CATEGORIES FILTREES

Max Karoubi

1. Catégories en groupes de Banach.

Définition 1. — *Soit M un groupe abélien. Une « quasi-norme » sur M est une application de M dans* $\mathbf{R}^+$ *notée* $x \mapsto \|x\|$ *jouissant des propriétés suivantes :*

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(3) $\|-x\| = \|x\|$.

On appelle groupe quasi-normé un groupe abélien M muni d'une quasi-norme. Le groupe M est alors un espace métrique pour la distance invariante par translation $d(x, y) = \|x-y\|$. Réciproquement, tout groupe abélien muni d'une distance invariante par translation est quasi-normé si l'on pose $\|x\| = d(x, 0)$. Un « *groupe de Banach* » est un groupe quasi-normé complet pour la distance définie par la quasi-norme.

Exemples. — Un espace de Banach est évidemment un groupe de Banach. Plus généralement, un espace de Fréchet dont la topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes p_i est un groupe de Banach pour la quasi-norme

$$\|x\| = \sum_i 2^{-i}\,\mathrm{Inf}(1, p_i(x)).$$

Enfin un groupe abélien quelconque peut aussi être considéré comme un groupe de Banach pour la quasi-norme suivante (dite « discrète ») :

$$\begin{aligned} \|x\| &= 0 \quad \text{si} \quad x = 0, \\ \|x\| &= 1 \quad \text{si} \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Tous les sorites développés pour les espaces de Banach se démontrent aussi bien pour les groupes de Banach. Ainsi le quotient d'un groupe de Banach par un sous-groupe fermé est aussi un groupe de Banach pour la « quasi-norme quotient ». Si M et N sont deux groupes de Banach, les applications *bornées* de M dans N forment un groupe de Banach pour la quasi-norme

$$\|f\| = \operatorname*{Sup}_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

Remarque. — Une application bornée est évidemment continue. La réciproque est cependant inexacte comme le montre l'exemple de **Z** muni de la valeur absolue usuelle et de la quasi-norme discrète.

DÉFINITION 2. — *Une « catégorie en groupes de Banach » est une catégorie additive* $\mathcal{C}$, *où* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ *est muni d'une structure de groupe de Banach de telle sorte que, quels que soient les objets* M, N *et* P *de* $\mathcal{C}$ *et les morphismes* $u : M \to N$, $v : N \to P$, *on ait l'inégalité* $\|v.u\| \leq C\|v\| \times \|u\|$, C *étant une constante ne dépendant que de* M, N et P.

Exemples. — Une catégorie de Banach ou prébanachique dans le sens de [1] est évidemment une catégorie en groupes de Banach. Il en est de même d'une catégorie additive $\mathcal{C}$ lorsqu'on munit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ de la quasi-norme discrète. Enfin, la catégorie des fibrés analytiques sur une variété analytique (réelle ou complexe) dénombrable à l'infini est aussi une catégorie en groupes de Banach.

Remarque. — Comme pour les espaces de Banach on convient d'identifier deux quasi-normes sur un groupe abélien lorsque celles-ci sont équivalentes. La même remarque s'applique aux catégories en groupes de Banach.

2. CATÉGORIES FILTRÉES. — Si $\mathcal{D}$ est une catégorie quelconque et si E et F sont deux objets de $\mathcal{D}$, on appelle *morphisme direct* de E dans F la donnée de deux flèches $s : E \to F$ et $p : F \to E$ telles que $p.s = \mathrm{Id}_E$. Alors s (resp. p) est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) et les morphismes directs sont les flèches d'une catégorie dont les objets sont les objets de $\mathcal{D}$. On notera $(s, p) : E \dashrightarrow F$ une telle flèche. Soit maintenant $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathcal{D}$. Si E est un objet de $\mathcal{D}$ on appelle $\mathcal{C}$-filtration directe de E (ou simplement $\mathcal{C}$-*filtration* de E) la donnée d'objets E_i de $\mathcal{C}$, $i \in I$ ensemble d'indices quelconque, et de $\mathcal{D}$-morphismes directs $f_i = (s_i, p_i) : E_i \dashrightarrow E$ satisfaisant à l'axiome suivant :

F 1 : *Si* E_i *et* E_j *sont deux objets de la filtration de* E, *il existe un troisième objet* E_k *de la filtration qui rend commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, equal] & E \arrow[r, equal] & E \\
E_i \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed] & E_k \arrow[u, dashed] & E_j \arrow[u, dashed] \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}$$

Soient $\{E_i\}$ et $\{E'_{i'}\}$ deux filtrations de E. On dira que la filtration $\{E_i\}$ est moins fine que la filtration $\{E'_{i'}\}$ si, pour tout indice i, on peut trouver un indice i' et des morphismes directs $h_{i'i}$ qui rendent commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, equal] & E \\
E_i \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed, "h_{i'i}"] & E_{i'} \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

On dira que les deux filtrations sont *équivalentes* si l'une est plus fine que l'autre et réciproquement.

