MATH. SCAND. 32 (1973), 57–86

K-THEORIE ALGEBRIQUE ET K-THEORIE TOPOLOGIQUE II

MAX KAROUBI et ORLANDO VILLAMAYOR

Cet article poursuit l'étude commencée dans [9]. Son objet est de montrer que la théorie stable des modules quadratiques peut se développer de manière analogue à celle des modules projectifs. En particulier, nous définissons axiomatiquement des foncteurs ${}_{\varepsilon}L^n(A)$, A «anneau hermitien», tout-à-fait analogues aux foncteurs K^n introduits dans [9]. La «K-théorie hermitienne» ainsi définie semble être plus proche de la K-théorie topologique comme le laissent penser les travaux récents de Novikov [13], de Wall [19] et du premier auteur [7].

Dans le premier paragraphe nous développons quelques généralités sur les «catégories hermitiennes», généralisation naturelle de la catégorie des modules sur un anneau hermitien (i.e. un anneau de Banach muni d'une antiinvolution bornée). Dans le deuxième paragraphe on établit la «première suite exacte de la K-théorie hermitienne» (théorème 2.11).

$$ {}_{\varepsilon}L_1(A) \to {}_{\varepsilon}L_1(A'') \to {}_{\varepsilon}L(A') \to {}_{\varepsilon}L(A) \to {}_{\varepsilon}L(A'') $$

associée à la suite exacte d'anneaux hermitiens

$$ 0 \to A' \to A \to A'' \to 0 $$

Dans les troisième et quatrième paragraphes la topologie intervient pour la définition axiomatique des foncteurs ${}_{\varepsilon}L^n$, $n \in \mathbf{Z}$ (théorèmes 3.1 et 4.1).

Enfin, le cinquième paragraphe est essentiellement consacré au calcul de ${}_1L^{-1}(F)$, F étant un corps discret quelconque (théorème 5.8).

Table des Matières.

Received March 3, 1972.

1. Catégories hermitiennes.

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie en groupes de Banach dans le sens de [8]. Un foncteur de «dualité» de $\mathscr{C}$ dans elle-même est la donnée d'un foncteur banachique contravariant $\theta:\mathscr{C} \to \mathscr{C}$ et d'un isomorphisme fonctoriel $h:\mathrm{Id} \to \theta^2$. (On suppose en outre que, pour tout objet $M, h_{\theta(M)}: \theta(M) \to \theta^2(\theta(M))$ coïncide avec $\theta(h_M): \theta(M) \to \theta(\theta^2(M)) \approx \theta^2(\theta(M))$.) Une *catégorie hermitienne* est par définition une catégorie en groupes de Banach munie d'un tel foncteur de dualité. Par abus d'écriture, on posera $\theta(M) = {}^tM$, $\theta(f) = {}^tf$, etc. pour tout objet M (resp. tout morphisme f) de la catégorie $\mathscr{C}$.

EXEMPLES. 1) Soit A un *anneau hermitien*, c'est-à-dire un anneau de Banach muni d'une antiinvolution bornée que nous noterons $a \mapsto \bar{a}$. Soit $\mathscr{C} = \mathscr{P}(A)$ la catégorie des A-modules à droite qui sont projectifs de type fini. Pour tout objet M de $\mathscr{C}$, on définit le «dual» de M, soit ${}^tM$, comme le groupe abélien formé des applications Z-linéaires $g:M \to A$ telles que $g(x\alpha) = \bar{\alpha}g(x), x \in M, \alpha \in A$. La formule $(g\beta)(x) = g(x)\beta, \beta \in A$, permet de munir ${}^tM$ d'une structure de A-module à droite. De manière générale, notons $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ le produit scalaire ordinaire entre M et ${}^tM$. Si $f:M \to N$ est une application A-linéaire, il en est de même de ${}^tf:{}^tN \to {}^tM$ où ${}^tf$ est défini par la formule usuelle

$$\langle f(x), y \rangle_N = \overline{\langle x, {}^tf(y) \rangle_M}, \quad x \in M, y \in {}^tN .$$

Puisque M est projectif de type fini, l'application canonique de M dans son «bidual» ${}^t({}^tM)$ est un isomorphisme.

2) Soit $\mathscr{C}$ la catégorie des représentations hilbertiennes d'un groupe topologique quelconque. Le foncteur qui associe à une représentation $\varrho:G \to \mathrm{Aut}\, H$ la représentation contragrédiente ϱ' définie par $\varrho'(g) = (\varrho(g^{-1}))^*$ munit $\mathscr{C}$ d'une structure de catégorie hermitienne.

3) Soit A un anneau de Dedekind et soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de A. Soit $\mathscr{C}$ la catégorie des A-modules de type fini qui sont de $\mathfrak{p}^n$ torsion, n assez grand. Alors le foncteur $M \mapsto \mathrm{Ext}_A{}^1(M, A)$ munit $\mathscr{C}$ d'une structure de catégorie hermitienne.

Soit M un objet d'une catégorie hermitienne générale $\mathscr{C}$. Une *forme sesquilinéaire* sur M est la donnée d'un morphisme $\varphi:M \to {}^tM$. La forme sesquilinéaire φ est dite *non dégénérée* si φ est un isomorphisme dans la catégorie. Notons $\mathrm{Sesq}(M)$ le Z-modules des formes sesquilinéaires sur M. On peut définir une involution T sur $\mathrm{Sesq}(M)$ de la manière suivante. Si $\varphi:M \to {}^tM$ est une forme sesquilinéaire, $T(\varphi)$ est le morphisme composé

$$M \approx {}^t({}^tM) \xrightarrow{{}^t\varphi} {}^tM .$$

Si $\varepsilon = \pm 1$, on a donc le complexe

$$\mathrm{Sesq}(M) \xrightarrow{1+T\varepsilon} \mathrm{Sesq}(M) \xrightarrow{1-T\varepsilon} \mathrm{Sesq}(M)\,.$$

DEFINITION 1.1. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie hermitienne. Une forme sesquilinéaire ε-symétrique (ou forme ε-hermitienne) sur un objet M de $\mathscr{C}$ est un élément de* $\mathrm{Ker}(1-T\varepsilon)$. *Une forme ε-quadratique sur M est un élément de* $\mathrm{Coker}(1-T\varepsilon)$.

REMARQUES. 1) Si la multiplication par 2 induit un automorphisme du groupe abélien $\mathrm{Sesq}(M)$, il est clair que le complexe précédent est acyclique. Donc $\mathrm{Ker}(1-T\varepsilon) \approx \mathrm{Coker}(1-T\varepsilon)$ et les notions de forme ε-quadratique et de forme ε-hermitienne sont essentiellement équivalentes.

2) Si $\mathscr{C} = \mathscr{P}(A)$, A étant un anneau hermitien, la donnée d'une forme sesquilinéaire sur M est équivalente à la donnée d'une application $\mathbf{Z}$-bilinéaire $\Phi: M \times M \to A$ telle que

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \Phi(x\alpha, y) = \bar{\alpha}\Phi(x, y)\,, \\ &\text{b)}\ \Phi(x, y\alpha) = \Phi(x, y)\alpha, \quad x, y \in M, \alpha \in A\,. \end{aligned}$$

Il suffit de poser en effet $\varphi(y)(x) = \Phi(x, y)$. L'involution T sur $\mathrm{Sesq}(M)$ équivaut dans ce contexte à changer Φ en Φ' où $\Phi'(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$. On retrouve donc bien les définitions classiques sur la catégorie des modules (cf. [16], [18]).

3) En suivant Wall [18], on pourrait pousser un peu plus la généralité en remplaçant ε par un automorphisme u de la catégorie tel que $u \circ \bar{u} = 1$ en un sens évident. Nous laissons au lecteur le soin d'adapter ce qui va suivre à ce contexte un peu plus général.

DEFINITION 1.2. *Soit q une forme ε-quadratique sur M représentée par une forme sesquilinéaire φ_0. La forme ε-hermitienne associée est $\varphi = (1+T\varepsilon)\varphi_0$. La forme q est dite non dégénérée si φ est non dégénérée.*

Soient M et N deux objets de la catégorie hermitienne $\mathscr{C}$ munis de formes ε-hermitiennes φ et Ψ et soit $f: M \to N$ un $\mathscr{C}$-morphisme. On dit que f est *unitaire* si $\varphi = {}^t f \circ \Psi \circ f$. L'ensemble des automorphismes unitaires de M forme un groupe, le groupe unitaire, qu'on notera $\mathrm{U}_\varphi(M)$, ou plus simplement $\mathrm{U}(M)$. *Si* φ est non dégénérée, on définit *l'adjoint* de f comme le morphisme $f^* = \varphi^{-1} \circ {}^t f \circ \Psi$. Dans ce cas, le groupe unitaire n'est autre que le groupe des automorphismes f de M tels que $f^* \circ f = \mathrm{Id}_M$.

Supposons maintenant que M et N soient munis de formes ε-quadratiques p et q représentées par des formes sesquilinéaires φ_0 et Ψ_0 respectivement. Un morphisme $f:M \to N$ est un morphisme orthogonal (resp. une isométrie) si $\varphi_0 - {}^t f \circ \Psi_0 \circ f \in \mathrm{Im}(1-T\varepsilon)$ (resp. si $\varphi_0 - {}^t f \circ \Psi_0 \circ f \in \mathrm{Im}(1-T\varepsilon)$ et si f est un isomorphisme). L'ensemble des automorphismes orthogonaux de M forme un groupe, le groupe orthogonal, qu'on notera $\mathrm{O}_p(M)$ ou plus simplement $\mathrm{O}(M)$. On a évidemment $\mathrm{O}_p(M) \subset \mathrm{U}_\varphi(M), \varphi$ étant la forme ε-hermitienne associée à p. Les deux groupes coïncident si 2 est un élément inversible de l'algèbre $\mathrm{End}\, M$. Dans le cas de la catégoric des modules, on retrouve bien entendu les définitions classiques. Pour toute catégorie hermitienne $\mathscr{C}$, on notera ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ la catégorie (non additive) dont les objets sont les objets de $\mathscr{C}$ munis de formes ε-quadratiques non dégénérées et dont les morphismes sont les isométries.

Pour simplifier les considérations qui vont suivre, convenons d'identifier ${}^t({}^t M)$ à M grâce à l'isomorphisme fonctoriel $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \approx t^2$. On peut alors munir $M \oplus {}^t M$ de la forme ε-quadratique q représentée par χ_0, où

$$\chi_0 : M \oplus {}^t M \to {}^t(M \oplus {}^t M) \approx {}^t M \oplus M$$

est définie par la matrice

$$\chi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme ε-hermitienne associée à q est définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite, q est non dégénérée. Posons ${}_\varepsilon H(M) = M \oplus {}^t M$ muni de la forme quadratique q et ${}_\varepsilon H(\alpha) = \alpha \oplus ({}^t\alpha)^{-1}$ pour tout *isomorphisme* α.

