K-THEORIE ALGEBRIQUE ET K-THEORIE TOPLOGIQUE

Max Karoubi et Orlando Villamayer

1. Définitions. — Soit A un anneau quelconque (non nécessairement unitaire) muni d'une « quasi-norme » [7]. On dit que A est un *anneau de Banach* si A est complet et s'il existe une constante C telle que $\| xy \| \leqq C \| x \| \times \| y \|$. Un homomorphisme $f : A \to B$ entre deux anneaux de Banach A et B est *borné* si $\| f(x) \| \leqq D \| x \|$ pour une certaine constante D.

Exemples :

(1) Les algèbres de Banach réelles, complexes ou p-adiques [8] sont évidemment des anneaux de Banach.

(2) Un anneau quelconque peut être considéré comme un anneau de Banach lorsqu'on le munit de la « quasi-norme discrète » [7].

(3) Si A est un anneau de Banach, considérons le sous-anneau $A\{x\{$ de $A[[x]]$ formé des séries formelles $S = \sum_{i \geqq 0} a_i x^i$ telles que $\sum_{i \geqq 0} \| a_i \| < +\infty$. Alors $A\{x\{$ est évidemment un anneau de Banach pour la quasi-norme $\| S \| = \sum_{i \geqq 0} \| a_i \|$. Plus généralement, le sous-anneau $A\{x_1, \ldots, x_n\{$ de $A[[x_1, \ldots, x_n]]$ formé des séries telles que la somme des quasi-normes des coefficients soit finie, est un anneau de Banach. On notera q_i, $i = 0, 1$, les applications de $A\{x\{$ dans A définies par $q_i(S) = S(i)$. Le noyau EA de q_0 est « *l'anneau des chemins* » de A. L'intersection ΩA des noyaux de q_0 et q_1 est « *l'anneau des lacets* » de A.

(4) Soit de nouveau A un anneau de Banach et $M = (a_{ji})$ une matrice infinie à coefficients dans A. On pose $\| M \| = \operatorname{Sup}_i \sum_j a_{ji}$ (norme L^1 des opérateurs). Les matrices M telles que $\| M \| < +\infty$ forment un anneau de Banach B. Une matrice diagonale M est dite de type fini si elle ne contient qu'un nombre fini d'éléments de A différents. Le « *cône* » CA de A est alors le plus petit anneau de Banach contenu dans B qui contient les matrices diagonales de type fini ainsi que les matrices de permutation (finies ou infinies). La limite inductive $\varinjlim A(n)$ suivant les inclusions

$$M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est un sous-anneau de CA (non fermé en général). Son adhérence $\tilde{A}$ est « *l'anneau stabilisé* » de A. C'est un idéal dans CA; l'anneau de Banach quotient $CA/\tilde{A}$ est la « *suspension* » SA de A.

Tout anneau de Banach A est une algèbre sur **Z** muni de la valeur absolue usuelle. Notons A^+ le groupe $A \oplus Z$ muni de la multiplication $(a, \lambda).(a', \lambda') = (aa' + \lambda a' + \lambda' a, \lambda\lambda')$. L'augmentation $\varepsilon : A^+ \to \mathbf{Z}$ induit un homomorphisme de groupes $\varepsilon_n : GL(A^+, n) \to GL(\mathbf{Z}, n)$. On posera $GL(A, n) = \operatorname{Ker} \varepsilon_n$ et $GL(A) = \varinjlim GL(A, n)$. Si A est un anneau unitaire, on retrouve (à isomorphisme près) les définitions classiques.

Un homomorphisme borné $f : A \to B$ induit de manière évidente un homomorphisme borné de $A\{x_1, \ldots, x_n\{$ dans $B\{x_1, \ldots, x_n\{$ que nous noterons f_n. On dit que $f_n(\alpha) = B$ est une « *fibration* » si, pour tout élément $\beta = \beta(x_1, \ldots, x_n)$ de $GL(B\{x_1, \ldots, x_n\})$ avec $\beta(0, \ldots, 0) = 1$, il existe un élément α de $GL(A\{x_1, \ldots, x_n\})$ tel que $f_n(\alpha) = \beta$. On dit que f est une « *cofibration* » si f est surjectif et si la norme de B est équivalente à la norme induite par f.

