

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — K-théorie hermitienne. Note (*) de MM. MAX KAROUBI et ORLANDO VILLAMAYOR, transmise par M. Henri Cartan.

On adapte les techniques de la K-théorie classique [(3), (5), (6)] à la K-théorie hermitienne considérée par Bass (3), Novikov (7), etc.

1. CATÉGORIES HERMITIENNES. — Soit \mathcal{C} une « catégorie en groupes de Banach » dans le sens de [(5), p. 113]. Un « foncteur de transposition » sur \mathcal{C} est la donnée d'un foncteur banachique contravariant (noté t comme il est d'usage) de \mathcal{C} dans elle-même et d'un isomorphisme fonctoriel $\theta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow t^2$. Une *catégorie hermitienne* est une catégorie en groupes de Banach munie d'un tel foncteur de transposition. Si \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont deux catégories hermitiennes, un *foncteur hermitien* de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' est un foncteur banachique (covariant) de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' qui commute (à isomorphisme canonique près) aux foncteurs de transposition et aux isomorphismes fonctoriels de Id sur t^2 . Une « *forme sesquilinéaire* » sur un objet M d'une catégorie hermitienne est la donnée d'un morphisme $u : M \rightarrow {}'M$. La forme est dite *non dégénérée* si u est un isomorphisme. On note $\text{Sesq}(M)$ le \mathbf{Z} -module des formes sesquilinéaires sur M . En identifiant M à $'(M)$ grâce à l'isomorphisme fonctoriel θ , on peut définir une involution T sur $\text{Sesq}(M)$ en posant $T(u) : M \approx {}'(M) \xrightarrow{u} {}'M$. Si $\varepsilon = \pm 1$, on a donc le complexe

$$\text{Sesq}(M) \xrightarrow{1+T\varepsilon} \text{Sesq}(M) \xrightarrow{1-T\varepsilon} \text{Sesq}(M).$$

Une *forme ε -hermitienne* sur M est un élément de $\text{Ker}(1 - T\varepsilon)$; une *forme ε -quadratique* q sur M est un élément de $\text{Coker}(1 - T\varepsilon)$ [(8), (9)]. Si q est représentée par une forme sesquilinéaire u_0 , la forme ε -hermitienne qui lui est associée est $u = (1 + T\varepsilon)(u_0)$; q est dite *non dégénérée* si u est non dégénérée.

Exemple. — Soit A un « anneau hermitien », c'est-à-dire un anneau de Banach (6) muni d'une antiinvolution bornée σ . Si A est unitaire et si M est un A -module à droite, définissons « l'antidual » de M , soit $'M$, comme le A -module à droite formé des applications \mathbf{Z} -linéaires $f : M \rightarrow A$ telles que $f(x\alpha) = \sigma(\alpha)f(x)$ pour $\alpha \in A$ et $x \in M$. Si M est projectif de type fini, on voit aisément que l'application canonique de M sur $'(M)$ est un isomorphisme. La catégorie $\mathcal{P}(A)$ des A -modules projectifs de type fini est donc ainsi munie d'une structure hermitienne.

Soit \mathcal{C} une catégorie hermitienne et soient M et N deux objets de \mathcal{C} munis de formes ε -quadratiques représentées par les formes sesquilinéaires u_0 et v_0 respectivement. Un morphisme $f : M \rightarrow N$ est dit *ε -orthogonal* si $u_0 - {}'f.v_0.f \in \text{Im}(1 - T\varepsilon)$. Il est clair que les objets de \mathcal{C} munis de formes ε -quadratiques non dégénérées forment ainsi les objets d'une

nouvelle catégorie ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}(\mathcal{C})$, les morphismes étant les morphismes ε -orthogonaux. La somme directe des objets de \mathcal{C} permet de définir une structure de monoïde abélien sur l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}(\mathcal{C})$. Le groupe symétrisé de ce monoïde, soit ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}(\mathcal{C})$, est le ε -groupe de Grothendieck de la catégorie hermitienne \mathcal{C} .

Dans les paragraphes suivants, nous nous proposons de définir axiomatiquement des foncteurs ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}^n(\mathcal{C})$, \mathcal{C} catégorie hermitienne, $n \in \mathbf{Z}$, ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}^0(\mathcal{C}) = {}_{\varepsilon}\mathcal{L}(\mathcal{C})$, en suivant le schéma tracé dans (5) et (6). Cependant, pour faciliter l'exposition, nous nous limiterons à l'exemple de la catégorie hermitienne $\mathfrak{A}(A)$, A anneau hermitien unitaire, cité ci-dessus. Nous noterons simplement ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}^n(A)$ les groupes ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}^n(\mathfrak{A}(A))$. Si A n'est pas unitaire, nous poserons ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}^0(A) = {}_{\varepsilon}\mathcal{L}(A) = \text{Ker}({}_{\varepsilon}\mathcal{L}(A^+) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{L}(\mathbf{Z}))$ comme dans (6).

