CARACTERISATION AXIOMATIQUE DES FONCTEURS K^n, $n \geqq 0$

Max Karoubi

1. Suites exactes de catégories. — Soient E et F deux groupes de Banach ([6]). Un homomorphisme borné $f : E \to F$ est dit « strict » si f est surjectif et si l'inverse de l'application bornée $E/\mathrm{Ker} f \to F$ induite par f est aussi bornée.

Définition 1. — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories en groupes de Banach. Un foncteur additif $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est dit « banachique » si l'application* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\varphi M, \varphi N)$ *est bornée. Il est dit « de Serre » si, de plus, cette application est un homomorphisme strict.*

On désigne par $\mathcal{B}$ la « catégorie » dont les objets sont les catégories en groupes de Banach, les morphismes étant les foncteurs de Serre.

Définition 2. — *Soit*

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{\theta} \mathcal{C} \xrightarrow{\chi} \mathcal{C}''$$

une suite d'objets et de morphismes de $\mathcal{B}$. Cette suite est dite « exacte » si le noyau de l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}''}(\chi E, \chi F)$$

est l'ensemble des $\mathcal{C}$-morphismes de E dans F complètement continus pour une filtration de $\mathcal{C}$ par la « catégorie image » $\theta(\mathcal{C}')$ ([7]).

Remarque. — La filtration de $\mathcal{C}$ par $\theta(\mathcal{C}')$ est essentiellement unique d'après la proposition 5 de ([6]).

Une catégorie en groupes de Banach peut être munie de deux filtrations évidentes. L'une (dite discrète) consiste à filtrer un objet E par lui-même; l'autre (dite grossière) consiste à filtrer E par o. Si $\mathcal{D}$ est une catégorie $\mathcal{C}$-filtrée, on a ainsi une suite exacte

$$o \to \mathcal{C} \to \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{C} \to o,$$

$\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{D}/\mathcal{C}$) étant munie de la filtration grossière (resp. discrète). Comme cas particulier intéressant citons la suite

$$0 \to \mathcal{E}(X) \to \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}'(X) \to 0$$

étudiée de manière implicite dans une Note antérieure (5) (du moins quand les fibrés considérés sont triviaux).

2. K-THÉORIE.

DÉFINITION 3. — *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie en groupes de Banach. La catégorie $\mathcal{D}$ est dite « flasque » s'il existe un foncteur banachique $\tau : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ isomorphe au foncteur $\tau + \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.*

Exemples. — La catégorie des espaces de Hilbert est flasque. En effet, il suffit de poser $\tau(E) = E \oplus E \oplus \ldots$ (somme hilbertienne de $\aleph_0$-exemplaires de E). Plus généralement, la catégorie des fibrés hilbertiens de base compacte est flasque.

THÉORÈME 4. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie en groupes de Banach. Il existe alors une suite exacte (dépendant canoniquement de $\mathcal{C}$)*

$$0 \to \mathcal{C} \xrightarrow{\theta_0} \mathcal{C}_1 \to \check{\mathcal{C}}_1 \to 0,$$

où $\mathcal{C}_1$ est une catégorie flasque.

Des raisonnements standard [*cf.* (2) par exemple] nous permettent alors d'affirmer l'existence d'une « résolution flasque canonique » de la catégorie $\mathcal{C}$:

$$0 \to \mathcal{C} \xrightarrow{\theta_0} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{\theta_1} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{\theta_2} \ldots \xrightarrow{\theta_{n-1}} \mathcal{C}_n \xrightarrow{\theta_n} \ldots$$

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie prébanachique dans le sens de (3) ou une simple catégorie additive, il en est de même des catégories $\mathcal{C}_n$. Dans le cas général on définit $S^n\mathcal{C}$, « suspension » $n^{\text{ième}}$ de $\mathcal{C}$, comme la catégorie quotient $\mathcal{C}_n/\theta_{n-1}(\mathcal{C}_{n-1})$. On convient que $S^0\mathcal{C} = \mathcal{C}$. Rappelons que si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive quelconque, $\tilde{\mathcal{C}}$ désigne la catégorie « pseudo-abélienne » associée à $\mathcal{C}$ [*cf.* (3); $\tilde{\mathcal{C}}$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}$ en ajoutant formellement les images de projecteurs d'objets de $\mathcal{C}$].

