8a

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le « théorème de Thom » en K-théorie équivariante* [1]. Note [*] de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

Nous donnons ici un schéma de démonstration de la conjecture 3.3.1 de [9] dans un cas particulier important, celui où la catégorie de Banach $\mathcal{C}$ est celle des espaces vectoriels réels de dimension finie. Cette conjecture fournit un moyen de calcul quasi algébrique de la K-théorie équivariante de l'espace de Thom d'un G-fibré *réel*. Les techniques développées ici s'inspirent pour l'essentiel de [9] et de [6] [*voir* aussi [4]].

1. Énoncés du « théorème de Thom ». — Soit G un groupe de Lie compact augmenté [2] dans le sens de [9] et soit X un espace compact où le groupe G opère continûment. Si E est un fibré *complexe* de base X, les automorphismes $\mathbf{C}$-linéaires et $\mathbf{C}$-antilinéaires (n'induisant pas nécessairement l'identité sur la base) forment de manière naturelle un groupe augmenté $\widetilde{\mathrm{Aut}}(\mathrm{E})$. Par définition, un $\overline{\mathrm{G}}$-fibré est la donnée d'un fibré complexe E et d'un homomorphisme continu de groupes augmentés

$$\tau: \quad \mathrm{G} \to \widetilde{\mathrm{Aut}}(\mathrm{E}).$$

De manière plus précise, à chaque élément g de G et à chaque point x de X, est associé un homomorphisme

$$(\tau(g))_x: \quad \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}_{g.x},$$

$\mathbf{C}$-linéaire (resp. $\mathbf{C}$-antilinéaire) si $g \in \mathrm{G}^0$ (resp. si $g \in \mathrm{G}^1$), dépendant continûment du couple (x, g). Considérons maintenant un G-fibré *réel* V de base X, muni d'une forme quadratique Q définie positive invariante par l'action de G. Par définition, un $\overline{\mathrm{G}}$-C(V)-*fibré* sur X est la donnée

— d'un $\overline{\mathrm{G}}$-fibré E sur X au sens précédent;

— d'une structure de C(V)-module sur E compatible avec la structure de $\overline{\mathrm{G}}$-module, C(V) désignant le fibré en algèbres de Clifford associé au couple (V, Q).

Ainsi, pour chaque vecteur v de V_x, $x \in \mathrm{X}$, on a une application linéaire

$$(\sigma(v))_x: \quad \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}_x,$$

dépendant continûment de v et telle que $(\sigma(v))^2 = \mathrm{Q}(v).\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

De plus, on a la relation $\tau(g)\sigma(v) = \sigma(g.v)\tau(g)$ pour $g \in \mathrm{G}$ et $v \in \mathrm{V}$. Cette définition vaut dans le cas où E est un fibré vectoriel de dimension finie ou hilbertien [dans ce dernier cas on supposera que les structures de $\overline{\mathrm{G}}$-module et de C(V)-module sont compatibles avec la métrique].

Dans le cas de la dimension finie, les $\overline{G}$-C(V)-fibrés $\mathbf{Z}_2$-gradués sont de manière naturelle les objets d'une catégorie de Banach graduée dans le sens de ([9]). Le groupe de Grothendieck gradué de cette catégorie sera noté $\mathrm{KR}_G^V(X)$. On définit de manière analogue un groupe $\mathrm{KR}_G^V(X, Y)$ lorsque X est localement compact et Y fermé dans X. On a alors $\mathrm{KR}_G^V(X, Y) \approx \mathrm{KR}_G^V(X - Y)$ ([3]).

Théorème 1. — *L'homomorphisme*

$$t: \quad \mathrm{KR}_G^{W \oplus V}(X) \to \mathrm{KR}_G^W(B(V), S(V)) \approx \mathrm{KR}_G^W(V),$$