LEMME 1.3. *Notons $\overline{\mathscr{C}}$ la catégorie dont les objets sont les objets de $\mathscr{C}$ et dont les morphismes sont les isomorphismes de $\mathscr{C}$. Alors ${}_\varepsilon H$ induit un foncteur (le «foncteur hyperbolique») de la catégorie $\overline{\mathscr{C}}$ dans la catégorie ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que ${}_\varepsilon H(\alpha)$ est un morphisme orthogonal, ce qui résulte de l'identité

$${}^t_\varepsilon H(\alpha) \chi_{0\,\varepsilon} H(\alpha) = \begin{pmatrix} {}^t\alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & {}^t\alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

THEOREME 1.4. *Notons ${}_\varepsilon J$ le foncteur «oubli» de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ dans $\overline{\mathscr{C}}$. Le foncteur composé ${}_\varepsilon J \circ {}_\varepsilon H$ associe à un objet M de $\overline{\mathscr{C}}$ l'objet $M \oplus {}^t M$ et à un isomorphisme $\alpha : M \to N$ l'isomorphisme $\alpha \oplus ({}^t\alpha)^{-1}$. Le foncteur composé ${}_\varepsilon H \circ {}_\varepsilon J$ applique l'objet (M,q) sur un objet isomorphe à $(M \oplus M, q \oplus (-q))$.*

DÉMONSTRATION (d'après [18]). La première assertion du théorème est évidente. Soit φ_0 une forme sesquilinéaire représentant q et soit $f: M \oplus M \to M \oplus {}^tM$ le $\mathscr{C}$-morphisme représenté par la matrice

$$f = \begin{pmatrix} 1-\varphi^{-1}\varphi_0 & \varphi^{-1}\varphi_0 \\ \varphi & -\varphi \end{pmatrix}$$

où $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^t\varphi_0$ est la forme sesquilinéaire associée à q. Le morphisme f est en fait un isomorphisme, son inverse étant représenté par la matrice

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi^{-1}\varphi_0\varphi^{-1} \\ 1 & \varphi^{-1}\varphi_0\varphi^{-1} - \varphi^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le morphisme ${}^tf$ est représenté par la matrice

$${}^tf = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^t\varphi_0\varphi^{-1} & \varepsilon\varphi \\ \varepsilon^t\varphi_0\varphi^{-1} & -\varepsilon\varphi \end{pmatrix}$$

et la forme quadratique $q \oplus (-q)$ par la matrice

$$\varphi_0{}' = \begin{pmatrix} \varphi_0 & 0 \\ 0 & -\varphi_0 \end{pmatrix}.$$

Le morphisme ${}^tf\chi_0 f$ est donc représenté par $(1-T\varepsilon)(h)$ avec

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon^t\varphi_0 & \varphi_0 \end{pmatrix}.$$

Soit ${}_\varepsilon S : {}_\varepsilon Q(\mathscr{C}) \to {}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ le foncteur qui associe à l'objet (M,q) l'objet $(M \oplus M, q \oplus (-q))$ et au morphisme α le morphisme qui coïncide avec $\alpha \oplus \alpha$ sur les objets de $\mathscr{C}$ sous-jacent. Si (M,p) et (N,q) sont deux objets de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ et si $\alpha : (M,p) \to (N,q)$ est une isométrie, on peut choisir des représentants φ_0 et Ψ_0 de p et q respectivement tels que $\varphi_0 = {}^t\alpha\Psi_0\alpha$. On vérifie alors la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} {}_\varepsilon S(M) \arrow[r] \arrow[d, "{}_\varepsilon S(\alpha)"'] & {}_\varepsilon H\,{}_\varepsilon J(M) \arrow[d, "{}_\varepsilon H_\varepsilon J(\alpha)"] \\ {}_\varepsilon S(N) \arrow[r] & {}_\varepsilon H\,{}_\varepsilon J(N) \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire l'identité

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & {}^t\alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\varphi^{-1}\varphi_0 & \varphi^{-1}\varphi_0 \\ \varphi & -\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\Psi^{-1}\Psi_0 & \Psi^{-1}\Psi_0 \\ \Psi & -\Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 1.4.

Dans le cas où φ_0 et Ψ_0 sont arbitraires, le diagramme précédent n'est plus commutatif en général et on ne peut donc affirmer que les foncteurs ${}_\varepsilon H_\varepsilon J$ et ${}_\varepsilon S$ sont isomorphes. Ils le sont cependant «à homotopie près» dans le sens suivant: le morphisme ${}_\varepsilon H_\varepsilon J(\alpha) \circ f \circ {}_\varepsilon S(\alpha)^{-1} \circ g^{-1}$ s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où h appartient à l'image de $1-T\varepsilon$.

Un morphisme $\eta : M \oplus {}^tM \to M \oplus {}^tM$ est une *isométrie ε-élémentaire* s'il s'exprime sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } h \in \operatorname{Im}(1-T\varepsilon).$$

Le raisonnement précédent permet de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 1.5. *Avec les notations précédentes, on a* ${}_\varepsilon H_\varepsilon J(\alpha) = g \circ {}_\varepsilon S(\alpha) \circ f^{-1} \circ \eta$ *où* η *est une isométrie de* $M \oplus {}^tM$ *qui est ε-élémentaire.*

Si tout morphisme de $\mathscr{C}$ est divisible par 2 de manière unique, on peut choisir $\varphi_0 = \frac{1}{2}\varphi$ et $\Psi_0 = \frac{1}{2}\Psi$. Dans ce cas, on aura donc le théorème plus précis suivant:

THEOREME 1.6. *Avec les hypothéses précédentes, les foncteurs* ${}_\varepsilon S$ *et* ${}_\varepsilon H_\varepsilon J$ *sont isomorphes.*

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additive. La catégorie $\mathscr{C}$ est dite *pseudoabélienne* si tout projecteur admet un noyau (cf. [5]). Il est facile de voir que toute categorie additive se plonge dans une catégorie pseudo-abélienne $\tilde{\mathscr{C}}$ qui lui est canoniquement associée. Les objets de $\tilde{\mathscr{C}}$ sont les couples $(E; p)$ où E est un objet de $\mathscr{C}$ et où p est un endomorphisme idempotent de E. (Nous écrivons $(E; p)$ au lieu de (E, p) pour éviter des confusions avec des objets munis de formes quadratiques.) Un morphisme de source $(E; p)$ et de but $(F; q)$ est un $\mathscr{C}$-morphisme $f : E \to F$ tel que $f \circ q = p \circ f = f$. Si $\mathscr{C}$ est une catégorie hermitienne, la structure hermitienne s'étend immédiatement à $\tilde{\mathscr{C}}$: on pose ${}^t(E; p) = ({}^tE; {}^tp)$, etc...

2. Le groupe de Grothendieck et le groupe de Bass d'une categorie hermitienne.[1]

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie hermitienne. L'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ forme un monoïde abélien de manière évidente. Par

[1] *Note ajoutée en épreuve*: Certains résultats de ce paragraphe et des suivants ont été trouvés indépendamment par Bass.

définition ${}_{\varepsilon}L(\mathscr{C})$ est le groupe symétrisé de ce monoïde. C'est le «*ε-groupe de Grothendieck*» de la catégorie hermitienne $\mathscr{C}$. En fait, cette définition généralise celle du groupe de Grothendieck d'une catégorie additive $\mathscr{D}$: si $\mathscr{C}$ est le produit de $\mathscr{D}$ par la catégorie opposée $\mathscr{D}^{\circ}$, on vérifie aisément que ${}_{\varepsilon}L(\mathscr{C}) \approx K(\mathscr{D})$.

Il est parfois commode d'utiliser une définition équivalente de ${}_{\varepsilon}L(\mathscr{C})$ en termes de projecteurs. On considère l'ensemble des triples (E, p_1, p_2) où E est un objet de ${}_{\varepsilon}Q(\mathscr{C})$ et où p_1 et p_2 sont deux projecteurs auto-adjoints de E (i.e. $p_{\alpha}{}^* = p_{\alpha}$, $\alpha = 1, 2$). Deux triples (E, p_1, p_2) et (E', p_1', p_2') sont isomorphes s'il existe une isométrie $f: E \to E'$ telle que $p_j' = f \circ p_j \circ f^{-1}$, $j = 1, 2$. Notons ${}_{\varepsilon}L^{\cdot}(\mathscr{C})$ le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie par le sous-groupe engendré par les relations

$$(E, p_1, p_2) + (F, q_1, q_2) = (E \oplus F, p_1 \oplus q_1, p_2 \oplus q_2) ,$$
$$(E, p_1, p_2) + (E, p_2, p_3) = (E, p_1, p_3) .$$

Proposition 2.1. *L'homomorphisme de ${}_{\varepsilon}L^{\cdot}(\mathscr{C})$ dans ${}_{\varepsilon}L(\tilde{\mathscr{C}})$ qui associe au triple (E, p_1, p_2) la classe de la différence formelle* $\operatorname{Im} p_1 - \operatorname{Im} p_2$ *est un isomorphisme. En particulier, si $\mathscr{C}$ est pseudo-abélienne, les groupes ${}_{\varepsilon}L^{\cdot}(\mathscr{C})$ et ${}_{\varepsilon}L(\mathscr{C})$ sont isomorphes.*

La démonstration de cette proposition est en tout point analogue à la démonstration de la proposition analogue en K-théorie [5].

Considérons maintenant l'ensemble des paires (E, α) où E est un objet de ${}_{\varepsilon}Q(\mathscr{C})$ et où α est un automorphisme orthogonal de E. Deux paires (E, α) et (E', α') sont isomorphes s'il existe une isométrie $f: E \to E'$ telle que $f \circ \alpha = \alpha' \circ f$. Le *$\varepsilon$-groupe de Bass* ${}_{\varepsilon}L_1(\mathscr{C})$ de la catégorie hermitienne $\mathscr{C}$ est le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie de paires par le sous-groupe engendré par les relations

$$(E, \alpha) + (F, \beta) = (E \oplus F, \alpha \oplus \beta) ,$$
$$(E, \alpha) + (E, \alpha') = (E, \alpha\alpha') .$$

Proposition 2.2. (Lemme de Whitehead, cf. [2, p. 351]). *Soient α et β deux automorphismes orthogonaux d'un objet E de ${}_{\varepsilon}Q(\mathscr{C})$. Alors les isométries*

$$\gamma = \alpha \oplus \beta \oplus \mathrm{Id}_E \quad \textit{et} \quad \gamma' = \alpha\beta \oplus \mathrm{Id}_{E \oplus E}$$

sont égales modulo le sous-groupe des commutateurs du groupe orthogonal ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}(E \oplus E \oplus E)$.

Démonstration. On a $\gamma^{-1} \circ \gamma' = \beta \oplus \beta^{-1} \oplus \mathrm{Id}_{E^{\boldsymbol{\cdot}}}$ ainsi que l'identité

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or la derniére matrice s'écrit aussi $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si A est un anneau hermitien, désignons par ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}_{n,n}(A)$ le groupe orthogonal $\mathrm{O}({}_{\varepsilon}H(A^n))$ et posons

$${}_{\varepsilon}\mathrm{O}(A) = \varinjlim_n {}_{\varepsilon}\mathrm{O}_{n,n}(A) .$$

Le théorème 1.4 et la proposition précédente impliquent le théorème suivant:

Theoreme 2.3. *Soit $\mathscr{C}$ la catégorie hermitienne $\mathscr{P}(A)$ ou $\mathscr{L}(A)$. Le groupe ${}_{\varepsilon}L_1(\mathscr{C})$ est alors isomorphe de manière naturelle au quotient de ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}(A)$ par son sous-groupe des commutateurs.*

Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories hermitiennes. Par définition un foncteur hermitien u de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ est la donnée d'un foncteur banachique (noté encore u) de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et, pour tout objet M de $\mathscr{C}$, d'un isomorphisme naturel $u({}^tM) \to {}^t(u(M))$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} u(M) & \xrightarrow{\approx} & u({}^t({}^tM)) \\ {\scriptstyle\approx}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\approx} \\ {}^t({}^t(u(M))) & \xrightarrow[\approx]{} & {}^t(u({}^tM)) . \end{array}$$

L'exemple le plus important pour nous sera celui du foncteur extension des scalaires $u : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$ associe à un homomorphisme borné de A dans B compatible avec les antiinvolutions. Par la suite, nous identifierons $u({}^tM)$ à ${}^t(u(M))$ pour alléger les raisonnements.

