ESPACES CLASSIFIENTS EN K-THEORIE

Max Karoubi

Cette Note fait suite à une Note précédente [11]. A l'aide de fibrés convenables, on construit un foncteur cohomologique représentable de la catégorie des espaces paracompacts dans celle des groupes abéliens. Lorsque X est compact, on retrouve la K-théorie usuelle.

1. Rappels et compléments de K-théorie. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prébanachique dans le sens de [10] et soit X un espace paracompact. La définition des groupes $K^{p,q}(X;\mathcal{C})$ pour X compact [*cf.* [7], [10]] s'étend comme suit au cadre paracompact. Soit d'abord E un objet de $\mathcal{C}$ muni d'une structure de module sur l'algèbre de Clifford $C^{p,q}$. On appellera « *graduation* » de E (relativement à X), la donnée d'une application continue $\varepsilon : X \to \mathrm{End}^-(E)$ telle que $(\varepsilon(x))^2 = 1$, $\forall x \in X$. Ici $\mathrm{End}^-(E)$ désigne l'espace de Banach des endomorphismes de E qui *anticommutent* aux générateurs de $C^{p,q}$. Considérons ensuite l'ensemble des triples $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, où E est un $C^{p,q}$-module et où ε_i, $i = 1, 2$, sont deux graduations de E. Deux triples $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et (F, η_1, η_2) sont *équivalents* s'il existe un triple (G, ζ, ζ) tel que $\varepsilon_1 \oplus \eta_2 \oplus \zeta$ et $\varepsilon_2 \oplus \eta_1 \oplus \zeta$ soient homotopes parmi les graduations de $E \oplus F \oplus G$. L'ensemble des classes d'équivalence, muni de la loi de composition induite par la somme évidente des triples, est un groupe abélien qu'on notera $K^{p,q}(X;\mathcal{C})$ [2]. Il ne dépend que de la différence $n = p - q \bmod 8$ ($\bmod 2$ seulement dans le cas complexe). On se permettra donc souvent de l'écrire $K^n(X;\mathcal{C})$. On définit de manière analogue des « groupes relatifs » $K^{p,q}(X, Y;\mathcal{C})$, $K^n(X, Y;\mathcal{C})$, lorsque Y est un sous-espace fermé de X (considérer le sous-ensemble des triples $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tels que $\varepsilon_1|_Y = \varepsilon_2|_Y$). Dans le cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie $\mathcal{L}(A)$ des modules *libres de type fini* sur une algèbre de Banach A, on écrira ces groupes simplement $K^{p,q}(X;A)$, $K^{p,q}(X, Y;A)$....

Remarque. — Il est facile de voir que $K^0(X;A)$ s'identifie au groupe de Grothendieck d'une catégorie de fibrés en A-modules convenables : ce sont les facteurs directs de fibrés triviaux $X \times A^n$, $n = 0, 1, 2\dots$ Pour $A = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et X compact, on retrouve donc bien la K-théorie usuelle.

De même que pour X compact, on peut définir un « *homomorphisme de connexion* » :

$$\partial^{p,q+1} : \quad K^{p,q+1}(Y;\mathcal{C}) \to K^{p,q}(X, Y;\mathcal{C}).$$

En effet, soit $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ un triple définissant l'élément $x = d(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $K^{p,q+1}(Y;\mathcal{C})$ et soit ε_{q+1} le dernier générateur de $C^{p,q+1}$. D'après un raisonnement éprouvé [*cf.* [10], [12] par exemple], les graduations $\varepsilon_i(\theta) = \varepsilon_{q+1}\cos\theta + \varepsilon_i \sin\theta$ se prolongent à tout X en des graduations $\tilde{\varepsilon}_i(\theta)$ telles que

$$\tilde{\varepsilon}_i(0) = \varepsilon_{q+1}, \qquad i = 1, 2, \qquad \theta \in [0, \pi].$$

On a alors $\partial^{p,q-1}(x) = d(\mathrm{E}, \tilde{\varepsilon}_1(\pi), \tilde{\varepsilon}_2(\pi))$. On écrira souvent ∂^{n-1} au lieu de $\partial^{p,q-1}$ lorsque $p - q = n$.