défini dans ([9]) (§ 3.3), *est un isomorphisme.*

On peut donner un énoncé équivalent du théorème 1 en utilisant les structures multiplicatives en K-théorie. Pour cela, il nous faut décrire le groupe $\mathrm{KR}_G^V(X)$ à l'aide des opérateurs de Fredholm. Cette nouvelle définition, calquée sur celle du groupe $\overline{\mathrm{K}}^{p,q}(X)$ étudié dans une Note antérieure ([10]), peut être explicitée de la manière suivante : on considère les classes d'homotopie de couples (E, D), où E est un fibré hilbertien en $\overline{G}$-C(V)-modules gradués et où D est une « quasi-graduation » de E, c'est-à-dire une famille continue d'opérateurs de Fredholm autoadjoints, de degré un, commutant à l'action de G et anticommutant aux vecteurs v de V. On montre alors, comme dans ([10]), que le groupe $\mathrm{KR}_G^V(X)$ s'identifie au quotient du monoïde formé avec de telles paires par la relation d'équivalence engendrée par l'addition de paires (E, D), où D est une famille continue d'opérateurs inversibles. Cette nouvelle définition permet d'interpréter simplement l'homomorphisme t du théorème 1 par une « formule » du type $t(\sigma(E, w, v; D)) = \sigma(E, w; v + D)$ [*cf.* ([10])]. Les considérations de ([10]) relatives aux structures multiplicatives se généralisent aussi de manière triviale dans ce contexte. Soit maintenant V^- le fibré réel sous-jacent à V, G opérant sur V^- par les formules suivantes :

$$g \star v = g.v \quad \text{si} \quad g \in G^0$$
$$g \star v = -g.v \quad \text{si} \quad g \in G^1.$$

On voit alors aisément que $T = V^- \oplus V$ est un $\overline{G}$-fibré et que le fibré en algèbres extérieures complexes $\Lambda(T)$ est un $\overline{G}$-C(T)-fibré $\mathbf{Z}_2$-gradué [*cf.* ([5])]. Le couple $(\Lambda(T), o)$ définit donc ainsi un élément de $\mathrm{KR}_G^T(X) = \mathrm{KR}_G^{V^- \oplus V}(X)$. Par définition, la « classe de Thom » U_V du fibré V est l'image de cet élément par l'homomorphisme

$$t: \quad \mathrm{KR}_G^{V^- \oplus V}(X) \to \mathrm{KR}_G^{V^-}(V).$$

Le théorème 1 est alors équivalent au théorème suivant [*cf.* aussi ([4]) et ([9])] :

Théorème 2. — *Le cup-produit par la classe de Thom* U_V *définit un isomorphisme*

$$\varphi: \quad \mathrm{KR}_G^W(X) \to \mathrm{KR}_G^{W \oplus V^-}(V).$$

2. Esquisse de la démonstration du théorème 1. — Grâce à la suite

$$\mathrm{KR}_G^{W\oplus V\oplus V^-\oplus V}(X) \xrightarrow{t_1} \mathrm{KR}_G^{W\oplus V\oplus V^-}(V) \xrightarrow{t_2} \mathrm{KR}_G^{W\oplus V}(V^-\oplus V) \xrightarrow{t_3} \mathrm{KR}_G^{W}(V\oplus V^-\oplus V)$$

et à la transitivité des homomorphismes t, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème 1 dans le cas où V est un $\overline{G}$-fibré T. Dans ce cas, le groupe $\mathrm{KR}_G^{W\oplus T}(X)$ est isomorphe à $\mathrm{KR}_G^{W}(X)$ et l'homomorphisme t s'interprète comme le cup-produit par la « classe de Bott » $\lambda_T \in \mathrm{KR}_G^{0}(T)$. Cette classe de Bott est simplement l'image de l'élément $\sigma(\Lambda(T), o)$ par l'homomorphisme

$$t : \quad \mathrm{KR}_G^{T}(X) \to \mathrm{KR}_G^{0}(T).$$

Notons maintenant $\mathrm{KR}_G^{(V)}(X)$ le groupe de Grothendieck (ordinaire) de la catégorie des fibrés en $\overline{G}$-C(V)-modules (non gradués). En remarquant que le groupe $\mathrm{KR}_G^{V}(X)$ est le groupe de Grothendieck d'un foncteur [(8), (9)], on démontre une suite exacte du type suivant :

$$\mathrm{KR}_G^{(V\oplus 1)}(X\times \mathbf{R}) \to \mathrm{KR}_G^{(V)}(X\times \mathbf{R}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{KR}_G^{V}(X) \to \mathrm{KR}_G^{(V\oplus 1)}(X) \to \mathrm{KR}_G^{(V)}(X).$$