En suivant un schéma éprouvé [2], [5], on peut associer au foncteur u un «groupe relatif» ${}_{\varepsilon}L(u)$ qui coïncide avec ${}_{\varepsilon}L(\mathscr{C})$ si $\mathscr{C}' = 0$. De manière plus précise, on considére l'ensemble des triples (E,F,α) où E et F sont deux objets de ${}_{\varepsilon}Q(\mathscr{C})$ et où α est une isométrie de $u(E)$ sur $u(F)$. Deux triples (E,F,α) ct (E',F',α') sont isomorphes s'il existe deux isométries $f : E \to E'$ et $g : F \to F'$ telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} u(E) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u(f)"'] & u(F) \arrow[d, "u(g)"] \\ u(E') \arrow[r, "\alpha'"] & u(F') \end{tikzcd} .$$

Le groupe ${}_\varepsilon L(u)$ est alors le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie par le sous-groupe engendré par les relations

$$(E_0, F_0, \alpha_0)+(E_1,F_1, \alpha_1) = (E_0\oplus E_1, F_0\oplus F_1, \alpha_0\oplus\alpha_1) ,$$
$$(E, G, \beta\alpha) = (E, F, \alpha)+(F, G, \beta) .$$

On note $d(E,F,\alpha)$ la classe du triple (E,F,α) dans le groupe ${}_\varepsilon L(u)$.

Le foncteur hermitien u est dit *quasi-surjectif* (cofinal dans la terminologie de Bass) s'il est quasi-surjectif en tant que foncteur additif entre les catégories additives sous-jacentes (cf. [5, p. 179]). En d'autres termes, pour tout object E' de $\mathscr{C}'$, il existe un objet E de $\mathscr{C}$ et un objet E_1' de $\mathscr{C}'$ ainsi qu'un isomorphisme de $u(E)$ sur $E'\oplus E_1'$. En appliquant le théorème 1.4, on voit aisément que u induit un foncteur «quasi-surjectif» entre les catégories ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ et ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C}')$. Donc, pour tout objet E' de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C}')$, il existe un objet E de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ et un objet E_1' de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C}')$ ainsi qu'une isométrie de $u(E)$ sur $E'\oplus E_1'$. La démonstration du théorème suivant est aussi classique (cf. [1, p. 448]).

THEOREME 2.4. *Soit $u:\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un foncteur hermitien quasi-surjectif (par exemple le foncteur hermitien $\mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$ cité plus haut). On a alors la suite exacte*

$${}_\varepsilon L_1(\mathscr{C}) \to {}_\varepsilon L_1(\mathscr{C}') \to {}_\varepsilon L(u) \to {}_\varepsilon L(\mathscr{C}) \to {}_\varepsilon L(\mathscr{C}') .$$

Nous dirons qu'un foncteur hermitien u est *plein* si, pour tout couple d'objets (E,F) de $\mathscr{C}$, l'homomorphisme de groupes abéliens $\mathscr{C}(E,F) \to \mathscr{C}'(u(E),u(F))$ est surjectif.

LEMME 2.5. *Soit $u:\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un foncteur hermitien plein et soit η' une isométrie ε-élémentaire de $u(M)\oplus{}^t(u(M))$. Il existe alors une isométrie ε-élémentaire η de $M\oplus{}^tM$ telle que $u(\eta)=\eta'$.*

La démonstration de ce lemme est entièrement triviale.

THEOREME 2.6. *Soit $u:\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un foncteur hermitien plein. Soient M un objet de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$, $M'=u(M)$, α' un élément de $[\mathrm{O}(M'), \mathrm{O}(M')]$, sous-groupe des commutateurs de $\mathrm{O}(M')$. Il existe alors un objet N de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ et un élément α de $\mathrm{O}(M\oplus N)$ tels que $u(\alpha)=\alpha'\oplus\mathrm{Id}_{u(N)}$.*

DÉMONSTRATION. Ecrivons (M,p) l'objet de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ et considérons d'abord une isométrie α' de la forme $\beta' \circ \gamma' \circ \beta'^{-1} \circ \gamma'^{-1}$. Soit (R,q) la somme directe $(M,p)\oplus(M,p)\oplus(M,p)\oplus(M,-p)\oplus(M,-p)\oplus(M,-p)\oplus(M,-p)$ (7 facteurs). Soient $\bar{\beta}'$ et $\bar{\gamma}'$ les isométries de $u(R)$ représentées par les matrices diagonales

$$\bar{\beta}' = \mathrm{Diag}(\beta', \beta'^{-1}, 1, \beta', \beta'^{-1}, 1, 1)\,,$$
$$\bar{\gamma}' = \mathrm{Diag}(\gamma', 1, \gamma'^{-1}, 1, 1, \gamma', \gamma'^{-1})\,.$$

En stabilisant et en appliquant le théoréme 1.4 et la proposition 1.5. on voit donc que α' s'écrit aussi $[\beta_1',\gamma_1']$ avec

$$\beta_1' = u(\delta)\,{}_\varepsilon H(\beta'\oplus\beta'^{-1})\eta' u(\delta^{-1})\,,$$
$$\gamma_1' = u(\varkappa)\,{}_\varepsilon H(\gamma'\oplus\gamma'^{-1})\xi' u(\varkappa^{-1})\,,$$

où η' et ξ' sont des isométries ε-élémentaires et où δ et $\varkappa$ sont des isométries. Puisque le foncteur u est plein, l'identité

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

écrite pour $\lambda=\beta'$ où γ', montre qu'il existe des automorphismes (non nécessairement orthogonaux) β'' et γ'' tels que

$$u(\beta'') = \beta'\oplus\beta'^{-1}, \quad u(\gamma'') = \gamma'\oplus\gamma'^{-1}\,.$$

D'après le lemme précédent, il existe aussi des isométries η et ξ telles que $u(\eta)=\eta'$ et $u(\xi)=\xi'$. Donc il existe des automorphismes orthogonaux β_1 et γ_1 de R tels que $u(\beta_1)=\beta_1'$ et $u(\gamma_1)=\gamma_1'$. En posant $\alpha=[\beta_1,\gamma_1]$, on voit donc que $u(\alpha)=\alpha'$. Si α' est un produit de commutateurs, il suffit d'appliquer plusieurs fois le raisonnement précédent. La démonstration du théorème est achevée.

PROPOSITION 2.7. *Soit $u:\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un foncteur hermitien plein. Alors, dans le groupe libre engendré par les classes d'isomorphie de triples (E,F,α) où E et F sont des objets de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ et où $\alpha:u(E) \to u(F)$ est une isométrie, la relation*

$$(E, F, \alpha)+(F, G, \beta) = (E, G, \beta\alpha)$$

est une conséquence des relations

$$(E, F, \alpha)+(R, S, \beta) = (E\oplus R, F\oplus S, \alpha\oplus\beta) \quad \textit{et} \quad (E, E, \mathrm{Id}_E) = 0\,.$$

DÉMONSTRATION. Raisonnons modulo les dernières relations. On a alors

$$(E, F, \alpha)+(F, G, \beta) = (E\oplus F, F\oplus G, \alpha\oplus\beta) \approx E\oplus F, G\oplus F, \delta)$$

où δ est représenté par la matrice

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit δ' la matrice

$$\begin{pmatrix} \beta\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\delta'\delta^{-1} = \begin{pmatrix} \beta\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \beta^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le groupe orthogonal $\mathrm{O}(u(G)\oplus u(F)\oplus u(G))$ considérons le produit

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce produit peut aussi s'écrire $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque u est plein, il existe d'après le théorème 2.6. un objet N de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ et un automorphisme orthogonal f de $G\oplus F\oplus G\oplus N$ tel que

$$u(f) = \delta'\delta^{-1}\oplus \mathrm{Id}_G \oplus \mathrm{Id}_N .$$

Par suite, les triples

$$(E\oplus F\oplus G\oplus N,\ G\oplus F\oplus G\oplus N,\ \delta\oplus\mathrm{Id}_G\oplus\mathrm{Id}_N)$$

et

$$(E\oplus F\oplus G\oplus N,\ G\oplus F\oplus G\oplus N,\ (\beta\alpha\oplus\mathrm{Id}_F)\oplus\mathrm{Id}_G\oplus\mathrm{Id}_N)$$

sont isomorphes, ce qui démontre la proposition.

Corollaire 2.8. *Soit $u:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ un foncteur hermitien plein. Pour que la classe du triple (E,F,α) soit égale à zéro dans le groupe ${}_\varepsilon L(u)$, il faut et il suffit qu'il existe un objet G de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ et une isométrie $\beta:E\oplus G\to F\oplus G$ telle que $u(\beta)=\alpha\oplus\mathrm{Id}_G$.*

Si $u:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ est un foncteur hermitien plein quasi-surjectif, nous allons donner une autre définition du groupe relatif ${}_\varepsilon L(u)$, soit ${}_\varepsilon L^{\cdot}(u)$, qui va nous être utile par la suite. On considère l'ensemble des classes d'isomorphie de triples $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\beta)$ où $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ sont des objets $\mathbf{Z}/2$-gradués de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$

et où $\beta: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ est une isométrie (non nécessairement de degré zéro) telle que $u(\beta)$ soit de degré zéro. On définit alors ${}_\varepsilon L^{\cdot}(u)$ comme le quotient du groupe libre engendré par de tels triples par le sous-groupe engendré par les relations suivantes:

(1) $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\beta)+(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{F}',\beta') = (\boldsymbol{E}\oplus\boldsymbol{E}',\boldsymbol{F}\oplus\boldsymbol{F}',\beta\oplus\beta')$
(2) $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\beta)+(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\gamma) = (\boldsymbol{E},\boldsymbol{G},\gamma\beta)$
(3) $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\beta) = 0$ si $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}$ et si $u(\beta) = \mathrm{Id}_{u(\mathrm{E})}$.

On note aussi $d(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\beta)$ la classe du triple $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\beta)$ dans le groupe ${}_\varepsilon L^{\cdot}(u)$. L'homomorphisme $g: {}_\varepsilon L^{\cdot}(u) \to {}_\varepsilon L(u)$ associe à $d(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\beta)$ la classe du triple $(\boldsymbol{E}^0,\boldsymbol{F}^0,u(\beta)^0)$ où le symbole ^{0} signifie «partie homogène de degré zéro». L'homomorphisme en sens inverse $g': {}_\varepsilon L(u) \to {}_\varepsilon L^{\cdot}(u)$ s'explicite ainsi. Soit $d(E,F,\alpha)$ un élément de ${}_\varepsilon L(u)$. D'après le collaire 2.8., il existe un triple (E',F',α') et une isométrie $\beta: E\oplus E' \to F\oplus F'$ tels que $u(\beta)=\alpha\oplus\alpha'$. Dans les sommes directes $\boldsymbol{E}=E\oplus E'$ et $\boldsymbol{F}=F\oplus F'$ considérons E et F (resp. E' et F') comme objets de degré zéro (resp. un). On pose $g'(d(E,F,\alpha)) = d(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\beta)$.

