C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269 (8 septembre 1969). Série A — 387

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. — *Groupe de Brauer et coefficients locaux en K-théorie.* Note (*) de MM. **Peter Donovan** et **Max Karoubi** [1], transmise par M. Henri Cartan.

Analogue en K-théorie de la cohomologie à coefficients locaux. Structures multiplicatives et opérations d'Adams généralisées.

1. Groupe de Brauer gradué d'un espace topologique [2]. — Soit k le corps des réels ou celui des complexes. Une k-algèbre $\mathbf{Z}_2$-graduée de dimension finie A est dite centrale (resp. simple) si les éléments de degré zéro du centre de A se réduisent aux scalaires (resp. si les seuls idéaux gradués sont O et A). Pour tout espace topologique X, on désigne par $\mathcal{A}(X)$ la catégorie des fibrés sur X dont la fibre est une algèbre $\mathbf{Z}_2$-graduée centrale simple. Pour le produit tensoriel gradué des fibrés en algèbres, les classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{A}(X)$ forment un monoïde abélien $\mathcal{M}(X)$. Un élément $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{M}(X)$ est dit *négligeable* s'il est de la forme End E, où E est un fibré vectoriel $\mathbf{Z}_2$-gradué. Deux éléments $\mathfrak{A}_0$ et $\mathfrak{A}_1$ de $\mathcal{M}(X)$ sont dits *équivalents* s'il existe deux éléments négligeables $\mathfrak{B}_0$ et $\mathfrak{B}_1$ tels que $\mathfrak{A}_0 \hat{\otimes} \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}_1 \hat{\otimes} \mathfrak{B}_1$. Soit GBr(X) le monoïde formé avec les classes d'équivalence.

Théorème 1. — *Le monoïde* GBr(X) *est un groupe abélien qu'on appelle le « groupe de Brauer gradué de* X » [3]. *Pour* $k = \mathbf{R}$ (*resp.* $k = \mathbf{C}$), *posons* GBr(X) = GBrO(X) [*resp.* GBr(X) = GBrU(X)]. *Si* X *est un* CW-*complexe fini on a alors des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{GBrO}(X) \approx H^0(X; \mathbf{Z}_8) \times H^1(X; \mathbf{Z}_2) \times H^2(X; \mathbf{Z}_2) \quad (^2),$$
$$\mathrm{GBrU}(X) \approx H^0(X; \mathbf{Z}_2) \times H^1(X; \mathbf{Z}_2) \times \mathrm{Tors}(H^3(X; \mathbf{Z})),$$

où la structure additive des seconds facteurs est induite par le cup-produit tronqué et le Bockstein [4].

Théorème 2. — *Soient* X *un* CW-*complexe fini connexe,* V *un fibré vectoriel réel sur* X *muni d'une forme quadratique définie négative et* C(V) *le fibré en algèbres de Clifford correspondant* [[6], [10]]. *Alors la classe de* C(V) *dans* GBrO(X) *correspond au triple* [dim V mod 8, $w_1(V)$, $w_2(V)$] *où* $w_1(V)$ *et* $w_2(V)$ *sont les deux premières classes de Stiefel-Whitney de* V [2]. *De même, la classe de* $C(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ *dans* GBrU(X) *correspond au triple* [dim V mod 2, $w_1(V)$, $\beta(w_2(V))$].

2. Coefficients locaux, isomorphisme de Thom. — Soit $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0 \oplus \mathfrak{A}^1$ un objet de $\mathcal{A}(X)$. En suivant [11], considérons les paires (E, D) où :

a. E est un fibré hilbertien $\mathbf{Z}_2$-gradué de base X muni d'une structure de $\mathfrak{A}$-module $\mathbf{Z}_2$-gradué.

b. $D : E \to E$ est une famille continue d'opérateurs de Fredholm auto-adjoints, de degré un, vérifiant la relation $D\lambda = (-1)^i \lambda . D$ pour toute section λ de $\mathfrak{A}^i$.