Grâce au lemme des cinq, on est ainsi ramené à démontrer que le cup-produit par la classe de Bott λ_T induit un isomorphisme β entre les groupes $\mathrm{KR}_G^{(V)}(X)$ et $\mathrm{KR}_G^{(V)}(T)$. Pour cela, on procède en deux étapes :

1° La démonstration élémentaire du théorème d'Atiyah-Bott se transcrit presque sans changement pour montrer que β est un isomorphisme si T est un $\overline{G}$-fibré de rang 1 ou, plus généralement, somme de $\overline{G}$-fibrés de rang 1.

2° Dans le cas général, on se ramène au cas précédent grâce aux opérateurs elliptiques et par des techniques de scindage classiques [*cf.* (6), (4)].

3. Quelques applications du théorème 1 [*voir* aussi (7), (9), (11)].

Théorème 3. — *Soit* M *une variété compacte orientable de dimension paire (resp. multiple de* 4*). Alors, tout élément de* K(B(V), S(V)) [*resp.* KR(B(V), S(V))] (12) *est la classe du symbole d'un opérateur différentiel elliptique complexe (resp. réel),* V *désignant le fibré cotangent à* M.

Théorème 4. — *Soit* M *une variété orientable de dimension impaire (resp. de la forme* $4p+1$*) et soit* D *un opérateur différentiel elliptique complexe (resp. réel) sur* M. *Alors la classe du symbole de* D *dans le groupe* K(B(V), S(V)) [*resp.* KR(B(V), S(V))] *est nulle.*

Le théorème 4 se démontre en remarquant que le symbole d'un opérateur différentiel définit de manière naturelle un élément de $\mathrm{KR}_{\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2}^{V}(M)$. Ces deux théorèmes sont d'ailleurs vrais aussi pour des familles d'opérateurs différentiels. En employant les mêmes techniques, on démontre par exemple la proposition suivante :

Proposition 5. — *Soit* D *un opérateur différentiel elliptique réel symétrique gauche* ($D^* = -D$) *et d'ordre pair sur une variété orientable compacte de dimension* $4p+1$ ou $4p+2$. *Alors le noyau de* D *est de dimension paire.*

Note ajoutée à la correction des épreuves (27 Février 1969). Le théorème 1 a comme autre application (de nature plus topologique) le calcul explicite de $KR_G(S(V), S(W))$, W étant un sous-fibré vectoriel de V invariant par l'action de G. Ceci recouvre les résultats de (5) et ceux de (9) § 3.2 et fera l'objet d'une publication prochaine.

(*) Séance du 28 octobre 1968.

(1) L'auteur bénéficie du support de la « National Science Foundation » (Grant GP-7952 X).

(2) C'est-à-dire muni d'un homomorphisme continu $\varepsilon : G \to \mathbf{Z}_2$. On posera $G^0 = \operatorname{Ker} \varepsilon$ et $G^1 = G - G^0$.

(3) Par abus d'écriture, on notera encore V l'image inverse de V par une application continue $f : Z \to X$ (ici $Z = X - Y$).

(4) M. F. Atiyah, *The quarterly Journal of Math.*, 1968.

(5) M. F. Atiyah, R. Bott et A. Shapiro, *Topology*, 3, 1964, p. 3-38.

(6) M. F. Atiyah et G. B. Segal, *Equivariant K-theory* (Lecture notes), Oxford, 1965.

(7) M. F. Atiyah, G. B. Segal et I. M. Singer, *Ann. Math.*, 87, 1968, p. 484-604.

(8) H. Cartan, *Travaux de Karoubi sur la K-théorie*, Séminaire Bourbaki, 1968.

(9) M. Karoubi, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 1, 1968, p. 161-270.

(10) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 305.

(11) R. S. Palais, *Annals of Math. Studies*, 57, 1965.

(12) On note $KR(B(V), S(V))$, le groupe $KR_{\mathbf{Z}_2}(B(V), S(V))$, $\mathbf{Z}_2$ opérant sur V par l'involution antipodique et étant muni de l'augmentation $\varepsilon = \mathrm{Id}$.

(*The Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., 08540, U.S.A.*)