Proposition 2.9. *Les homomorphismes*

$$g: {}_\varepsilon L^{\cdot}(u) \to {}_\varepsilon L(u) \quad \textit{et} \quad g': {}_\varepsilon L(u) \to {}_\varepsilon L^{\cdot}(u)$$

explicités ci-dessus sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. En outre, si $\mathscr{C}'=0$, la relation (3) *écrite ci-dessus est une conséquences des deux autres.*

La démonstration de cette proposition est analogue à celle du théorème 2.9. de [8, p. 139 et 140].

Si $u: A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux hermitiens (borné, compatible avec les antiinvolutions), notons aussi u le foncteur hermitien de $\mathscr{P}(A)$ dans $\mathscr{P}(B)$ qui lui est associé par extension des scalaires.

Theoreme 2.10 (*excision*). *Soient A, A_1, A_2 et A' quatre anneaux hermitiens formant un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u_2} & A_2 \\ {\scriptstyle u_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v_2} \\ A_1 & \xrightarrow{v_1} & A'. \end{array}$$

Si v_2 (donc u_1) est un homomorphisme surjectif, les homomorphismes u_2 et v_1 induisent un isomorphisme e entre les groupes ${}_\varepsilon L(u_1)$ et ${}_\varepsilon L(v_2)$.

DÉMONSTRATION. (a) *e est injectif.* Soit $d(E,F,\alpha)$ un élément de ${}_\varepsilon L(u_1)$ tel que $d(u_2(E),u_2(F),v_1(\alpha))=0$. D'après le corollaire 2.8, ceci implique que, quitte à ajouter à E et F le même module quadratique, $v_1(\alpha)$ se relève en une isométrie de $v_2(E)$ sur $v_2(F)$. Par suite, le carré étant cartésien, il existe une isométrie de E sur F qui relève α.

(b) *e est surjectif.* Compte tenu du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} {}_\varepsilon L^{\cdot}(u_1) & \xrightarrow{e'} & {}_\varepsilon L^{\cdot}(v_2) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ {}_\varepsilon L(u_1) & \xrightarrow{e} & {}_\varepsilon L(v_2) \end{array}$$

et de la surjectivité des flèches verticales, on est ramené à démontrer que e' est surjectif. Soit donc $d(\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{F}_2,\beta_2)$ un élément du groupe ${}_\varepsilon L^{\cdot}(v_2)$. On peut supposer que $\boldsymbol{E}_2=H(A_2{}^n)\oplus H(A_2{}^n)$ (décomposition suivant les degrés) d'après le théorème 1.4. Puisque $\boldsymbol{E}_2$ et $\boldsymbol{F}_2$ sont isomorphes en tant qu'objets non gradués grâce à β_2, on peut supposer que $\boldsymbol{F}_2=H(A_2{}^{2n})$, la graduation de $\boldsymbol{F}_2$ étant représentée par un projecteur auto-adjoint p_2 dans $H(A_2{}^{2n})$ (on a donc $(\boldsymbol{F}_2)^0=\operatorname{Im} p_2$ et $(\boldsymbol{F}_2)^1=\operatorname{Ker} p_2$) tel que $v_2(p_2)$ soit représenté dans $H(A'^n)\oplus H(A'^n)$ par la matrice

$$p' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $\boldsymbol{E}=H(A^{2n})=H(A^n)\oplus H(A^n)$ (décomposition suivant les degrés) et considérons le projecteur auto-adjoint p de $H(A^{2n})\approx H(A^n)\oplus H(A^n)$ tel que

1) $u_2(p)=p_2$

2) $u_1(p)=p_1$ où $p_1: H(A_1{}^n)\oplus H(A_1{}^n) \to H(A_1{}^n)\oplus H(A_1{}^n)$ est représenté par la matrice

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant $\boldsymbol{F}$ le module quadratique $\boldsymbol{E}$ muni de la graduation définie par p et soit $\beta: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ l'isomorphisme égal à l'identité sur les modules non gradués sous-jacents. Il est clair que

$$e'(d(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\beta)) = d(\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{F}_2,\beta_2)\ .$$

Si A est un anneau hermitien unitaire posons ${}_\varepsilon L(A)={}_\varepsilon L(\mathscr{P}(A))$ (resp. ${}_\varepsilon L_1(A)={}_\varepsilon L_1(\mathscr{P}(A))$. Si k est un anneau hermitien unitaire et si A est un anneau hermitien (non nécessairement unitaire) qui est une k-algèbre en un sens évident [9], on peut définir l'algèbre augmentée $A_k{}^+$ comme dans [9]. On définit alors ${}_\varepsilon L(A)$ comme le noyau de l'homomorphisme naturel ${}_\varepsilon L(A_k{}^+) \to {}_\varepsilon L(k)$. Le théorème d'excision montre que cette définition est indépendante de k. On peut prendre en particulier $k = \mathbf{Z}$ ou $k = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ si 2 est inversible dans A. Le théorème 2.10 permet la reformulation suivante du théorème 2.4 dans le cadre des anneaux hermitiens:

THEOREME 2.11. *Soit $u: A \to A''$ un homomorphisme surjectif entre anneaux hermitiens unitaires et soit $A' = \operatorname{Ker} u$. On a alors la suite exacte*

$$ {}_\varepsilon L_1(A) \to {}_\varepsilon L_1(A'') \to {}_\varepsilon L(A') \to {}_\varepsilon L(A) \to {}_\varepsilon L(A'') $$

Soit de nouveau $\mathscr{C}$ une catégorie hermitienne générale et soit M un objet de $\mathscr{C}$. Un automorphisme orthogonal α de $M \oplus {}^t M \in \mathrm{Ob}({}_\varepsilon Q(\mathscr{C}))$ est dit «homotope à l'identité de manière algébrique» s'il existe des automorphismes orthogonaux α_i et des isométries ε-élémentaires μ_i de $M \oplus {}^t M$ tels que $\alpha = \prod_i \alpha_i \mu_i \alpha_i{}^{-1}$. Si N est un objet de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ et si α est un automorphisme orthogonal de N, on dit que α est «stablement homotope à l'identité de manière algébrique» s'il existe un objet N' de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$, un objet M de $\mathscr{C}$ et une isométrie $\beta: N \oplus N' \to M \oplus {}^t M$ tels que $\beta(\alpha \oplus 1)\beta^{-1}$ soit homotope à l'identité de manière algébrique.

LEMME 2.12. *Soit M un objet de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ et soit α un automorphisme de M appartenant au sous-groupe des commutateurs de ${}_\varepsilon \mathrm{O}(M)$. Alors α est stablement homotope à l'identité de manière algébrique.*

DÉMONSTRATION. Regardons de nouveau la démonstration du théorème 2.6. Avec les notations de cette démonstration, on voit qu'il suffit de démontrer que ${}_\varepsilon H(\beta' \oplus \beta'^{-1})$ est homotope à l'identité de manière algébrique. Compte tenu de l'identité bien connue

$$ \begin{pmatrix} \beta' & 0 \\ 0 & \beta'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta'^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

on voit qu'il suffit de démontrer que ${}_\varepsilon H(\alpha)$ est homotope à l'identité de manière algébrique lorsque $\alpha: M \oplus M \to M \oplus M$ se présente sous la forme

$$ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

Or $H(\alpha): M \oplus M \oplus {}^tM \oplus {}^tM \to M \oplus M \oplus {}^tM \oplus {}^tM$ s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

En permutant les deuxième et quatrième facteur de la somme $M \oplus M \oplus {}^tM \oplus {}^tM$ et en écrivant $N = M \oplus {}^tM$, on voit que $H(\alpha): N \oplus {}^tN \to N \oplus {}^tN$ peut aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\varepsilon{}^t\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

qui est bien de la forme $(1 - T\varepsilon)\mu'$.

Lemme 2.13. *Soit M un objet de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ et soit α un automorphisme de M stablement homotope à l'identité de manière algébrique. Alors il existe un objet N de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ tel que $\alpha \oplus \mathrm{Id}_N$ appartienne au sous-groupe des commutateurs de ${}_\varepsilon \mathrm{O}(M \oplus N)$.*

Démonstration. ([19, p. 64]). Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $M = M' \oplus {}^tM'$, que $M' = N \oplus N \oplus N$ avec $N \approx {}^tN$ et que α se présente sous la forme d'une matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d = d_0 - \varepsilon{}^td_0\,,$$

où d_0: $N \oplus N \oplus N \to N \oplus N \oplus N \approx {}^t(N \oplus N \oplus N)$ est une matrice 3×3. Il suffit évidemment de considérer des matrices d_0 du type

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le premier cas, on applique l'identité (où $b - cb{}^tc$ est une fonction linéaire de b).

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & {}^tc^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & {}^tc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b - cb{}^tc \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & -\varepsilon{}^tp & 0 \end{pmatrix}.$$

Le deuxième cas se réduit au premier en considérant l'identité précédente avec

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = p - \varepsilon {}^t p.$$

Les deux lemmes précédents nous permettent de donner une définition équivalente du groupe ${}_\varepsilon L_1(\mathscr{C})$. On considère l'ensemble des classes d'isomorphie de paires (E, α) où E est un objet de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$ et où $\alpha: E \to E$ est une isométrie. Le groupe ${}_\varepsilon L_1(\mathscr{C})$ est alors le quotient du groupe libre engendré par cet ensemble par le sous-groupe engendré par les relations

(1) $(E,\alpha)+(F,\beta) = (E\oplus F, \alpha\oplus\beta)$,

(2) $(E,\alpha) = 0$ si $E = M\oplus {}^t M$ et si α est un produit d'isométries ε-élémentaires.

3. Definition des foncteurs ${}_\varepsilon L^n$ pour $n \geqq 0$.

Dans ce paragraphe nous allons étendre au cas hermitien les définitions et les résultats essentiels de [8] et [9]. Il s'agit de définir les foncteurs «satellites» droits du foncteur ${}_\varepsilon L = {}_\varepsilon L^0$. Nous commençons par exposer le cas plus simple des anneaux hermitiens.

Soit donc A un anneau hermitien et soit B l'ensemble des matrices infinies $M = (a_{ij})$; $i \in \mathsf{N}, j \in \mathsf{N}$, à coefficients dans A. Munissons B de la norme

$$\|M\| = \operatorname{Sup}(\operatorname{Sup}_i \textstyle\sum_j \|a_{ij}\|, \operatorname{Sup}_i \sum_j \|a_{ij}\|)$$

L'ensemble des éléments B de norme finie forme un anneau de Banach B' pour la somme et le produit ordinaire des matrices. Le «*cône hermitien*» de A, soit CA, est alors le plus petit sous-anneau de Banach de B' contenant les matrices de permutation et les matrices de type fini dans le sens de [8]. (Cette définition de «cône» diffère légèrement de celle de [8] [9]. Cette modification n'affecte pas cependant les résultats de [9] en raison de l'axiomatisation développée dans [8].) «L'anneau stabilisé» de A, soit $\tilde{A}$, est le plus petit sous-anneau de Banach de CA contenant les matrices ayant un nombre fini d'éléments non nuls. En fait $\tilde{A}$ est un idéal fermé dans CA et l'anneau hermitien quotient $SA = CA/\tilde{A}$ est la *suspension hermitienne* de A. Cette suspension sert à définir les foncteurs ${}_\varepsilon L^n$ par récurrence sur n grâce à la formule ${}_\varepsilon L^{n+1}(A) = {}_\varepsilon L^n(SA)$. On peut caractériser axiomatiquement la théorie ${}_\varepsilon L^n$ de la même manière que dans [8], [9]. De manière précise, disons qu'une catégorie hermitienne $\mathscr{C}$ est *flasque* s'il existe un foncteur hermitien $\tau: \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ tel que les foncteurs τ et $\tau + \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ soient isomorphes de manière compatible avec le foncteur de dualité. Un anneau hermitien A est flasque s'il est unitaire et si la catégorie hermitienne $\mathscr{P}(A)$ est flasque. Soit alors $\mathscr{A}$ l'une ou l'autre des deux catégories suivantes:

(i) celle des anneaux hermitiens discrets,

(ii) celle des anneaux hermitiens A tels que tout élément de A soit divisible par 2.