Les classes d'homotopie de telles paires (E, D) forment un monoïde abélien (pour la somme de Whitney des fibrés hilbertiens et des opérateurs). Le groupe de Grothendieck correspondant sera noté $K^{\mathfrak{A}}(X)$ ($KO^{\mathfrak{A}}(X)$ dans le cas réel, $KU^{\mathfrak{A}}(X)$ dans le cas complexe).

Proposition et définition 3. — *Le groupe* $K^{\mathfrak{A}}(X)$ *ne dépend (à isomorphisme près) que de la classe* α *de* $\mathfrak{A}$ *dans* GBr(X). *Par abus d'écriture, on posera* $K^{\alpha}(X) = K^{\mathfrak{A}}(X)$ [$KO^{\alpha}(X) = KO^{\mathfrak{A}}(X)$ *dans le cas réel,* $KU^{\alpha}(X) = KU^{\mathfrak{A}}(X)$ *dans le cas complexe*].

En suivant encore [11], on définit un « cup-produit »

$$K^{\alpha}(X) \times K^{\alpha'}(X') \xrightarrow{\smile} K^{\alpha \hat{\otimes} \alpha'}(X \times X') \quad [3]$$

par la formule

$$(E, D) \smile (E', D') = (E \hat{\otimes} E', D \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} D')$$

Si $X = X'$, on en déduit un cup-produit « interne »

$$K^{\alpha}(X) \times K^{\alpha'}(X) \to K^{\alpha\alpha'}(X) \quad [3].$$

Il en résulte que $\bigoplus_{\alpha \in GBr(X)} K^{\alpha}(X)$ est un anneau gradué par le groupe GBr(X). Si α et α' sont représentés par des fibrés triviaux on retrouve le cup-produit usuel en K-théorie [*cf.* [11]]. Toutes ces définitions se généralisent sans peine au cas où on considère des espaces X avec familles de support. En particulier, si X est un espace localement compact, on note $K_c^{\alpha}(X)$ le groupe K^{α} à support compact de X [*cf.* [11] pour les détails].

Soit maintenant V un fibré vectoriel réel de base compacte X. Munissons V d'une forme quadratique définie positive Q et désignons par V^- le fibré V muni de la forme quadratique $-Q$.

D'après [10] (prop. 1.1), le fibré en algèbres extérieures $T = \Lambda(V)$ est canoniquement un fibré en modules sur le fibré en algèbres de Clifford $C(V) \hat{\otimes} C(V^-) \approx C(V \oplus V^-)$. La « classe de Thom » U_V de V est alors l'image de la paire (T, o) par l'homomorphisme fondamental

$$t : \quad K^{C(V \oplus V^-)}(X) \to K_c^{\pi^* C(V^-)}(V),$$

$\pi : V \to X$, défini dans [11] avec des notations légèrement différentes (pour $k = \mathbf{C}$, il convient évidemment de considérer les algèbres de Clifford complexes au lieu des algèbres de Clifford réelles). La classe U_V de V peut ainsi être interprétée comme un élément de $K^{\alpha(V)}(V)$ où $\alpha(V)$ est, d'après les théorèmes 1 et 2, une fonction des deux premières classes de Stiefel-Whitney de V.

Théorème 4. — *Le cup-produit par la classe de Thom* U_V *induit un isomorphisme de* $K^{\gamma}(X)$ *sur* $K_c^{(\pi^*\gamma).\alpha(V)}(V)$ *pour tout élément* γ *de* GBr(X).

Remarque. — Nous n'avons donné que la forme la plus simple du théorème de Thom avec des coefficients locaux. Celui-ci peut se généraliser dans plusieurs directions grâce à des techniques éprouvées [*cf.* (12), (13), etc.].