Remarques et exemples. — Toute fibration est un homomorphisme surjectif. Si A et B sont des algèbres de Banach réelles ou complexes, les notions de fibration et de cofibration coïncident et équivalent au fait que f est surjectif (théorème de Banach). Si B est un anneau noethérien régulier discret, un théorème de Bass, Heller et Swan ([4]) implique que tout homomorphisme surjectif $A \to B$ est une fibration. L'homomorphisme $EA \to A$ induit par q_1 est une fibration. Si $A \to B$ est une fibration, il en est de même de $A\{x\{ \to B\{x\{$, $EA \to EB$, $\Omega A \to \Omega B$, etc. De manière duale, les homomorphismes $CA \to SA$, $CA \to CB$, $SA \to SB$, etc. sont des cofibrations si $A \to B$ l'est.

Soit

(E) $$0 \to A' \to A \xrightarrow{f} A'' \to 0$$

une suite exacte d'anneaux de Banach et d'homomorphismes bornés. Par abus de langage, on dit que (E) est une fibration (resp. une cofibration) si la norme de A' est équivalente à la norme induite par A et si f est une fibration (resp. une cofibration).

2. Définition axiomatique des foncteurs K^n. — Soit A un anneau *unitaire* quelconque. Le groupe K(A) est le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathfrak{L}(A)$ des A-modules à droite qui sont projectifs de type fini [*cf.* ([4]), p. 445 ou ([8]), p. 189]. Le groupe K(A) est un foncteur *covariant* de l'anneau A. Si A n'est pas nécessairement unitaire, on étend cette définition en posant $K(A) = \operatorname{Ker}(K(A^+) \xrightarrow{K(\varepsilon)} K(\mathbf{Z}))$.

Soit $\mathcal{B}$ la « catégorie » des anneaux de Banach, les morphismes étant les homomorphismes bornés. Une *théorie de la cohomologie positive* (resp. *négative*) sur $\mathcal{B}$ est la donnée de foncteurs K^n, $n \geqq 0$ (resp. $n \leqq 0$) de $\mathcal{B}$

dans la catégorie des groupes abéliens ainsi que d'opérateurs de connexion naturels

$$\partial^{n-1} : \quad K^{n-1}(A'') \to K^n(A'), \qquad n > 0 \quad (\text{resp. } n \leqq 0,$$

définis pour toute cofibration (E) [resp. pour toute fibration (E)]. On suppose en outre que la suite

$$K^{n-1}(A') \to K^{n-1}(A) \to K^{n-1}(A'') \xrightarrow{\partial^{n-1}} K^n(A') \to K^n(A) \to K^n(A'')$$

est exacte pour les valeurs de n où elle est définie.

Théorème 1. — *Il existe une théorie de la cohomologie positive et une seule à isomorphisme près sur* $\mathcal{B}$ *qui satisfait aux axiomes suivants :*

(1) *L'inclusion naturelle* $A \to \tilde{A}$ *induit un isomorphisme* $K^n(A) \approx K^n(\tilde{A})$ (axiome de stabilisation).

(2) $K^n(A) = 0$ *si* A *est un anneau unitaire tel que la catégorie* $\mathfrak{P}(A)$ *soit flasque au sens de* (7).

(3) $K^0(A) = K(A)$.

En outre, les foncteurs $K^n(A)$ *coïncident avec les foncteurs* $K^n(\mathfrak{P}(A))$ *définis dans* (7).

L'énoncé du théorème 2 nécessite la définition suivante : un anneau de Banach A est dit *contractile* s'il existe un homomorphisme borné $h : A \to A\{x\}$ tel que $q_0 . h = 0$ et $q_1 . h = \mathrm{Id}$.