Une *théorie de la cohomologie positive* sur $\mathscr{A}$ est la donnée de foncteurs ${}_\varepsilon L^n$, $n \geqq 0$ de $\mathscr{A}$ dans la catégorie des groupes abéliens ainsi que d'opérateurs de connexion $\partial^n: {}_\varepsilon L^n(A'') \to {}_\varepsilon L^{n+1}(A')$ définis pour toute suite exacte d'anneaux hermitiens

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

(A'' étant muni de la norme quotient et A' de la norme induite) tels que la suite

$${}_\varepsilon L^n(A) \to {}_\varepsilon L^n(A'') \to {}_\varepsilon L^{n+1}(A') \to {}_\varepsilon L^{n+1}(A) \to {}_\varepsilon L^{n+1}(A'')$$

soit exacte.

THEOREME 3.1. *Il existe une théorie de la cohomologie positive et une seule sur $\mathscr{A}$ qui satisfait aux axiomes suivants.*

1) ${}_\varepsilon L^0(A) = {}_\varepsilon L(A)$,

2) ${}_\varepsilon L^n(A) = 0$ *si* A *est un anneau flasque,*

3) *L'inclusion canonique de A dans $\tilde{A}$ induit un isomorphisme de ${}_\varepsilon L^n(A)$ sur ${}_\varepsilon L^n(\tilde{A})$.*

On peut démontrer ce théorème directement en utilisant le minimum de théorie des catégories grâce au calcul spectral dans les anneaux de Banach esquissé dans [6 § 1]. Une méthode plus rapide pour nous est de suivre la démonstration décrite dans [8] qui utilise les catégories filtrées. Il convient seulement d'adapter les définitions et les raisonnements au cas hermitien, ce qui ne présente pas de difficultés essentielles. Soulignons seulement les modifications les plus importantes.

Dans le dernier paragraphe de la page 113 il convient de lire: «Si $\mathscr{D}$ est une catégorie hermitienne quelconque et si E et F sont deux objets de ${}_\varepsilon Q(\mathscr{C})$, on appelle *morphisme direct* de E dans F la donnée d'un morphisme orthogonal $s: E \to F$ (on a donc en particulier $s^* \circ s = 1$, cette condition étant suffisante si tout morphisme de la catégorie est divisible par 2). On notera $s: E \dashrightarrow F$ une telle flèche».

Si $\mathscr{D}$ est une catégorie hermitienne et si $\mathscr{C}$ est une sous-catégorie hermitienne pleine, une $\mathscr{C}$-filtration de $\mathscr{D}$ se laisse définir comme à la page 115.

Il convient de noter cependant qu'on filtre en fait les objets de ${}_{\varepsilon}Q(\mathscr{D})$. Les exemples 1 et 2 décrits page 116 sont en fait des exemples de catégories hermitiennes filtrées. Par contre, l'exemple 3 page 117 doit être légèrement modifié. L'anneau A étant hermitien, il convient de considérer comme morphismes dans la catégorie $\mathscr{L}_p(A)$ les homomorphismes continus ainsi que leur transposé. La norme des morphismes doit être modifiée en conséquence. La catégorie $\mathscr{D}=\mathscr{C}_p$ construite page 118 devient ainsi une catégorie hermitienne flasque. La fin de la démonstration de la proposition 1.12 doit être aussi modifiée car l'isomorphisme Q explicité en haut de la page 129 n'est pas nécessairement une isométrie (et c'est là que s'explique les restrictions sur la catégorie $\mathscr{A}$). On a besoin du lemme classique suivant:

Lemme 3.2. *Le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ est divisible par $2n-1$.*

Démonstration. Dans l'algèbre des séries formelles $\mathbf{Q}[[x]]$, on a les identités

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\lambda_n x^n \quad \text{et} \quad (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tau_n x^n$$

avec $\lambda_n=(2n)!/(2^{2n}(n!)^2(2n-1))$ et $\tau_n=(2n)!/(2^{2n}(n!)^2)$. En écrivant que la première série est l'inverse de la seconde, on voit donc que $(2n)!/((n!)^2(2n-1))$ s'écrit comme un polynôme à coefficients entiers en les coefficients binomiaux $\binom{2n}{r}$, $r\leqq n$.

Supposons que x prenne ses valeurs dans un anneau de Banach A, 2 étant inversible dans A. Si on pose $c=\|\frac{1}{2}\|$, la formule de Stirling montre que la série $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\lambda_n x^n$ converge lorsque $\|x\|<1/4c^2$. En particulier soit $\mathscr{C}$ une catégorie hermitienne telle que tout morphisme de $\mathscr{C}$ soit divisible par 2, soit M un objet de ${}_{\varepsilon}Q(\mathscr{C})$ et soit α un automorphisme de M tel que $\|\alpha^*\alpha-1\|<1/4c^2$. Alors $(\alpha^*\alpha)^{\frac{1}{2}}$ existe d'après ce qui précède et commute avec $\alpha^*\alpha$. L'expression $\alpha'=\alpha\circ((\alpha^*\alpha)^{\frac{1}{2}})^{-1}$ représente un automorphisme unitaire (donc orthogonal) de M qu'on appellera l'automorphisme unitaire normalisé de α.

Lemme 3.3. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie hermitienne tel que tout morphisme de $\mathscr{C}$ soit divisible par 2 (de manière unique) et soit p_0 un projecteur auto-adjoint d'un objet M de ${}_{\varepsilon}Q(\mathscr{C})$. Il existe alors un voisinage V de p_0 dans l'ensemble des projecteurs auto-adjoints de M et une application continue $\varrho: V\to U(M)$ telle que $p=\varrho(p)p_0(\varrho(p))^{-1}$ pour tout élément p de V.*

DÉMONSTRATION. On a l'identité bien connue $p=\gamma(p)p_0(\gamma(p))^{-1}$ où $\gamma(p)=1-p-p_0+2pp_0$ pour p suffisamment voisin de p_0. Alors $\varrho(p)$ est simplement l'automorphisme unitaire normalisé de $\gamma(p)$ (p suffisamment voisin de p_0).

Compte tenu de ce lemme, le reste de la démonstration de la proposition 1.12 de [8] se transpose donc sans peine au cas hermitien à condition de supposer $\mathscr{C}$ discrète si tout morphisme de $\mathscr{C}$ n'est pas divisible par 2. Il en est de même de la définition 1.3. et des remarques qui la suivent. Dans le deuxième paragraphe de [8], le théorème 2.9 devient la proposition 2.9 de notre article (K^0 étant remplacé par ${}_\varepsilon L^{\cdot}$). La proposition 2.11 de [8]] reste donc vraie dans le cadre hermitien. D'autre part, les considérations du §2 en K-théorie algébrique s'étendent immédiatement au cadre hermitien à condition de remplacer matrices élémentaires par isométries ε-élémentaires. Les lemmes 2.2. et 2.4. de [8] sont à remplacer par les lemmes 2.12 et 2.13 de cet article. Enfin, les analogues des théorèmes 2.13 et 2.16 sont encore vrais dans notre contexte. De manière précise, on a le théorème suivant:

THEOREME 3.4. *Soit*

$$0 \to \mathscr{C}' \to \mathscr{C} \xrightarrow{u} \mathscr{C}'' \to 0$$

une suite exacte de catégories hermitiennes discrètes ou telles que tout morphisme de $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}''$ soit divisible par 2. Alors l'homomorphisme k de ${}_\varepsilon L(\mathscr{C}')$ dans ${}_\varepsilon L(u)$ défini par $k(E-F)=d(E,F,0)$ est un isomorphisme. Par conséquent, on a la suite exacte.

$${}_\varepsilon L_1(\mathscr{C}') \to {}_\varepsilon L_1(\mathscr{C}'') \to {}_\varepsilon L(\mathscr{C}') \to {}_\varepsilon L(\mathscr{C}) \to {}_\varepsilon L(\mathscr{C}'')$$

Désignons par $\mathscr{H}_d$ (resp. $\mathscr{H}_2$) la «catégorie» dont les objets sont les catégories hermitiennes discrètes (resp. les catégories hermitiennes telles que tout morphisme soit divisible par 2 de manière unique), les morphismes étant les foncteurs hermitiens.

THEOREME 3.5. *Il existe une facon et une seule à isomorphisme près de définir des foncteurs ${}_\varepsilon L^n, n \geqq 0$, de $\mathscr{H}_d$* (resp. $\mathscr{H}_2$) *dans la catégorie des groupes abéliens et des opérateurs de connexion naturels $\partial: {}_\varepsilon L^n(\mathscr{C}'') \to {}_\varepsilon L^{n+1}(\mathscr{C}')$ pour toute suite exacte*

$$0 \to \mathscr{C}' \to \mathscr{C} \to \mathscr{C}'' \to 0$$

de catégories hermitiennes dans $\mathscr{H}_d$ (resp. $\mathscr{H}_2$) *en sorte que les axiomes suivants soient satisfaits:*

1) *La suite*

$$ {}_{\varepsilon}L^{n}(\mathscr{C}') \to {}_{\varepsilon}L^{n}(\mathscr{C}) \to {}_{\varepsilon}L^{n}(\mathscr{C}'') \to {}_{\varepsilon}L^{n+1}(\mathscr{C}') \to {}_{\varepsilon}L^{n+1}(\mathscr{C}) $$

est une suite exacte

2) ${}_{\varepsilon}L^{n}(\mathscr{C})=0$ *si la catégorie hermitienne* $\mathscr{C}$ *est flasque.*

3) ${}_{\varepsilon}L^{0}(\mathscr{C})={}_{\varepsilon}L(\tilde{\mathscr{C}}),\tilde{\mathscr{C}}$ *désignant la catégorie pseudo-abélienne associée à* $\mathscr{C}$.

Il est expliqué dans [9] comment on peut déduire le théorème 3.1. d'un théorème du type précédent.

4. Definition des foncteurs L^n pour $n<0$.

Ce paragraphe reprend pour l'essentiel les paragraphes 5 et 6 de [9] et ne fait que les transposer au cadre hermitien. Nous nous limiterons donc à quelques indications sommaires.

