ALGEBRES DE CLIFFORD ET OPERATEURS DE FREDHOLM

Max Karoubi

Extension du théorème de Jänich $K^0(X) \approx [X, \mathcal{F}(H)]$ aux groupes $K^n(X)$. Application aux structures multiplicatives en K-théorie.

1. Le groupe $\overline{K}^{p,q}(X)$ [1]. — Soient X un espace compact et $C^{p,q}$ l'algèbre de Clifford de $\mathbf{R}^{p+q}$ muni de la forme quadratique

$$-x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2$$

[*cf.* [5] ou [6] dont nous suivrons les notations]. Soit E un fibré hilbertien muni d'une structure de $C^{p,q}$-module gradué compatible avec sa métrique. On appellera *quasi-graduation* de E une famille continue d'opérateurs de Fredholm $D = (D_x)$, $D_x : E_x \to E_x$, autoadjoints, de degré un et anti-commutant aux générateurs de l'algèbre de Clifford $C^{p,q}$. On désigne par $\mathfrak{T}$ l'ensemble des classes d'homotopie de telles paires (E, D). C'est de manière évidente un monoïde abélien pour le somme de Whitney des fibrés. Un élément (E, D) de $\mathfrak{T}$ est dit *acyclique* si D est une famille continue d'opérateurs inversibles. On désigne par $\overline{K}^{p,q}(X)$ le monoïde quotient de $\mathfrak{T}$ par la relation d'équivalence suivante : $\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow \exists\, \tau$ et τ' acycliques telles que $\sigma + \tau = \sigma' + \tau'$. En fait, $\overline{K}^{p,q}(X)$ est un groupe, la paire opposée à (E, D) étant la paire $(\overline{E}, -D)$ où $\overline{E}$ est le $C^{p,q}$-module « conjugué » de E. En appliquant un théorème de Kuiper [7], on voit aisément que le groupe $\overline{K}^{0,0}(X)$ est isomorphe à l'ensemble des classes d'homotopie de X dans l'ensemble $\mathcal{F}(H)$ des opérateurs de Fredholm d'un espace de Hilbert de dimension infinie H. D'après le théorème classique de Jänich [4], on a donc $\overline{K}^{0,0}(X) \approx K(X)$. On se propose d'expliciter ici un isomorphisme plus général entre $\overline{K}^{p,q}(X)$ et le groupe $K^{p,q}(X)$ [ou $K^{p-q}(X)$] introduit dans [5].

2. L'isomorphisme $j : \overline{K}^{p,q}(X) \to K^{p,q}(X)$. — On désigne par $\mathcal{H}(X)$ la catégorie de Banach des fibrés hilbertiens et par $\check{\mathcal{H}}(X)$ la catégorie de Banach associée à la catégorie prébanachique $\mathcal{H}'(X)$ suivante : les objets de $\mathcal{H}'(X)$ sont les fibrés hilbertiens,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}'(X)}(E, F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(X)}(E, F)/\mathcal{K}(E, F),$$

où $\mathcal{K}(E, F)$ désigne l'ensemble des morphismes $f: E \to F$ tels que $f_x: E_x \to F_x$ soit complètement continu (i. e. limite d'opérateurs de rang fini). On désigne par φ ou $\check{}$ le foncteur canonique de $\mathcal{H}(X)$ dans $\check{\mathcal{H}}(X)$.

Notons maintenant σ l'application canonique de $\mathfrak{T}$ dans $\overline{K}^{p,q}(X)$ et considérons un élément $x = \sigma(E, D)$ de $\overline{K}^{p,q}(X)$. Alors E peut être aussi regardé comme un $C^{p,q+1}$-module, D anticommutant aux générateurs de $C^{p,q+1}$.

Lemme 1. — *Il existe une paire acyclique* (F, Δ) *et une graduation* ε_1 *du* $C^{p,q+1}$*-module* $E \oplus F$.

D'après ce lemme, on peut donc supposer que $x = \sigma(E, D)$ où E est un $C^{p,q+1}$-module gradué de graduation ε_1. D'autre part, D étant une famille d'opérateurs de Fredholm autoadjoints, le spectre de $\check{D}$ ne rencontre pas l'axe imaginaire. Soit alors γ^- (resp. γ^+) une courbe fermée différentiable symétrique par rapport à l'axe réel et contenant le spectre de $\check{D}$ situé à gauche (resp. à droite) de l'axe imaginaire. L'endomorphisme

$$\varepsilon'_2 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma^+}\frac{dz}{1z - \check{D}} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma^-}\frac{dz}{1z - \check{D}}$$

est une graduation de $\check{E}$ dans la catégorie $\check{\mathcal{H}}(X)$ qui anticommute aux générateurs de l'algèbre de Clifford $C^{p,q+1}$. On définit ainsi un homomorphisme

$$u: \overline{K}^{p,q}(X) \to K^{p,q+1}(\check{\mathcal{H}}(X))$$

par la formule $u(\sigma(E, D)) = d(E, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2)$ avec $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$.

