Ja

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 1305-1307 (20 mai 1970). Série A

ALGÈBRE ET TOPOLOGIE. — *La périodicité de Bott en* K-*théorie générale.*

Note (*) de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

La « K-théorie générale » désigne ici la K-théorie axiomatique développée dans la Note ([6]). Les résultats principaux que l'on établira seront valables aussi bien en K-théorie algébrique qu'en K-théorie topologique. Le but de cette Note est le théorème 2 qui est d'ordre très général mais qui implique presque immédiatement le théorème de périodicité de Bott dans le cas complexe. Le théorème 2 se présente ainsi comme une justification *a posteriori* de la définition des foncteurs K^n, $n \in \mathbf{Z}$, proposée dans la Note ([6]), Note dont nous conserverons les notations et la terminologie.

1. Soit A un anneau de Banach dans le sens de ([6]) (par exemple un anneau discret, ou une algèbre de Banach réelle, complexe ou p-adique). On désigne par $A\{t, t^{-1}\}$ l'anneau des séries formelles $T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n t^n$ avec $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \|a_n\| < +\infty$ et par ΓA l'idéal formé des séries satisfaisant à la condition supplémentaire $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = 0$. On peut définir un homomorphisme $\varphi : A\{t, t^{-1}\} \to SA$ de la manière suivante : à la série T on associe dans SA la classe de la matrice infinie

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Le but de cette Note est d'étudier l'effet de cet homomorphisme sur les groupes K^n [noter que $K^n(SA) = K^{n+1}(A)$ pour $n \geq 0$ par définition des groupes K^n]. On notera $A_{r,n}$ ou $A\{x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_n, t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}\}$ l'anneau des séries formelles $\sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \in \mathbf{N}^r \\ j_1, \dots, j_n \in \mathbf{Z}^n}} a_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_n} x_1^{i_1} \dots x_r^{i_r} t_1^{j_1} \dots t_n^{j_n}$ telles que la somme des quasi-normes de leurs coefficients soit bornée (noter que $A_{0,1} = A\{t, t^{-1}\}$ et que $A_{1,0} = A\{x\}$).

Définition 1. — *Soit* A *un anneau de Banach. On dira que* A *est* « K-*régulier* » *si, pour tout couple* (r, n), *l'inclusion naturelle de* $A_{0,n}$ *dans* $A_{r,n}$ *induit un isomorphisme* $K^0(A_{0,n}) \approx K^0(A_{r,n})$.

Exemples. — Tout anneau noethérien régulier discret est K-régulier (théorèmes de Hilbert et de Grothendieck), d'où la terminologie. Il en est de même des algèbres de Banach réelles ou complexes. Si A est K-régulier, les anneaux $A\{x\}$, EA, ΩA, $A\{t, t^{-1}\}$, $\tilde{A}$, CA et SA sont K-réguliers.

Soit $A\{t\}$ (resp. $A\{t^{-1}\}$) le sous-anneau de $A\{t, t^{-1}\}$ formé des séries ne comportant que des puissances de t positives (resp. négatives). A un foncteur covariant F quelconque de la catégorie des anneaux de Banach dans celle des groupes abéliens, on associe le foncteur LF défini par la formule

$$\mathrm{LF}(A) = \mathrm{Coker}\,F(A\{t\}) \oplus F(A\{t^{-1}\}) \to F(A\{t, t^{-1}\}) \quad (^1)$$

[noter que $\mathrm{LK}^n(A) = K^n(\Gamma A)$ si $n < 0$ ou si A est K-régulier, le foncteur K^n étant alors un invariant homotopique de A; *cf.* théorème 2].

Théorème 2. — *Soit* A *un anneau de Banach quelconque. L'homomorphisme* $\varphi : A\{t, t^{-1}\} \to SA$ *induit pour tout* n *un isomorphisme* $\mathrm{LK}^n(A) \approx K^n(SA)$. *En outre :*

(*a*) *si* $n \geq 0$, $K^n(SA) = K^{n+1}(A)$. *Donc les foncteurs* K^{n+1} *et* LK^n *sont toujours isomorphes dans ce cas* [8];

(*b*) *si* $n < 0$ *et si* A *est* K-*régulier*, $K^n(SA)$ *est isomorphe à* $K^{n+1}(A)$ *et on a encore* $K^{n+1} \approx \mathrm{LK}^n$;

(*c*) *si* A *est* K-*régulier, posons* $K^{p,q}(A) = K(S^p\Omega^q(A))$. *Alors* $K^{p,q}(A)$ *est naturellement isomorphe à* $K^{p-q}(A)$.

Corollaire 3. — *Soit* A *une algèbre de Banach réelle ou complexe. L'homomorphisme* φ *induit un isomorphisme entre les groupes d'homotopie* $\pi_n(\mathrm{GL}(\Gamma A))$ *et* $\pi_n(\mathrm{GL}(SA))$. *En particulier*, $\mathrm{GL}(\Gamma A)$ *et* $\mathrm{GL}(SA)$ *ont le même type d'homotopie.*

En effet, $K^{-n-1}(B) \approx \pi_n(\mathrm{GL}(B))$ pour toute algèbre de Banach réelle ou complexe.