Si A est un anneau hermitien, les anneaux $A<x>$, EA et ΩA introduits dans [9] sont aussi hermitiens: la série «transposée» de $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ est la série $\sum_{i=0}^{\infty} \bar{a}_i x^i$. On pose alors

$$ \begin{aligned} {}_{\varepsilon}L^{-1}(A) &= \operatorname{Ker}({}_{\varepsilon}L(\Omega A) \to {}_{\varepsilon}L(EA)) \quad \text{et} \\ {}_{\varepsilon}L^{-n-1}(A) &= {}_{\varepsilon}L^{-n}(\Omega A) \quad \text{pour} \quad n \geqq 1 \,. \end{aligned} $$

En suivant [9], on peut aussi donner une interprétation «homotopique» des foncteurs ${}_{\varepsilon}L^{-n}(A), n\geqq 1$, de la manière suivante. Soit ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}_{p,p}(A)$ le groupe des automorphismes orthogonaux de ${}_{\varepsilon}H(A^p)\in \mathrm{Ob}\big({}_{\varepsilon}Q(\mathscr{P}(A))\big)$. Deux éléments α_0 et α_1 de ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}_{p,p}(A)$ sont dits *homotopes* s'il existe un élément $\alpha=\alpha(x)$ de ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}_{p,p}(A<x>)$ tel que $\alpha(0)=\alpha_0$ et $\alpha(1)=\alpha_1$. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence (car ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}_{p,p}(A)$ est un groupe) et le quotient de ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}_{p,p}(A)$ par cette relation est un groupe qu'on notera $\pi_0({}_{\varepsilon}\mathrm{O}_{p,p}(A))$. La même méthode que celle développée dans [9, §5] permet de montrer que ${}_{\varepsilon}L^{-1}(A)$ est isomorphe canoniquement à $\varinjlim_p \pi_0({}_{\varepsilon}\mathrm{O}_{p,p}(A))$. Si on pose ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}(A)=\varinjlim_p {}_{\varepsilon}\mathrm{O}_{p,p}(A)$, on a aussi ${}_{\varepsilon}L^{-1}(A)=\pi_0({}_{\varepsilon}\mathrm{O}(A))$ en un sens évident. En outre, les éléments de $[{}_{\varepsilon}\mathrm{O}(A), {}_{\varepsilon}\mathrm{O}(A)]$ étant homotopes à l'identité d'après le lemme 2.2, on a une surjection évidente de ${}_{\varepsilon}L_1(A)= \mathrm{O}(A)/[{}_{\varepsilon}\mathrm{O}(A), {}_{\varepsilon}\mathrm{O}(A)]$ sur ${}_{\varepsilon}L^{-1}(A)$.

Soit maintenant $f: A \to A''$ un homomorphisme d'anneaux hermitiens. En suivant [9], on dit que f est une «${}_{\varepsilon}\mathrm{O}$-fibration» si, pour tout élément $\alpha''=\alpha''(x_1,\ldots,x_r)$ de ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}(A''<x_1,\ldots,x_r>)$ tel que $\alpha''(0,\ldots,0)=1$, il existe un élément $\alpha=\alpha(x_1,\ldots,x_r)$ de ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}(A<x_1,\ldots,x_r>)$ tel que $f(\alpha)=\alpha''$ en un sens évident. (Voir [4] [15] pour une justification de cette terminologie en termes de groupes simpliciaux et de fibrations de Kan.) En utilisant les isométries ε-élémentaires, on voit aisément qu'une ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}$-fibration est un homomorphisme surjectif, la réciproque étant inexacte en général. Si on pose $A' = \mathrm{Ker} f$, on peut définir comme dans [9] un homomorphisme de connexion

$$\partial^{-n-1} : {}_\varepsilon L^{-n-1}(A'') \to {}_\varepsilon L^{-n}(A'), \quad n \geqq 0 ,$$

de telle sorte que la suite

$${}_\varepsilon L^{-n-1}(A) \to {}_\varepsilon L^{-n-1}(A'') \xrightarrow{\partial^{-n-1}} {}_\varepsilon L^{-n}(A') \to {}_\varepsilon L^{-n}(A) \to {}_\varepsilon L^{-n}(A'')$$

soit exacte. De manière plus précise, on a le théorème suivant qui est analogue au théorème 5.3. de [9].

Theoreme 4.1. *Il existe une manière et une seule (à isomorphisme près) de définir des foncteurs ${}_\varepsilon L^{-n}, n \geqq 0$, sur la catégorie des anneaux hermitiens ainsi que des opérateurs de connexion naturels*

$$\partial^{-n-1} : {}_\varepsilon L^{-n-1}(A'') \to {}_\varepsilon L^{-n}(A')$$

pour toute ${}_\varepsilon$O-fibration $f: A \to A''$ de noyau A' de sorte que les axiomes suivants soient satisfaits:

1) ${}_\varepsilon L^0(A) = {}_\varepsilon L(A)$
2) *La suite*

$${}_\varepsilon L^{-n-1}(A) \to {}_\varepsilon L^{-n-1}(A'') \xrightarrow{\partial^{-n-1}} {}_\varepsilon L^{-n}(A') \to {}_\varepsilon L^{-n}(A) \to {}_\varepsilon L^{-n}(A'')$$

est une suite exacte.

3) ${}_\varepsilon L^{-n}(A) = 0$ *pour* $n > 0$ *si* A *est un anneau hermitien «contractile» (c'est-à-dire s'il existe un homomorphisme hermitien* $h: A \to A<x>$ *tel que* $p_0 \circ h = 0$ *et* $p_1 \circ h = \mathrm{Id}_A$).

La définition que nous venons de donner des foncteurs ${}_\varepsilon L^{-n}$ pour les anneaux hermitiens s'étend sans peine aux catégories hermitiennes. Il suffit de suivre le schéma tracé dans [9, § 6]. Les détails sont laissés au lecteur.

5. Le calcul de $L^{-1}(A)$.[1]

Dans tout ce paragraphe A est un anneau commutatif unitaire discret muni de l'involution triviale. L'ensemble des idempotents de A forme un groupe $\mathrm{Ip}(A)$ vis-à-vis de l'opération $e_1 * e_2 = e_1 + e_2 - 2e_1e_2$. Si $\mathrm{O}_{n,n}(A) = {}_1\mathrm{O}_{n,n}(A)$ désigne le groupe des isométries de $H(A^n)$ nous nous proposons

[1] Pour alléger l'écriture, on pose $L_1 = {}_1L_1$, $L^{-1} = {}_1L^{-1}$, etc. On pose aussi $\mathrm{O}_{n,n}(A) = {}_1\mathrm{O}_{n,n}(A)$; $C_{n,n} = C_{n,n}(A)$, $C^0{}_{n,n} = C^0{}_{n,n}(A)$.

de définir pour commencer un homomorphisme $s_n : O_{n,n}(A) \to \mathrm{Ip}(A)$. Considérons pour cela l'algèbre de Clifford $C_{n,n}(A)$ du module hyperbolique $H(A^n)$. Pour simplifier les raisonnements, on peut supposer que $H(A^n) \subset C_{n,n}(A)$ et identifier $O_{n,n}(A)$ au groupe des automorphismes de l'algèbre $C_{n,n}(A)$ laissant invariant $H(A^n)$. Désignons par $C^0{}_{n,n}(A)$ la partie homogène de degré zéro de $C_{n,n}(A)$. D'après [11], le centre Z^0 de $C^0{}_{n,n}$ est une extension quadratique projective, séparable de rang 2 de A. Par suite, il existe localement un seul automorphisme σ de Z^0 distinct de l'identité [16]. Par ailleurs, un élémént α de $O_{n,n}$ induit un automorphisme $\bar{\alpha}$ de Z^0. Définissons alors localement une fonction sur le spectre de A qui vaut 1 si $\bar{\alpha} = 0$ et 0 si $\bar{\alpha} = \mathrm{Id}$. Cette fonction est clairement continue et définit donc un idempotent $s_n(\alpha)$ de A. L'application ainsi définie est un homomorphisme de groupes et on a le diagramme commutatif ($n \leqq m$)

$$\begin{tikzcd}
O_{n,n}(A) \arrow[rr] \arrow[dr, "s_n"'] & & O_{m,m}(A) \arrow[dl, "s_m"] \\
& \mathrm{Ip}(A) &
\end{tikzcd}$$

On en déduit par passage à la limite un homomorphisme

$$s : O(A) \to \mathrm{Ip}(A)$$

On pose $O^+(A) = \mathrm{Ker}\, s$ et $O^+{}_{n,n}(A) = \mathrm{Ker}\, s_n$. On appelle transformation paire un élément de $O^+(A)$ ou de $O^+{}_{n,n}(A)$. Si A est un corps, on retrouve bien entendu les définitions classiques: pour qu'une transformation soit paire, il faut et il suffit qu'elle s'écrive comme le produit d'un nombre pair de transvections [3], d'où la terminologie. Si 2 est inversible dans A, s n'est autre que l'application «déterminant».

Puisque $C_{n,n} = C_{n,n}(A)$ est une algèbre d'Azumaya, il existe une suite exacte

$$O \to \mathrm{Int}\, C_{n,n} \to \mathrm{Aut}\, C_{n,n} \xrightarrow{\theta} \mathrm{Pic}(A)\,,$$

où $\mathrm{Int}\, C_{n,n}$ est le groupe des automorphismes intérieurs de $C_{n,n}$. L'homomorphisme $\theta : \mathrm{Aut}\, C_{n,n} \to \mathrm{Pic}(A)$ s'explicite de la manière suivante. Pour un élément α de $\mathrm{Aut}\, C_{n,n}$, $\theta(\alpha)$ est l'ensemble des éléments x de $C_{n,n}$ tels que $xy = \alpha(y)x$ pour tout élément y de $C_{n,n}$ [14]. On a de manière évidente $\theta(\alpha_1\alpha_2) \cong \theta(\alpha_1) \otimes \theta(\alpha_2)$. Si on note $^-$ l'antiautomorphisme canonique de l'algèbre de Clifford, on a $\bar{y}\bar{x} = \bar{x}\bar{\alpha}(\bar{y})$. Si $\alpha \in O_{n,n}$, c'est-à-dire si $\alpha(H(A^n)) = H(A^n)$, on a aussi $\bar{\alpha}(\bar{y}) = \alpha(y)$. Dans ce cas, on en déduit un isomorphisme

$$\beta_\alpha : \theta(\alpha) \to {}^t\theta(\alpha) = \theta(\alpha^{-1})$$

tel que le diagramme naturel commute

$$\begin{tikzcd} \theta(\alpha_1\alpha_2) \arrow[r, "\beta_{\alpha_1\alpha_2}"] \arrow[d] & {}^t(\theta(\alpha_1\alpha_2)) \arrow[d] \\ \theta(\alpha_1)\otimes\theta(\alpha_2) \arrow[r, "\beta_{\alpha_1}\otimes\beta_{\alpha_2}"] & {}^t(\theta(\alpha_1))\,{}^t(\theta(\alpha_2)) . \end{tikzcd}$$

On est ainsi amené naturellement à considérer le groupe (pour le produit tensoriel) formé des classes d'isomorphie de paires (M,β) où M est un A-module de rang un et où $\beta: M \to {}^tM$ est un isomorphisme (il est parfois plus commode de se donner un homomorphisme de $M\otimes M$ dans A que nous noterons aussi β). Ce groupe s'identifie au groupe de cohomologie $H^1(\mathscr{X},A,\mu_2)$ considéré dans [12]. (μ_2 est l'ensemble des éléments x de A tels que $x^2=1$ qui est un groupe pour la multiplication; $\mathscr{X}$ est une topologie «suffisamment riche» sur le spectre de A: par exemple la topologie fidèlement plate.) D'après le raisonnement précédent, on a donc ainsi défini un homomorphisme d_n: $\mathrm{O}_{n,n}(A) \to H^1(\mathscr{X},A,\mu_2)$.