Proposition 2. — *L'homomorphisme* u *est un isomorphisme.*

Lemme 3. — *Le groupe* $K^{p,q}$ *de la catégorie* $\mathcal{H}(X)$ *est nul.*

En effet, soit $d(F, \eta_1, \eta_2)$ un élément de $K^{p,q}(\mathcal{H}(X))$ et soit G la somme hilbertienne $F \oplus F \oplus \ldots$. Alors G peut être muni des graduations $\xi_i = \eta_i \oplus \eta_i \oplus \ldots$, $i = 1, 2$, et on a de manière évidente

$$d(F, \eta_1, \eta_2) + d(G, \xi_1, \xi_2) = d(G, \xi_1, \xi_2),$$

d'où $d(F, \eta_1, \eta_2) = 0$.

Corollaire 4. — *L'homomorphisme cobord* $\partial^{p,q+1}$ *de la suite exacte de cohomologie associée au foncteur* φ *définit un isomorphisme entre les groupes* $K^{p,q+1}(\check{\mathcal{H}}(X))$ *et* $K^{p,q}(\varphi)$.

Cette suite exacte s'écrit en effet

$$\begin{array}{ccccccc} K^{p,q+1}(\mathcal{H}(X)) & \to & K^{p,q+1}(\check{\mathcal{H}}(X)) & \xrightarrow{\partial^{p,q+1}} & K^{p,q}(\varphi) & \to & K^{p,q}(\mathcal{H}(X)). \\ \| & & & & & & \| \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

Considérons maintenant un élément $d(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $K^{p,q}(X)$. Le fibré vectoriel en $C^{p,q}$-modules de dimension finie E peut être vu comme un objet de $(\mathcal{H}(X))^{p,q}$. Puisque $\check{\varepsilon}_1 = \check{\varepsilon}_2$, le triple $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ définit de manière évidente un élément de $K^{p,q}(\varphi)$, d'où un homomorphisme k de $K^{p,q}(X)$ dans $K^{p,q}(\varphi)$.

Proposition 5. — *L'homomorphisme k est un isomorphisme.*

La proposition 2, le corollaire 4 et la proposition précédente impliquent enfin le théorème que nous avions en vue :

Théorème 6. — *L'homomorphisme composé*

$$j = k^{-1}.\partial^{p,q+1}.u : \quad \overline{K}^{p,q}(X) \to K^{p,q}(X)$$

est un isomorphisme.

3. Extensions diverses. — Soit V un fibré vectoriel réel sur X muni d'une forme quadratique non dégénérée Q. En suivant ([3]), on définit un groupe $\overline{K}$ « tordu », noté $\overline{K}^V(X)$, dont on montre de manière analogue qu'il est isomorphe au groupe $K^V(X)$. Cette définition est encore valable si X est localement compact à condition de considérer des paires (E, D) où D est « acyclique à l'infini ».

4. Structures multiplicatives. — Soit $x = \sigma(E, D)$ [resp. $x' = \sigma(E', D')$] un élément de $\overline{K}^V(X)$ [resp. $\overline{K}^{V'}(X')$]. On définit leur « cup-produit » $x \cup x'$ appartenant à $\overline{K}^{V \oplus V'}(X \times X')$ par la formule

$$\sigma(E, D) \cup \sigma(E', D') = \sigma(E \hat{\otimes} E', D \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} D').$$

Dans cette formule $E \hat{\otimes} E'$ représente le produit tensoriel *gradué complété* des fibrés E et E' fibre par fibre : c'est un $C(V \oplus V')$-module de manière évidente [identifier $C(V) \hat{\otimes} C(V')$ à $C(V \oplus V')$].

Proposition 7. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\overline{K}^{0,0}(X) \times \overline{K}^{0,0}(X') \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "j \times j"'] & \overline{K}^{0,0}(X \times X') \arrow[d, "j"] \\
K^{0,0}(X) \times K^{0,0}(X') \arrow[r, "\cup"] & K^{0,0}(X \times X')
\end{tikzcd}$$

la deuxième flèche horizontale représentant le cup-produit usuel.