Définition 1. — *Une algèbre de Banach* A *est dite « quasi-stable » si l'application de* $\mathrm{GL}(n, \mathrm{A})$ *dans* $\mathrm{GL}(n+1, \mathrm{A})$ *définie par* $\mathrm{M} \to \begin{pmatrix} \mathrm{M} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est une équivalence d'homotopie pour tout* n. *Elle est dite « stable » si* A, $\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ et $\mathrm{A} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{H}$ *sont quasi-stables.*

Théorème 2. — *Soit* A *une algèbre de Banach stable. On a alors une « suite exacte de cohomologie ».*

$$\mathrm{K}^{n-1}(\mathrm{X}; \mathrm{A}) \to \mathrm{K}^{n-1}(\mathrm{Y}; \mathrm{A}) \xrightarrow{\partial^{n-1}} \mathrm{K}^n(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \mathrm{A}) \to \mathrm{K}^n(\mathrm{X}; \mathrm{A}) \to \mathrm{K}^n(\mathrm{Y}; \mathrm{A}).$$

En particulier, les foncteurs $\mathrm{K}^n(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \mathrm{A})$, *munis des opérateurs bord* ∂^{n-1}, *forment une théorie de la cohomologie sur la catégorie des paires* (X, Y), X *paracompact*, Y *fermé dans* X [si A n'est pas stable, le même résultat subsiste à condition de se restreindre aux espaces compacts : *cf.* [10] th. 2.3.1].

Si A est une algèbre de Banach quelconque, désignons par $\mathrm{Grad}^{p,q}(\mathrm{A})$ l'ensemble des graduations du $\mathrm{C}^{p,q}$-module $\mathrm{C}^{p,q+1} \otimes \mathrm{A}$ et par $\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(\mathrm{A})$ la composante connexe de la graduation définie par la multiplication à gauche par ε_{q+1}. Désignons de même par $\mathrm{GL}^{p,q}(\mathrm{A})$ [resp. $\mathrm{Gl}^{p,q+1}(\mathrm{A})$] le groupe des $\mathrm{C}^{p,q}$-automorphismes (resp. des $\mathrm{C}^{p,q+1}$-automorphismes) de $\mathrm{C}^{p,q+1} \otimes \mathrm{A}$. Soient enfin $\widetilde{\mathrm{GL}}^{p,q}(\mathrm{A})$ la composante neutre de $\mathrm{GL}^{p,q}(\mathrm{A})$ et $\widetilde{\mathrm{Gl}}^{p,q+1}(\mathrm{A}) = \widetilde{\mathrm{GL}}^{p,q}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Gl}^{p,q+1}(\mathrm{A})$. Il est alors facile de voir que $\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(\mathrm{A})$ s'identifie à l'espace homogène $\widetilde{\mathrm{GL}}^{p,q}(\mathrm{A})/\widetilde{\mathrm{Gl}}^{p,q+1}(\mathrm{A})$. En outre,

$$\mathrm{K}^{p,q}(\mathrm{Point}; \mathrm{A}) \times \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(\mathrm{A})$$

est un *espace classifiant* pour le foncteur $\mathrm{K}^{p,q}(\mathrm{X}; \mathrm{A})$ si A est stable. L'isomorphisme de suspension $\tilde{\mathrm{K}}^{p,q+1}(\mathrm{X}; \mathrm{A}) \approx \tilde{\mathrm{K}}^{p,q}(\mathrm{SX}; \mathrm{A})$ est induit dans ce cas par une équivalence d'homotopie

$$\mathrm{K}^{p,q+1}(\mathrm{Point}; \mathrm{A}) \times \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q+1}(\mathrm{A}) \sim \Omega\, \widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}(\mathrm{A}).$$

Celle-ci s'explicite à l'aide de l'isomorphisme t défini dans [[10], th. 2.2.2] [*voir* aussi [14]].

2. Extension de la K-théorie classique. — Nous nous intéressons ici particulièrement à l'algèbre de Banach $\mathrm{A} = \mathrm{End}\,\mathrm{H}/\mathcal{K}$, où H est un espace de Hilbert de dimension infinie [7] et où $\mathcal{K}$ est l'idéal des opéra-

teurs complètement continus dans H. La catégorie de Banach associée à $\mathcal{L}(A)$ est précisément la catégorie $\check{\mathcal{H}}$ de [11] et les groupes $K^{p,q}(X; A)$ sont évidemment les mêmes que les groupes $K^{p,q}(X; \check{\mathcal{H}}) = K^{p,q}(\check{\mathcal{H}}(X))$ de [11]. Le théorème de Kuiper [14] implique alors la proposition suivante :

Proposition et définition 3. — *L'algèbre de Banach* $A = \mathrm{End}\,H/\mathcal{K}$ *est stable. Pour tout* X *paracompact et* Y *fermé dans* X, *on pose*

$$K^n(X, Y) = K^{p,q+1}(X, Y; \check{\mathcal{H}}) = K^{p,q+1}(X, Y; A), \qquad n = p - q.$$

D'après le théorème 2, les foncteurs $K^n(X, Y)$, munis des opérateurs bord évidents, forment une théorie de la cohomologie. Dans le cas compact, l'argument de [11] permet de retrouver la K-théorie usuelle.