Remarque. L'homomorphisme d_n n'est pas compatible avec les inclusions canoniques $\mathrm{O}_{n,n}\subset\mathrm{O}_{m,m}$, $n<m$. Par contre, la restriction $d_n{}^+$ de d_n à $\mathrm{O}^+{}_{n,n}=\mathrm{O}^+{}_{n,n}(A)$ est compatible avec les inclusions $\mathrm{O}^+{}_{n,n}\subset\mathrm{O}^+{}_{m,m}$, ce qui permet de définir un homomorphisme

$$d^+ : \ \mathrm{O}^+(A) \to H^1(\mathscr{X},A,\mu_2)$$

Lemme 5.1. *Soit t_a la transvection associée à un vecteur α de $H(A^n)$. Alors $d_n(t_a)$ s'identifie à la classe de la paire $(A,(-1)^{n-1}q(a))$.*

Démonstration. Considerons le module quadratique $P=H(A^n)$ ainsi que sa base canonique $u_1,\ldots,u_n$; $w_1,\ldots,w_n$. Ecrivons

$$a = \textstyle\sum_{i=1}^n x_iu_i+\sum_{i=1}^n y_iw_i \quad \text{et} \quad q(a) = \sum_{i=1}^n x_iy_i = \lambda\in U(A) .$$

Posons $s=\sum_{i=1}^n x_iu_i$ et $t=\sum_{i=1}^n y_iw_i$. Alors le couple (s,t) définit un sous-module hyperbolique P' de P (soit $P'=H(A)$) et il existe une décomposition en somme directe orthogonale $P=P'\oplus P''$. Puisque $a\in P'$, $t_a|P''=\mathrm{Id}$. Soit maintenant $b=s-\lambda t$. Dans l'algèbre $C_{n,n}$ on a alors $b^2=\lambda$, l'automorphisme intérieur induit par b coïncidant avec t_a sur P' et avec -1 sur P''. Par ailleurs, la décomposition orthogonale $P=P'\oplus P''$ permet d'écrire $C_{n,n}=C(P')\otimes C(P'')$. Puisque $C_{n,n}$ et $C(P')$ sont égales à zéro dans le groupe $\mathscr{H}(A)$ considéré dans [12], il en est de même de $C(P'')$. Par suite, le centre Z''^0 de $C^0(P'')$ est une extension triviale de A (i.e. $Z''^0=A\oplus A$, l'automorphisme non trivial σ permutant les facteurs). Il existe donc un élément h de Z''^0 tel que $h \circ \bar{h} = (-1)^{n-1}$, $h^2 = 1$ et $hp''h^{-1} = -p''$ si $p'' \in P''$. Puisque h commute aux éléments de P', l'automorphisme intérieur induit par bh coïncide avec ι_a. Enfin,

$$(bh)\overline{(bh)} = bh\bar{h}\bar{b} = (-1)^{n-1}b^2 = (-1)^{n-1}\lambda = (-1)^{n-1}q(a) .$$

COROLLAIRE 5.2. *L'homomorphisme $s : \mathrm{O}(A) \to \mathrm{Ip}(A)$ est surjectif et les images des homomorphismes $d_n : \mathrm{O}_{n,n}(A) \to H^1(\mathscr{X}, A, \mu_2)$ et $d_n{}^+ : \mathrm{O}^+{}_{n,n}(A) \to H^1(\mathscr{X}, A, \mu_2)$ coïncident.*

DÉMONSTRATION. L'homomorphisme s est surjectif car il suffit de considérer pour tout idempotent e la transvection définie par le vecteur $a = e(u_1 + w_1)$. D'après le lemme 5.1., $d_1(t_a) = 0$. On en déduit que pour tout n, il existe une transformation α telle que $s(\alpha) = e$ et $d_n(\alpha) = 0$, ce qui démontre évidemment la deuxième partie du corollaire.

THEOREME 5.3. *Si 2 est inversible dans A, l'homomorphisme*

$$d^+ : \mathrm{O}^+(A) \to H^1(\chi, A, \mu_2)$$

est surjectif.

DÉMONSTRATION. Si 2 est inversible dans A, on sait que $H^1(\mathscr{X}, A, \mu_2) \approx H^1(\mathscr{X}, A, \mathrm{Ip})$ s'identifie au groupe $Q(A)$ des extensions quadratiques de A [12]. En outre, étant donné un élément (M, μ) de $H^1(\mathscr{X}, A, \mu_2)$, il existe un module quadratique de rang 2, soit (P, q), tel que M s'identifie à l'ensemble des éléments x de $C(P, q)$ tels que $xp = -px$ pour tout élément p de P et tel que $\mu : M \otimes M \to A$ soit défini par $\mu(m_1 \otimes m_2) = m_1\overline{m}_2$. Par conséquent, si (P', q') est un module quadratique tel que $(P, q) \oplus (P', q') \approx H(A^n)$ (n assez grand), l'automorphisme α qui vaut -1 sur M et l'identité sur P' induit bien $d(\alpha) = (M, \mu)$.

Posons $L_1{}^+(A) = \mathrm{O}^+(A)/[\mathrm{O}(A), \mathrm{O}(A)]$. La suite exacte

$$1 \to \mathrm{O}^+(A) \to \mathrm{O}(A) \to \mathrm{Ip}(A) \to 1$$

permet d'identifier $L_1{}^+(A)$ à un sous-groupe de $L_1(A)$. De même, si on désigne par $\mathrm{O}_0(A)$ le sous-groupes des matrices orthogonales homotopes à l'identité dans le sens de cet article, il est facile de voir que $\mathrm{O}_0(A) \subset \mathrm{O}^+(A)$. Si on pose

$$L_+{}^{-1}(A) = \mathrm{O}^+(A)/\mathrm{O}_0(A) ,$$

on a donc aussi $L_+{}^{-1}(A) \subset L^{-1}(A)$. Puisque $H^1(\mathscr{X}, A, \mu_2)$ est un groupe abélien, l'homomorphisme d^+ se factorise à travers $L_1{}^+(A)$. On va voir que, sous certaines conditions, d^+ se factorise aussi à travers $L_+{}^{-1}(A)$.

LEMME 5.4. *Soit A un anneau* (commutatif unitaire) *tel que* $K(A) \approx K(A[x])$ (par exemple un anneau noethérien régulier) *et soit M un $A[x]$-module de rang un tel que M/xM soit libre. Alors M est libre.*

DÉMONSTRATION. L'hypothèse implique qu'il existe des modules libres L_1 et L_2 sur $A[x]$ de rang $n-1$ et n respectivement tels que $M \oplus L_1 \approx L_2$. Donc

$$M \approx \Lambda^n(M \oplus L_1) \approx \Lambda^n(L_2) \approx A[x] .$$

REMARQUE. Sous les hypothèses du lemme, on a donc $\mathrm{Pic}(A) \approx \mathrm{Pic}(A[x])$.

THEOREME 5.5. *Supposons que l'anneau A satisfasse à la condition*

a) $K(A) \approx K(A[x])$,

ainsi qu'à l'une des deux conditions b) *ou* c) *ci-dessous*

b) $U(A[x]) = U(A)$,
c) 2 *est inversible dans* A.

Alors l'homomorphisme $d^+ \colon \mathrm{O}^+(A) \to H^1(\mathscr{X}, A, \mu_2)$ *se factorise à travers* $L_+^{-1}(A)$.

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que tout élément de $\mathrm{O}^+(A)$ homotope à l'identité a comme image 0 dans le groupe $H^1(\chi, A, \mu_2)$. Considérons donc un élément $\beta = \beta(x)$ de $\mathrm{O}^+(A[x])$ tel que $\beta(1) = \alpha$ et $\beta(0) = 1$. Alors $d^+(\beta(x)) = (P, \mu)$ où P est un $A[x]$-module de rang un. Puisque $P/xP \approx A$, on peut supposer que $P = A[x]$ d'après le lemme antérieur. La donnée de μ est équivalente à la donnée d'un élément $\lambda(x)$ de $U(A[x])$ défini au carré d'un élément de $\mathrm{U}(A[x])$ près. Puisque $\lambda(0) = 1$, on a évidemment $\lambda(x) = 1$ si $\mathrm{U}(A[x]) = \mathrm{U}(A)$. Par ailleurs, si on écrit $\lambda(x) = 1 + \nu(x)$ avec $\nu(x) = a_1 x + \ldots + a_n x^n$, il est facile de voir que $\nu(x)$ est nilpotent. Donc, si 2 est inversible dans A, $(1 + \nu(x))^{\frac{1}{2}}$ existe (lemme 3.2.). Donc le couple $(A[x], \lambda(x))$ définit l'élément trivial du groupe $H^1(\chi, A, \mu_2)$.

THEOREME 5.6. *Soit F un corps commutatif discret et soit $F^* = U(F)$. On a alors les isomorphismes*

$$L_1^+(F) \approx L_+^{-1}(F) \approx F^*/(F^*)^2 \quad \textit{et} \quad L_1(F) \approx L^{-1}(F) \approx \mathsf{Z}/2 \times F^*/(F^*)^2 .$$

DEMONSTRATION. Si A est un corps F, on *a* $\mathrm{Ip}(F) = \mathsf{Z}/2$ et la suite exacte

$$\mathrm{U}(F) \xrightarrow{2} \mathrm{U}(F) \to H^1(\mathscr{X}, F, \mu_2) \to \mathrm{Pic}(F) \xrightarrow{2} \mathrm{Pic}(F)$$

jointe au fait que $\mathrm{Pic}(F) = 0$, montre que $H^1(\mathscr{X}, F, \mu_2) = F^*/(F^*)^2$. Il résulte des calculs de Dieudonné [3] que l'homomorphisme

$$d^+ : L_1{}^+(F) \to F^*/(F^*)^2 \approx H^1(\mathscr{X}, F, \mu_2)$$

est un isomorphisme. Puisque d^+ se factorise à travers $L_+{}^{-1}(F)$ (théorème 5.5), on a donc aussi $L_+{}^{-1}(F) \approx F^*/(F^*)^2$. Les suites exactes scindées

$$0 \to L_1{}^+(F) \to L_1(F) \to \mathsf{Z}/2 \to 0 ,$$
$$0 \to L_+{}^{-1}(F) \to L^{-1}(F) \to \mathsf{Z}/2 \to 0$$

permettent de conclure.

Remarque 1. Pour un corps commutatif F, l'homomorphisme $d^+ \colon \mathrm{O}^+(F) \to F^*/(F^*)^2$ s'explicite ainsi. Ecrivons un élément α de $\mathrm{O}^+(F)$ comme le produit d'un nombre pair de transvections $t_{v_1} \ldots t_{v_{2n}}$. Alors le produit des normes des vecteurs v_i est un élément de F^* dont la classe dans $F^*/(F^*)^2$ est l'invariant cherché (c'est la « norme spinorielle » de α).

Remarque 2. Si A est un anneau absolument plat, un raisonnement analogue montre que

$$L_1(A) \approx L^{-1}(A) \approx \mathrm{U}/\mathrm{U}^2 \oplus \mathrm{Ip}(A) \quad \text{avec} \quad \mathrm{U} = \mathrm{U}(A) .$$

En effet, puisque $\mathrm{Pic}(A) = 0$, il suffit de démontrer que toute transformation orthogonale est le produit de transvections. Or, si α est un élément de $\mathrm{O}_{n,n}(A)$, α est localement un produit de transvections. Puisque le spectre de A est compact et totalement discontinu, il existe donc un recouvrement fini du spectre par des ensembles ouverts et fermés tels que, dans chacun d'entre eux, α est le produit de transvections. Donc α est globalement un produit de transvections.

Appendice.