Supposons que le fibré V s'écrive $V^- \oplus V^+$, V^- et V^+ étant orthogonaux pour la forme quadratique Q et la restriction de Q à V^+ étant définie positive. Considérons ensuite un élément $\sigma(E, D)$ de $\overline{K}^V(X) = \overline{K}^{V^- \oplus V^+}(X)$ et désignons par E' le $C(V^-)$-module obtenu à partir de E par restriction des scalaires. Si on note $\pi : V^+ \to X$ la projection canonique, on définit une quasi-graduation D' de $\pi^* E'$, acyclique en dehors de la section nulle de V^+, égale au point v^- de V^- à la somme $\rho(v^+) + D_{\pi(v^+)}$ (en abrégé $v^+ + D$) où $\rho : C(V^+) \to \operatorname{End} E$ est l'homomorphisme définissant la structure de $C(V^+)$-module de E (par restriction des scalaires). Posons

$$\bar{t}(\sigma(E, D)) = \sigma(E', D').$$

THÉORÈME 8. — *L'homomorphisme*

$$\bar{t}: \overline{\mathrm{K}}^{\mathrm{V}^- \oplus \mathrm{V}^+}(\mathrm{X}) \to \overline{\mathrm{K}}^{\pi^* \mathrm{V}^-}(\mathrm{V}^+)$$

est un isomorphisme.

PROPOSITION 9. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathrm{K}}^{\mathrm{V}^-\oplus\mathrm{V}^+}(\mathrm{X}) \times \overline{\mathrm{K}}^{\mathrm{V}'^-\oplus\mathrm{V}'^+}(\mathrm{X}') & \xrightarrow{\cup} & \overline{\mathrm{K}}^{(\mathrm{V}^-\oplus\mathrm{V}'^-)\oplus(\mathrm{V}^+\oplus\mathrm{V}'^+)}(\mathrm{X}\times\mathrm{X}') \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \bar{t}\times\bar{t}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \bar{t}} \\ \overline{\mathrm{K}}^{\pi^*\mathrm{V}^-}(\mathrm{V}^+) \times \overline{\mathrm{K}}^{\pi'^*\mathrm{V}'^-}(\mathrm{V}'^+) & \xrightarrow{\cup} & \overline{\mathrm{K}}^{\pi''^*(\mathrm{V}^-\oplus\mathrm{V}'^-)}(\mathrm{V}^+\oplus\mathrm{V}'^+) \end{array}$$

où $\pi : \mathrm{V}^+ \to \mathrm{X}$, $\pi' : \mathrm{V}'^+ \to \mathrm{X}'$, $\pi'' : \mathrm{V}^+ \oplus \mathrm{V}'^+ \to \mathrm{X}\times\mathrm{X}'$.

Les considérations précédentes permettent de définir une application bilinéaire

$$\cup : \quad \overline{\mathrm{K}}^{p,q}(\mathrm{X}) \times \overline{\mathrm{K}}^{p',q'}(\mathrm{X}') \to \overline{\mathrm{K}}^{p+p',q+q'}(\mathrm{X}\times\mathrm{X}').$$

Si $x \in \overline{\mathrm{K}}^{p,q}(\mathrm{X})$ et $x' \in \overline{\mathrm{K}}^{p',q'}(\mathrm{X}')$, posons

$$x \,\dot{\cup}\, x' = (-1)^{qp'} x \cup x'.$$

PROPOSITION 10. — *Avec les notations précédentes on a*

$$x' \,\dot{\cup}\, x = (-1)^{(p-q)(p'-q')}\mathrm{T}^*(x \,\dot{\cup}\, x'),$$

où $\mathrm{T} : \mathrm{X}'\times\mathrm{X} \to \mathrm{X}\times\mathrm{X}'$ *désigne l'homéomorphisme canonique.*

Cette proposition définit sans ambiguïté un cup-produit $\dot{\cup}$ sur les groupes $\overline{\mathrm{K}}^n \approx \overline{\mathrm{K}}^{p,q}$ lorsque $p - q = n$. On obtient ainsi, pour n et n' de signe quelconque, une application bilinéaire

$$\overline{\mathrm{K}}^n(\mathrm{X}) \times \overline{\mathrm{K}}^{n'}(\mathrm{X}') \to \overline{\mathrm{K}}^{n+n'}(\mathrm{X}\times\mathrm{X}')$$

qui fait de la K-théorie une théorie cohomologique multiplicative et périodique (comparer avec ([2])].

(*) Séance du 5 août 1968.

([1]) L'idée du groupe $\overline{\mathrm{K}}^{p,q}(\mathrm{X})$ m'a été suggérée par Atiyah et Singer ([3]).

([2]) M. F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, *Vector bundles and homogeneous spaces* (*Proc. Symposium in pure Math.*, 3, American Mathematical Society, 1961).
([3]) M. F. ATIYAH et I. M. SINGER (à paraître).
([4]) K. JÄNICH, *Bonn Dissertation*, 1964.
([5]) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 275 et 341.
([6]) M. KAROUBI, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, 1, 1968, p. 161.
([7]) N. H. KUIPER, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, *Topology*, 1965, p. 19-30.

(Institut de Recherche mathématique avancée, rue René-Descartes, Strasbourg, Bas-Rhin.)