DÉFINITION ET THÉORÈME 5. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie en groupes de Banach. On désigne par $K^n(\mathcal{C})$, $n \geq 0$, le groupe de Grothendieck de $\widetilde{S^n(\mathcal{C})}$. Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach, ces groupes coïncident avec ceux définis à l'aide des algèbres de Clifford dans (3); en particulier, ils sont périodiques de période 8 dans le cas réel et 2 dans le cas complexe.*

DÉFINITION 6. — *Une « théorie de la cohomologie » sur $\mathcal{B}$ est la donnée de foncteurs F^n, $n \in \mathbb{N}$, de la catégorie $\mathcal{B}$ dans la catégorie des groupes abéliens et d'homomorphismes naturels*

$$\partial^{n-1} : \ F^{n-1}(\mathcal{C}'') \to F^n(\mathcal{C}')$$

définis pour toute suite exacte

$$0 \to \mathcal{C}' \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}'' \to 0.$$

On suppose en outre que $F^n(\mathcal{D}) = 0$ *si* $\mathcal{D}$ *est flasque et que la suite suivante est exacte :*

$$F^{n-1}(\mathcal{C}) \to F^{n-1}(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\partial^{n-1}} F^n(\mathcal{C}') \to F^n(\mathcal{C}) \to F^n(\mathcal{C}'').$$

THÉORÈME 7. — *Il existe une théorie de la cohomologie et une seule à isomorphisme près sur* $\mathcal{B}$ *telle que* $F^0(\mathcal{C}) = K(\tilde{\mathcal{C}})$. *On a en outre* $F^n(\mathcal{C}) \approx K^n(\mathcal{C})$.

La démonstration de ce théorème est délicate et nécessite le foncteur K_1 introduit par Bass (1).

Remarque importante. — La théorie précédente (en particulier le théorème 7) est encore valable si l'on remplace $\mathcal{B}$ par la catégorie ayant les mêmes objets mais dont les morphismes sont les *classes d'isomorphie* de foncteurs de Serre. La théorie peut aussi se développer dans des cadres plus restreints, par exemple celui des catégories prébanachiques ou celui des catégories additives.

3. GROUPES RELATIFS. — Considérons maintenant un foncteur de Serre essentiellement surjectif $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre deux catégories en groupes de Banach. Pour simplifier les raisonnements, on supposera que $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ (ce qui implique $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1 = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'_1$). On associe alors à φ la catégorie $\mathcal{D}(\varphi)$ suivante : les objets de $\mathcal{D}(\varphi)$ sont les objets de $\mathcal{C}_1$. Les flèches de $\mathcal{D}(\varphi)$ sont les classes de flèches de $\mathcal{C}_1$ pour la relation d'équivalence suivante : $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta$ est complètement continu [pour la $\theta_0(\mathcal{C})$-filtration] *et* $\varphi_1(\alpha - \beta) = 0$. On a alors un foncteur évident $\theta : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}(\varphi)$ défini par $\theta(E) = \theta_0(E)$ sur les objets et par $\theta(\alpha') = \theta_0(\alpha)$ pour $\varphi(\alpha) = \alpha'$, sur les flèches. On obtient ainsi une suite exacte

$$0 \to \mathcal{C}' \xrightarrow{\theta} \mathcal{D}(\varphi) \to S^1(\mathcal{C}) \to 0.$$

DÉFINITION ET THÉORÈME 8. — *Pour tout foncteur de Serre essentiellement surjectif* $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, *on pose*

$$K^{n+1}(\varphi) = K^n(\mathcal{D}(\varphi)) \quad \text{si } n \geqq 0 \quad (8).$$

On a alors la suite exacte

$$K^{n-1}(\mathcal{C}) \to K^{n-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{\partial^{n-1}} K^n(\varphi) \to K^n(\mathcal{C}) \to K^n(\mathcal{C}') \qquad (n \geqq 1)$$

où ∂^{n-1} *est induit par le foncteur* θ *et où les autres homomorphismes sont déduits de la fonctorialité évidente des groupes* $K^n(\varphi)$.

Ce théorème s'applique en particulier au foncteur « restriction des fibrés » $\mathcal{E}_T(X) \to \mathcal{E}_T(Y)$, où $\mathcal{E}_T(X)$ [resp. $\mathcal{E}_T(Y)$] désigne la catégorie des fibrés triviaux sur l'espace compact X (resp. sur le sous-espace fermé Y). On en déduit la suite exacte de cohomologie en K-théorie topologique

$$K^{n-1}(X) \to K^{n-1}(Y) \to K^n(X, Y) \to K^n(X) \to K^n(Y) \qquad (n \geqq 1).$$

sans utiliser les algèbres de Clifford ni la périodicité de Bott. On construit ainsi de manière élémentaire les foncteurs cohomologiques $K^n(X, Y)$. Cependant la périodicité de ces foncteurs (théor. 5) n'est pas évidente avec ce point de vue et doit être démontrée séparément.

(*) Séance du 12 août 1968.

(1) H. Bass, *K-theory and stable algebras* (*Publications Mathématiques de l'I. H. E. S.* 1964, n° 22, p. 5-60).

(2) R. Godement, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.

(3) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 275 et 341.

(4) M. Karoubi, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 1968, p. 161.

(5) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 305.

(6) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 325.

(7) C'est-à-dire la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont les objets sont isomorphes aux images des objets de $\mathcal{C}'$ par le foncteur φ.

(8) Si $\mathcal{C}' = 0$, on a $K^{n+1}(\varphi) = K^n(S^1(\mathcal{C})) \approx K^{n+1}(\mathcal{C})$.

(*Institut de Recherche mathématique avancée, rue René-Descartes, Strasbourg, Bas-Rhin.*)