2. DÉFINITION DES FONCTEURS \mathcal{L}^n POUR $n \geq 0$. — Soit A un anneau hermitien. Si $M = (a_{ji})$ est une matrice infinie à coefficients dans A ($i, j \in \mathbf{N}$), on pose

$$\|M\| = \text{Sup}(\|M\|_1, \|M\|_2), \quad \text{où } \|M\|_1 = \text{Sup}_i \sum_j \|a_{ji}\| \quad \text{et} \quad \|M\|_2 = \text{Sup}_j \sum_i \|a_{ji}\|.$$

Les matrices M telles que $\|M\| < +\infty$ forment un anneau de Banach B qui est en outre un anneau hermitien pour l'antiinvolution σ' définie par $\sigma'(M) = (b_{ji})$ et $b_{ji} = \sigma(a_{ij})$. Une matrice diagonale est dite de type fini si elle ne contient qu'un nombre fini d'éléments différents. Le « cône » CA de A est le plus petit sous-anneau de Banach de B contenant les matrices diagonales de type fini et les matrices de permutation. L'anneau stabilisé \tilde{A} est l'idéal de CA formé des matrices adhérentes à l'ensemble des matrices finies. La suspension SA est l'anneau de Banach quotient CA/\tilde{A} (1). Les anneaux de Banach CA , A et SA sont en fait des anneaux hermitiens pour l'antiinvolution induite par celle de B . On pose alors ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}^0(A) = {}_{\varepsilon}\mathcal{L}(A)$ et, par récurrence sur n , ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}^{n+1}(A) = {}_{\varepsilon}\mathcal{L}^n(SA)$. Avec quelques restrictions anodines sur A , on peut caractériser axiomatiquement ces foncteurs de la manière suivante. Nous dirons d'abord qu'une catégorie hermitienne \mathcal{C} est flasque s'il existe un foncteur hermitien $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ et un isomorphisme fonctoriel $h : \tau + \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \tau$ tel que ${}^t h \cdot h$ et $h \cdot {}^t h$ soient des identités en un sens évident. Un anneau hermitien unitaire A est flasque si la catégorie hermitienne associée $\mathfrak{A}(A)$ est flasque.

THÉORÈME 1. — Soit \mathcal{A}' la catégorie des anneaux hermitiens discrets ou celle des anneaux hermitiens A tels que tout élément de A soit divisible par 2. Il existe alors une façon et une seule (à isomorphisme près) de définir des foncteurs ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}^n$ sur \mathcal{A}' , $n \geq 0$, et des opérateurs de connexion naturels ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}^n(A'') \xrightarrow{\theta^n} {}_{\varepsilon}\mathcal{L}^{n+1}(A')$ pour toute « suite exacte » d'anneaux hermitiens

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

de sorte que les axiomes suivants soient satisfaits :

(1) La suite

$${}_{\varepsilon}L^n(A') \rightarrow {}_{\varepsilon}L^n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L^n(A'') \xrightarrow{\vartheta^n} {}_{\varepsilon}L^{n+1}(A') \rightarrow {}_{\varepsilon}L^{n+1}(A)$$

est une suite exacte;

(2) ${}_{\varepsilon}L^n(A) = 0$ si A est un anneau flasque;

(3) ${}_{\varepsilon}L^0(A) = {}_{\varepsilon}L(A)$ et l'inclusion naturelle de A dans \tilde{A} induit un isomorphisme de ${}_{\varepsilon}L^n(A)$ sur ${}_{\varepsilon}L^n(\tilde{A})$.