3. Opérations d'Adams généralisées. — Désignons par Φ_n le $n^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique et $\Omega_n = \mathbf{Z}[\omega]/\Phi_n(\omega)$. Le produit tensoriel symétrique des fibrés [(7), (8)] permet de démontrer le théorème suivant :

Théorème 5. — *Soit n un entier impair si $k = \mathbf{C}$ ou de la forme $4p+1$ si $k = \mathbf{R}$. Il existe alors des opérations cohomologiques*

$$\psi^{n,\alpha} : \quad K^{\alpha}(X) \to K^{\alpha^n}(X) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \Omega_n \qquad [\alpha \in \mathrm{GBr}(X)],$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

1° $\psi^{n,\alpha}(x+y) = \psi^{n,\alpha}(x) + \psi^{n,\alpha}(y) \qquad [x \in K^{\alpha}(X),\ y \in K^{\alpha}(X)]$;

2° $\psi^{n,\alpha}$ *est compatible avec le cup-produit, ce qui signifie que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
K^{\alpha}(X) \times K^{\alpha'}(X') \arrow[rr, "\smile"] \arrow[d, "\psi^{n,\alpha} \times \psi^{n,\alpha'}"'] & & K^{\alpha \hat{\otimes} \alpha'}(X \times X') \arrow[d, "\psi^{n,\alpha \hat{\otimes} \alpha'}"] \\
(K^{\alpha^n}(X) \times K^{\alpha'^n}(X')) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \Omega_n \arrow[r, "\smile"] & (K^{\alpha^n \hat{\otimes} \alpha'^n}(X \times X')) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \Omega_n \simeq & K^{(\alpha \hat{\otimes} \alpha')^n}(X \times X') \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \Omega_n.
\end{tikzcd}$$

3° $\psi^{n,0}$ *se factorise en*

$$K^0(X) \xrightarrow{\psi^n} K^0(X) \to K^0(X) \otimes \Omega_n$$

où ψ^n est l'opération introduite par Adams (5).

(*) Séance du 18 août 1969.

(1) Les deux auteurs ont bénéficié de l'aide de la « National Science Foundation » (Grant G. P. 7952 X).

(2) Ce résultat a été trouvé indépendamment par Richard R. Patterson.

(3) On note multiplicativement la loi de composition dans $\mathrm{GBr}(X)$. Si $\alpha \in \mathrm{GBr}(X)$ et $\alpha' \in \mathrm{GBr}(X')$, on note de même $\alpha \hat{\otimes} \alpha'$ l'élément de $\mathrm{GBr}(X \times X')$ qui lui correspond par produit tensoriel gradué.

(4) De manière plus précise, si $\alpha = (\lambda, w_1, w_2)$ et $\alpha' = (\lambda', w'_1, w'_2)$ sont deux éléments de $H^0(X; Z_2) \times H^1(X; Z_2) \times H^2(X; Z_2)$, on a $\alpha\alpha' = (\lambda + \lambda',\ w_1 + w'_1,\ w_1 w'_1 + w_2 + w'_2)$. Dans le cas complexe on a une formule analogue

$$(\lambda, w_1, W_3).(\lambda', w'_1, W'_3) = (\lambda + \lambda',\ w_1 + w'_1,\ \beta(w_1 w'_1) + W_3 + W'_3),$$

où $\beta : H^2(X; Z_2) \to H^3(X; Z)$ est le Bockstein.

(5) J. F. Adams, *Ann. Math.*, 75, 1962, p. 603-632.

(6) M. F. Atiyah, R. Bott et A. Shapiro, *Topology*, 3, 1964, p. 3-38.

(7) M. F. Atiyah, *Quart. J. Math.*, Oxford Ser., 17, 1966, p. 165-193.

(8) W. End, *Dissertation*, Saarbücken, 1968.

(9) A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer*, Séminaire Bourbaki, 290, 1965.

(10) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 305.

(11) M. Karoubi, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e, série, 1, 1968, p. 161-270.

(12) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 269, série A, 1969, p. 596.

(13) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 269, série A, 1969, p. 710.

(*School of Mathematics,*
University of N. S. W.;
Kensington 2033, *Australia*
et *Institut de Mathématique,*
rue René-Descartes,
67-*Strasbourg, Bas-Rhin.*)