.

42. SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES, *Analyse globale*, textes de : P. LIBERMANN, K. D. ELWORTHY, N. MOULIS, K. K. MUKHERJEA, N. PRAKASH, G. LUSZTIG, et W. SHIH, (8e session, été 1969), Les Presses de l'Université de Montréal, à paraître.

décembre 1970