Théorème 2. — *Il existe une théorie de la cohomologie négative et une seule à isomorphisme près sur* $\mathcal{B}$ *qui satisfait aux axiomes suivants :*

(1) $K^n(A) = 0$ *pour* $n < 0$ *si* A *est contractile.*

(2) $K^0(A) = K(A)$.

Théorème 3. — *Si* A *est une algèbre de Banach réelle ou complexe, les groupes* $K^n(A)$ *définis précédemment pour* n *positif ou négatif coïncident avec les groupes* $K^n(\mathfrak{P}(A))$ *introduits dans* (6). *En particulier, ils sont périodiques de période* 8 *si* A *est réelle, et* 2 *si* A *est complexe.*

Théorème 4. — *Si* A *est un anneau discret, les groupes* $K^n(A)$, $n \geqq 0$, *coïncident avec les groupes* $K_{-n}(A)$ *définis par Bass* (1). *En particulier,* $K^n(A) = 0$ *pour* $n > 0$ *si* A *est un anneau noethérien régulier.*

Théorème 5. — *Soit* A *un anneau discret et soit* $K_n(A)$ *le foncteur introduit dans* (9). *On a alors*

$$K_n(A) = K^{-n}(A) \oplus \binom{n-1}{1} K^{-n+1}(A) \oplus \binom{n-2}{2} K^{-n+2}(A) \oplus \ldots \oplus K^{-1}(A).$$

En suivant (9), on peut donner l'interprétation suivante du groupe $K^{-1}(A)$. Notons $GL^0(A)$ le sous-groupe de $GL(A)$ formé des éléments α « homotopes à l'identité » : ceci signifie qu'il existe $\gamma(x) \in GL(A\{x\})$ tel que $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(1) = \alpha$. Alors $GL^0(A) \supset [GL(A), GL(A)]$ d'après le lemme de Whitehead [(5), (9)] et $K^{-1}(A) \approx GL(A)/GL^0(A)$. Si A est un anneau discret, $GL^0(A)$ est le sous-groupe de $GL(A)$ engendré par les matrices unipotentes. Si A est un anneau noethérien régulier, $K^{-1}(A)$ s'identifie ainsi au groupe « $K_1(A)$ » de Bass (3). Notons ici une différence de points de vue entre le travail de Bass, Milnor (8), Swan (10) et le nôtre : ces trois auteurs ont proposé d'autres définitions (non axiomatiques) de $K^n(A)$ pour $n < 0$. En fait, ces définitions ne dépendent que du groupe $GL(A)$ tandis que la nôtre fait intervenir de manière plus intime la structure d'anneau de A (et même sa norme dans le cas non discret). Le théorème 2 implique bien entendu des suites exactes de Mayer-Vietoris pour les foncteurs K^n [*cf.* (3)] ce qui, semble-t-il, n'a pas d'analogue avec les autres définitions proposées.

(*) Séance du 8 septembre 1969.

(1) Le premier auteur a bénéficié de l'aide partielle de la « National Science Foundation » (Grant GP 7952 X).

(2) Les exemples du type 4 ne sont que des transpositions dans le langage des anneaux de Banach des définitions plus abstraites proposées dans (7). La même remarque s'applique au théorème 1 de cette Note.

(3) H. Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1968.
(4) H. Bass, A. Heller et R. G. Swan, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 22, 1964, p. 61-80.
(5) L. Gruson, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 1, 1968, p. 45-89.
(6) M. Karoubi, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 1, 1968, p. 161-270.
(7) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 328 et 345.
(8) J. Milnor, *Notes on algebraic K-theory* (non publié).
(9) A. Nobile et O. E. Villamayor, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 1968, p. 581-616.
(10) R. G. Swan, *Non-abelian homological algebra and K-theory* (non publié).

(*Institut de Mathématiques,*
rue René-Descartes, 67-*Strasbourg, Bas-Rhin*
et *Facultad de Ciencias exactas y naturales de Buenos-Aires.*)

180348. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.