Un théorème de stabilité. Soit A un anneau commutatif unitaire discret muni d'une involution triviale. Soit (P, q) un module quadratique sur A $\big($i.e. un objet de ${}_1Q(\mathscr{P}(A))\big)$. Si $a \in A$, la sphère $S(a)$ de rayon «$a^{\frac{1}{2}}$» dans P est l'ensemble des points x de P tels que $q(x) = a$. On désigne par $S_{n,n}(a)$ la «sphère» de rayon $a^{\frac{1}{2}}$ dans le module hyperbolique $H(A^n)$. Il est clair que les $S(a)$ sont des variétés algébriques affines. En suivant le schéma tracé dans cet article, on peut donc définir leurs «ensembles d'homotopie» $\pi_i(S(a))$.

Proposition 1. *L'ensemble* $\varinjlim \pi_0(S_{n,n}(a))$ *est réduit à un élément* (*i.e. les sphères sont stablement connexes*).

DÉMONSTRATION. Soient v_1 et v_2 deux éléments de $S_{n,n}(a)$ et soient $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ leurs images dans $S_{n+1,n+1}(a)$. Il existe alors deux éléments v et v' de $H(A^{n+1})$ orthogonaux entre eux ainsi qu'à $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ tels que $q(v) = -q(v') = a$. On connecte alors $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ dans la sphère $S_{n+1,n+1}(a)$ par le chemin brisé

$$\bar{v}_1 \xrightarrow{h_1} \bar{v}_1 + v' + v \xrightarrow{k_1} v \xrightarrow{k_2^{-1}} \bar{v}_2 + v' + v \xrightarrow{k_1^{-1}} \bar{v}_2$$

où

$$\begin{aligned} h_j(t) &= \bar{v}_j + tv' + tv \\ k_j(t) &= (1-t)\bar{v}_j + v(1-t)v' \quad j = 1, 2 . \end{aligned}$$

REMARQUE. Si la dimension de Krull de A est finie, il est probable que $\pi_0(S_{n,n}(a)) = 0$ pour n suffisamment grand.

PROPOSITION 2. *Supposons que A soit un anneau euclidien. Alors $\pi_0(S_{n,n}(a)) = 0$ pour $n \geqq 2$.*

DÉMONSTRATION. Ecrivons la base hyperbolique de $H(A^n)$ sous la forme $u_1, \ldots, u_n; w_1, \ldots, w_n$. On a donc $q(u_j) = q(w_j) = 0$, $\varphi(u_i, u_j) = \varphi(w_i, w_j) = 0$ et $\varphi(u_i, w_j) = \delta_{ij}$, φ représentant la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q. Un point M de $S_{n,n}(a)$ aura donc comme coordonnées par rapport à cette base $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ et on aura la relation $\sum_{i=1}^n x_i y_i = a$. Nous allons décrire un procédé explicite pour connecter la point M au point $au_1 + w_1$. Soit en effet d le P.G.C.D. de x_{n-1} et $x_n (n \geqq 2)$. D'après l'algorithme d'Euclide, on a les relations

$$x_{n-1} = x_n q_1 + r_1, \; x_n = r_1 q_2 + r_2, \ldots, r_{s-1} = r_s q_{s+1} \quad \text{avec} \quad r_s = d .$$

Le chemin $M + tq_1 v_1$ avec $v_1 = -x_n u_{n-1} \approx y_{n-1} w_n$ dans la sphère $S_{n,n}(a)$ permet de connecter M et le point M_1 de coordonnées $(x_1, \ldots, x_{n-2}, r_1, x_n; y_1, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n')$. En raisonnant ainsi de proche en proche, on voit que M peut être connecté à un point M' de coordonnées $(x_1, \ldots, x_{n-2}, d, 0; y_1, \ldots, y_{n-2}, \lambda, \mu)$ ou $(x_1, \ldots, x_{n-2}, 0, d; y_1, \ldots, y_{n-2}, \lambda, \mu)$. En fait, le deuxième cas ramène au premier en considérant les deux chemins $(x_1, \ldots, x_{n-2}, y_1, \ldots, y_{n-2}$ étant fixés):

$$(0, d, \lambda, \mu) \xrightarrow{h} (d, d, \lambda, \mu - \lambda) \xrightarrow{k} (d, 0, \mu, \mu - \lambda)$$

avec $h(t) = (td, d, \lambda, \mu - \lambda t)$,

$$(k(t))^{-1} = (d, dt, \mu = (\lambda - \mu)t, \mu - \lambda) .$$

En raisonnant par récurrence sur n, on peut donc connecter le point M au point de coordonnées $(a, 0, \ldots, 0; 1, z_2, \ldots, z_n)$ qui peut être lui-même connecter *au* point au_1+w_1 par le chemin $(a,0,\ldots,;\ 1,tz_2,\ldots,tz_n)$. Ceci achève la démonstration de la proposition.

Soit v un vecteur de $S_{n,n}(a)$ et soit θ un vecteur de $H(A^n)$ tel que $q(\theta)=\varphi(v,\theta)=0$. Il est clair alors que $v+\theta$ est un élément de $S_{n,n}(a)$ dans la méme composante connexe que v (considérer le chemin $v+t\theta$). On constate alors par inspection que le chemin brisé reliant le point M au point au_1+w_1 qui est décrit de manière explicite ci-dessus, est constitué de chemins de ce type.

Si on appelle *chemin élémentaire* un chemin de la forme $v+t\theta$, on voit donc qu'on peut reformuler de manière plus précise la proposition précédente sous la forme:

PROPOSITION 3. *Tout M de $S_{n,n}(a), n\geqq 2$, peut être connecté au point au_1+w_1 grâce à des compositions de chemins élémentaires.*

THEOREME 4. *Supposons 2 inversible dans l'anneau euclidien A et désignons par $\mathrm{O}_{p,q}(A)$ le groupe des isométries de A^{p+q} muni de la forme quadratique*

$$\textstyle\sum_{i=1}^{p} x_i^2-\sum_{j=1}^{q} x_j^2 .$$

Dans ces conditions, l'homomorphisme canonique de $\mathrm{O}_{1,2}(A)$ dans $L_1(A)$ est surjectif.

Voir le travail de A. Bak (*On modules with quadratic forms*, dans *Algebraic K-theory and its geometrical applications*, Lecture Notes in Mathematics 108, Springer-Verlag, Berlin·Heidelberg·New York 1969, pp. 55–66) pour des résultats plus généraux.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4. Soit v un élément de $S_{n,n}(a), n\geqq 2$, a inversible dans A et soit θ un vecteur de $H(A^n)$ tel que $q(\theta)=\varphi(v,\theta)=0$. Alors un calcul simple montre que $(t_{v+\theta}t_v t_{v+\theta}t_v)(v)=v+4\theta$. D'après la proposition 3, on voit donc que tout élément de $\mathrm{O}_{n,n}(A), n\geqq 2$, s'écrit comme le produit de commutateurs et d'une transformation appartenant au groupe $\mathrm{O}_{1,2}(A)$. Ceci démontre évidemment la proposition.

THEOREME 5. *Soit A un anneau euclidien tel que 2 soit inversible dans A. Alors*

$$L^{-1}(A) \approx \mathsf{Z}/2\times A^*/(A^*)^2 .$$

DÉMONSTRATION. On va répéter pour l'essentiel les arguments ayant servi à démontrer le théorème 5.6. en évitant d'utiliser les calculs de

Dieudonné. En plongeant A dans son corps de fractions, on voit que $I_p(A)=\mathsf{Z}/2$. Il est facile de voir aussi que $H^1(\mathscr{X},A;\mu_2)\approx A^*/(A^*)^2$. Pour démontrer le théorème, il nous reste à montrer que l'application

$$A^* \approx K^{-1}(A) \xrightarrow{H} L^{-1}(A)$$

est surjective ou encore que tout élément α de $SO_{p,q}(A)$ de norme spinorielle égale à 1 est un produit de matrices 1-élémentaires. D'après le théoréme précédent, il nous suffit de considérer le cas $p=1, q=2$. Dans ce cas, α appartient à l'image du groupe $\mathrm{Spin}_{1,2}(A)$ par l'homomorphisme canonique $\varrho:\mathrm{Spin}_{1,2}(A) \to \mathrm{SO}_{1,2}(A)$ de noyau $\mathsf{Z}/2$. Pour le voir, on considère la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Int}\, C_{n,n}(A) \to \mathrm{Aut}\, C_{n,n}(A) \to \mathrm{Pic}(A)$$

et on plonge A dans son corps de fractions. Le groupe $\mathrm{Spin}_{1,2}(A)$ s'identifie au sous-groupe de $(C_{1,2}(A))^*$ formé des éléments u s'écrivant $a+be_1e_2+ce_2e_3+de_1e_3$ où e_1, e_2 et e_3 sont des générateurs de l'algèbre de Clifford tels que $e_ie_j+e_je_i=0$ pour $i\neq j$ et que $(e_1)^2=-(e_2)^2=-(e_3)^2=1$ et où a,b,c et d sont des éléments de A tels que $a^2-b^2+c^2-d^2=1$. Par suite, le groupe $\mathrm{Spin}_{1,2}(A)$ s'identifie au groupe $\mathrm{SL}_2(A)$ qui est connexe par arcs puisque A est euclidien. La démonstration du théorème 5 est achevée.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Bass, *K-theory and stable algebra*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 22 (1964), 5–60.
2. H. Bass, *Algebraic K-theory*, W. A. Benjamin. Inc. New York, Amsterdam 1968.
3. J. Dieudonnè, *Sur les groupes classiques*. Hermann, Paris (1948).
4. S. M. Gersten, *On Mayer-Victoris functors and algebraic K-theory*, J. Algebra 18 (1971), 51–88.
5. M. Karoubi, *Algèbres de Clifford et K-théorie*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 1 (1968), 161–270.
6. M. Karoubi, *La périodicité de Bott en K-théorie générale*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 4 (1971), 63–95.
7. M. Karoubi, *Périodicité de la K-théorie hermitienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 273, 599–602, 802–805, 840–843 et 1030–1033.
8. M. Karoubi, R. Gordon, P. Loffler et M. Zisman, *Séminaire Heidelberg-Saarbrücken-Strasbourg sur la K-théorie* 1970, exposé IV. Lecture Notes in Mathematics 136, Springer-Verlag, Berlin · New York, 1970.
9. M. Karoubi et O. Villamayor, *K-théorie algébrique et K-théorie topologique* I, Math. Scand. 28 (1971), 265–307.
10. M. Karoubi et O. Villamayor, *K-théorie hermitienne*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A-B 272 (1971), 1237–1240.
11. A. Micali et O. Villamayor, *Sur les algèbres de Clifford*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 1 (1968), 271–304.

12. A. Micali et O. Villamayor, *Sur les algèbres de Clifford* II. J. Reine und Angew. Math. 242 (1970), 61–90.
13. S. P. Novikov, *Algebraic construction and properties of Hermitian analogs of K-theory over rings with involution from the viewpoint of Hamiltonian formalism. Applications to differential topology and the theory of characteristic classes* I, Math. USSR-Izv. 4 (1970), 257–292, (Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Mat. 34 (1970), 253–288).
14. A. Rosenberg et D. Zelinsky, *Automorphisms of separable algebras*, Pacific J. Math. 11 (1961), 1109–1117.
15. C. Ruiz, *Thèse*. Université de Lille, France.
16. J. Tits, *Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford*, Invent. Math. 5 (1968), 19–41.
17. O. E. Villamayor, *Separable algebras and Galois extensions*, Osaka J. Math. 4 (1967), pp. 161–171.
18. C. T. C. Wall, *On the axiomatic foundations of the theory of Hermitian forms*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 67 (1970), 243–250.
19. C. T. C. Wall, *Surgery on compact manifolds*, Academic Press. New York 1971.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
STRASBOURG, FRANCE