Corollaire 4 (théorème de périodicité de Bott complexe). — *Soit* A *une algèbre de Banach complexe. Alors* $K^{n-1}(A) \approx K^{n+1}(A)$.

Ce dernier corollaire résulte essentiellement du fait que $\mathrm{GL}(\Gamma A)$ et $\mathrm{GL}(\Omega A)$ ont le même type d'homotopie [on utilise ici la transformation $t = \exp(2i\pi\theta)$ pour se ramener aux fonctions continues sur le cercle].

2. L'isomorphisme de « périodicité » $\mathrm{LK}^n \approx K^{n+1}$ peut aussi s'interpréter à l'aide d'un « cup-produit » convenable. De manière précise, considérons trois anneaux de Banach A, B et C ainsi qu'un homomorphisme bilinéaire borné

$$\psi : A \times B \to C$$

qui respecte les structures d'anneaux de chacun des facteurs. On peut alors démontrer le théorème suivant :

Théorème 5. — *Il existe des homomorphismes naturels uniques*

$$\psi^{n,p} : K^{-n}(A) \otimes K^{-p}(B) \to K^{-n-p}(C)$$

qui satisfont aux propriétés suivantes :

(*a*) $\psi^{0,0}$ *coïncide avec le cup-produit usuel en* K-*théorie* [*cf.* (5), § 2.4];

(*b*) *les homomorphismes* $\psi^{n,p}$ *sont compatibles* (avec un signe convenable) *avec les opérateurs bord associés à des fibrations entre anneaux de Banach.*

Soit maintenant u l'élément de $K^{-1}(\mathbf{Z}\{t, t^{-1}\})$ défini par l'automorphisme t et soit $\bar{u}$ sa « restriction » à $K^{-1}(\Gamma\mathbf{Z})$ ($\mathbf{Z}$ étant muni de la valeur absolue usuelle). L'homomorphisme bilinéaire

$$A \times \Gamma\mathbf{Z} \to \Gamma A$$

permet de définir le cup-produit

$$K^{-n}(A) \times K^{-1}(\Gamma\mathbf{Z}) \to K^{-n-1}(\Gamma A).$$

Théorème 6. — *Supposons que* A *soit* K-*régulier. Alors le cup-produit par* $\bar{u}$ *induit un isomorphisme entre les groupes* $K^{-n}(A)$ *et* $K^{-n-1}(\Gamma A)$, *isomorphisme qui coïncide avec celui défini dans le théorème* 2 (*b*).

Remarque. — On a bien entendu un théorème analogue pour les groupes K^n avec $n \geq 0$.

Considérons maintenant le groupe de Milnor $K_2(A)$, A discret [*cf.* (7) pour les notations]. A une matrice formelle élémentaire e_{ji}^{λ}, $\lambda \in A$, on associe le « chemin » $x \mapsto e_{ji}^{\lambda x}$. On définit ainsi un homomorphisme entre le groupe de Steinberg ST(A) et le groupe $GL(EA)/GL^0(\Omega A)$ [$GL^0(\Omega A)$ est le groupe des lacets homotopes à l'identité]. Cette correspondance induit un homomorphisme $h : K_2(A) \to K^{-2}(A)$.

Théorème 7. — *L'homomorphisme*

$$h : \quad K_2(A) \to K^{-2}(A)$$

est surjectif si A *est un anneau noethérien régulier* (2) (par exemple un corps). *En outre :*

(*a*) *h est compatible avec les structures multiplicatives en ce sens que, dans la situation du théorème* 5, *on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} K_1(A) \times K_1(B) & \longrightarrow & K_2(C) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ K^{-1}(A) \times K^{-1}(B) & \longrightarrow & K^{-2}(C) \end{array}$$

(*b*) *Pour tout anneau discret* A, *on a des isomorphisme naturels*

$$K_2(SA) \approx K_1(A) \quad (3) \qquad \text{et} \qquad K_1(SA) \approx K(A).$$

(*c*) *Soit* v *l'élément de* $K_1(Z[t, t^{-1}])$ *défini par la multiplication par t. Le cup-produit par* v *définit alors un isomorphisme de* $K_1(A)$ *sur un facteur direct de* $K_2(A[t, t^{-1}])$.

(*) Séance du 11 mai 1970.
(1) La définition de LF dans le cas discret est due à Bass (4).
(2) Ce résultat a été prouvé conjointement par Villamayor et l'auteur.
(3) Ce résultat à été prouvé indépendamment par Farrell et Wagoner.
(4) H. Bass, *Algebraic* K-*theory* (Benjamin).
(5) M. Karoubi, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, 1, 1968, p. 161-270.
(6) M. Karoubi et O. Villamayor, *Comptes rendus*, 269, série A, 1969, p. 416.
(7) R. G. Swan, *Algebraic K-theory* (*Lecture Notes in Math.*, n° 76).
(8) Dans le cas discret on retrouve un résultat de (6).

(*Institut de Recherche mathématique avancée,*
rue René-Descartes,
67-Strasbourg, Bas-Rhin.)

181836. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.