On peut donner des descriptions équivalentes *très voisines* des foncteurs $K^n(X, Y) = K^{n-1}(X, Y; \check{\mathcal{H}})$. La proposition 2 de [11] (vraie aussi dans le cadre paracompact) permet d'identifier $K^n(X, Y)$ à $\overline{K}^{p,q}(X, Y)$ pour $p - q = n$. Les groupes $\overline{K}^{p,q}(X, Y)$ sont plus commodes à manier pour ce qui concerne les structures multiplicatives [*cf.* [11], § 4]. Une autre description, suggérée par Atiyah et Singer [6] et conséquence à peu près directe des arguments de [11], consiste à interpréter $\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q+1}(A)$ en termes d'opérateurs de Fredholm. De manière précise, on a le lemme suivant :

Lemme 4. — *Désignons par* $\mathcal{F}^{p,q}(H)$ *l'ensemble des opérateurs de Fredholm dans l'espace de Hilbert* $C^{p,q+2} \otimes H$ *qui sont auto-adjoints et qui anticommutent aux* $(p+q+1)$ *premiers générateurs de* $C^{p,q+2}$. *Alors* $\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q+1}(A)$ *a le même type d'homotopie que la composante connexe* $\tilde{\mathcal{F}}^{p,q}$ *de* ε_{q+2} *dans* $\mathcal{F}^{p,q}(H)$. *En particulier,* $\mathcal{F}^{p,q} = K^n(\text{Point}) \times \tilde{\mathcal{F}}^{p,q}$ *est un espace classifiant pour le foncteur* $K^n(X)$, X *paracompact,* $n = p - q$ [[4], [5]].

Ce lemme est de démonstration analogue à la proposition 2 de [11] qui fournit d'ailleurs un moyen de construire une application explicite de $\tilde{\mathcal{F}}^{p,q}$ dans $\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q+1}(A)$. Grâce à la classification des algèbres $C^{p,q}$ [*cf.* [10], § 1.1], il est facile de donner des interprétations « concrètes » des espaces $\mathcal{F}^{p,q}$ [*cf.* [6], [13]]. Par exemple, dans le cas réel, $\mathcal{F}^{0,1}$ s'identifie à l'ensemble des opérateurs de Fredholm *symétriques gauches* $(D^* = -D)$. De même, $\mathcal{F}^{1,0}$ s'identifie à l'ensemble des opérateurs de Fredholm *auto-adjoints* D, le spectre de D dans A n'étant pas situé d'un seul côté de l'axe imaginaire, etc.

(*) Séance du 17 mars 1969.

(1) L'auteur bénéficie de l'aide de la « National Science Foundation » (Grant GP 7952 X).

(2) Pour X compact, cette définition diffère très légèrement de celle de (7), par exemple [*cf.* [10], § 2.1 pour la traduction].

(3) Réel ou complexe suivant la K-théorie envisagée.

(4) Pour $n = 0$, le lemme est bien connu : *cf.* [5], [9], etc. En effet, $\mathcal{F}^{0,0}$ est isomorphe à l'ensemble des opérateurs de Fredholm (ordinaires) dans H.

(5) Récemment, Atiyah et Segal m'ont fait remarquer que ce type de résultat peut aussi s'obtenir en appliquant le théorème de Wood (15) à A. En fait, ceci revient à répéter essentiellement la *même* démonstration, compte tenu des relations entre le théorème de Wood et le théorème 2.2.2 de (10) [*cf.* (7)].

(6) M. F. Atiyah et I. M. Singer (à paraître).
(7) H. Cartan, *Séminaire Bourbaki*, 1968.
(8) L. Illusie, *Séminaire de Topologie à l'I. H. E. S.*, 1964-1965.
(9) K. Janich, *Math. Ann.*, 161, 1965, p. 129-142.
(10) M. Karoubi, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, 1, 1968, p. 161-270.
(11) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 267, 1968, p. 305-308.
(12) M. Karoubi, *Séminaire sur la* K-*théorie* (à paraître).
(13) M. Karoubi, *Espaces classifiants en* K-*théorie* (à paraître).
(14) N. Kuiper, *Topology*, 3, 1965, p. 19-30.
(15) R. Wood, *Topology*, 4, 1965-1966, p. 371-389.

(*The Institute for Advanced Study,*
Princeton, N. J.,
08540, *U. S. A.*)

179479. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.