Définition 3. — *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie en groupes de Banach et soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie additive pleine de $\mathcal{D}$. Une $\mathcal{C}$-filtration sur la catégorie $\mathcal{D}$ est la donnée, pour tout objet* E *de $\mathcal{D}$, d'une $\mathcal{C}$-filtration* $\{E_i\}$, $i \in I$, *sur* E (I *ne dépendant que de* E) *vérifiant les axiomes suivants :*

F 2 : *Soient* E *un objet de $\mathcal{C}$,* F *un objet de $\mathcal{D}$, et $f : E \to F$ un $\mathcal{D}$-morphisme. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un objet F_j de la filtration de* F *et un $\mathcal{C}$-morphisme $f_j : E \to F_j$ tels que dans le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & F_j \arrow[dd, "s_j"] \\ E \arrow[ur, "f_j"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & F \end{tikzcd}$$

on ait $\|f - s_j . f_j\| < \varepsilon$.

F 3 : *Soient* E *un objet de $\mathcal{D}$,* F *un objet de $\mathcal{C}$ et $f : E \to F$ un $\mathcal{D}$-morphisme. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un objet E_i de la filtration de* E *et un $\mathcal{C}$-morphisme $f_i : E_i \to F$ tels que $\|f - f_i . p_i\| < \varepsilon$.*

F 4 : *Si* E *et* F *sont deux objets de $\mathcal{D}$, la filtration $\{E_i \oplus F_j\}$ de $E \oplus F$ est équivalente à la filtration $\{(E \oplus F)_k\}$.*

Exemples. — Soit $\mathcal{H}$ la catégorie des espaces de Hilbert et soit $\mathcal{E}$ la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie. On peut alors considérer $\mathcal{H}$ comme $\mathcal{E}$-filtrée de la manière suivante : pour tout espace de Hilbert E, $\{E_i\}$ est la collection de ses sous-espaces de dimension finie, $s_i : E_i \to E$ étant l'injection canonique, $p_i : E \to E_i$ la projection orthogonale. Plus généralement, la catégorie des fibrés hilbertiens triviaux (de base compacte) est filtrée par la catégorie des fibrés vectoriels triviaux de dimension finie.

Proposition et définition 4. — *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie $\mathcal{C}$-filtrée et soit $f : E \to F$ un $\mathcal{D}$-morphisme. Les deux assertions suivantes sont alors équivalentes :*

(i) *$\forall \varepsilon > 0$, il existe un objet F_j de la filtration de* F *et un morphisme $f_j : E \to F_j$ tel que $\|f - s_j . f_j\| < \varepsilon$.*

(ii) *$\forall \varepsilon > 0$, il existe un objet E_i de la filtration de* E *et un morphisme $f_i : E_i \to F$ tel que $\|f - f_i . p_i\| < \varepsilon$.*

Un morphisme f vérifiant l'une de ces deux propriétés équivalentes est dit « complètement continu ».

Remarque. — Cette définition est évidemment inspirée de celle des opérateurs complètement continus (ou compacts) dans les espaces de Hilbert.

Proposition 5. — *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux filtrations d'une catégorie en groupes de Banach $\mathcal{D}$ telles que les morphismes complètement continus*

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267 (26 août 1968). Série A — 331

soient les mêmes pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. Alors les deux filtrations sont associées à une même sous-catégorie $\mathcal{C}$ et induisent des filtrations équivalentes de chaque objet de $\mathcal{D}$.

Si $\mathcal{D}$ est une catégorie $\mathcal{C}$-filtrée on peut définir une « catégorie quotient » $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ ayant les mêmes objets mais dont les morphismes sont considérés modulo les morphismes complètement continus. En d'autre termes, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(E, F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F)/\mathcal{K}(E, F)$, $\mathcal{K}(E, F)$ étant le sous-groupe fermé des morphismes complètement continus de E dans F (la composition des morphismes étant induite par celle de $\mathcal{D}$).

(*) Séance du 5 août 1968.

(1) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 275 et 341.
(2) M. Karoubi, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 1968, p. 161.

(Institut de Recherche mathématique avancée, rue René-Descartes, Strasbourg, Bas-Rhin.)