3. DÉFINITION DES FONCTEURS L^n POUR $n \leq 0$. — Soit de nouveau A un anneau hermitien. Les anneaux de Banach $A \langle x \rangle$, EA et ΩA introduits dans (6) sont aussi hermitiens (2). On pose alors

$${}_{\varepsilon}L^{-1}(A) = \text{Ker}({}_{\varepsilon}L(\Omega A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L(EA)) \quad \text{et} \quad {}_{\varepsilon}L^{-n-1}(A) = {}_{\varepsilon}L^{-n}(\Omega A) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Ces nouveaux foncteurs peuvent être aussi caractérisés axiomatiquement en introduisant une notion de « fibration » convenable analogue aux fibrations de Serre dans la théorie de l'homotopie classique. De manière précise, soit ${}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$ le groupe des automorphismes ε -orthogonaux de $A^n \oplus {}^t(A^n)$ et soit ${}_{\varepsilon}O(A) = \varinjlim {}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$. Un homomorphisme hermitien $f: A \rightarrow A''$ est une « ${}_{\varepsilon}O$ -fibration » si, pour tout entier p et pour tout élément $\alpha'' = \alpha''(x_1, \dots, x_p)$ de ${}_{\varepsilon}O(A'' \langle x_1, \dots, x_p \rangle)$ tel que $\alpha'' = \alpha''(0, \dots, 0) = 1$, il existe un élément $\alpha = \alpha(x_1, \dots, x_p)$ de ${}_{\varepsilon}O(A \langle x_1, \dots, x_p \rangle)$ tel que $f(\alpha) = \alpha''$ en un sens évident.

THÉORÈME 2. — Soit \mathcal{A} la catégorie des anneaux hermitiens. Il existe alors une façon et une seule (à isomorphisme près) de définir des foncteurs ${}_{\varepsilon}L^{-n}$, $n \geq 0$, sur \mathcal{A} ainsi que des opérateurs de connexion naturels

$$\partial^{-n-1}: {}_{\varepsilon}L^{-n-1}(A'') \rightarrow {}_{\varepsilon}L^{-n}(A')$$

pour toute ${}_{\varepsilon}O$ -fibration $f: A \rightarrow A''$ de noyau A' en sorte que les axiomes suivants soient satisfaits :

(1) La suite

$${}_{\varepsilon}L^{-n-1}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L^{-n-1}(A'') \xrightarrow{\partial^{-n-1}} {}_{\varepsilon}L^{-n}(A') \rightarrow {}_{\varepsilon}L^{-n}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L^{-n}(A'')$$

est une suite exacte;

(2) ${}_{\varepsilon}L^0(A) = {}_{\varepsilon}L(A)$ et ${}_{\varepsilon}L^{-n}(EA) = 0$ si $n > 0$.

4. CALCUL DE CERTAINS GROUPES L^n . — Pour tout anneau hermitien unitaire A posons

$${}_{\varepsilon}L_1(A) = {}_{\varepsilon}O(A) / [{}_{\varepsilon}O(A), {}_{\varepsilon}O(A)].$$

Une méthode standard (6) permet de définir un homomorphisme surjectif

$${}_{\varepsilon}h_1: {}_{\varepsilon}L_1(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L^{-1}(A).$$

PROPOSITION 3 [cf. (4)]. — Soit k un corps commutatif discret muni de l'anti-involution triviale. Alors ${}_{\varepsilon}h_1$ est un isomorphisme et ${}_{\varepsilon}L^{-1}(k) \approx \mathbf{Z}_2 \times k^*/(k^*)^2$.

Soit maintenant $A \langle z, z^{-1} \rangle$ l'anneau hermitien formé des séries $S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ telles que $\sum \|a_n\| < +\infty$ avec l'antiinvolution définie par la formule $\sigma(S) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma(a_n) z^{-n}$. Si M est un A -module muni d'une forme ε -quadratique, $\text{Id}_M \otimes t$ est un automorphisme ε -orthogonal de $M \otimes_A A \langle z, z^{-1} \rangle$. On en déduit un homomorphisme de ${}_{\varepsilon}L(A)$ dans ${}_{\varepsilon}L_1(A \langle z, z^{-1} \rangle)$ et de ${}_{\varepsilon}L^n(A)$ dans ${}_{\varepsilon}L^{n-1}(A \langle z, z^{-1} \rangle)$ pour $n \geq 1$.

PROPOSITION 4. — *Les homomorphismes précédents sont injectifs et identifient ${}_{\varepsilon}L(A)$ et ${}_{\varepsilon}L^n(A)$ à des facteurs directs de ${}_{\varepsilon}L_1(A \langle z, z^{-1} \rangle)$ et ${}_{\varepsilon}L^{n-1}(A \langle z, z^{-1} \rangle)$ respectivement [comparer avec (7)].*

On a, d'autre part, des homomorphismes d'un type bien connu (3)

$${}_{\varepsilon}V^n: {}_{\varepsilon}L^n(A) \rightarrow K^n(A) \quad \text{et} \quad {}_{\varepsilon}H^n: K^n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L^n(A),$$

le premier étant l'homomorphisme « oubli » associant à un module quadratique le module projectif sous-jacent et le second étant induit par le « foncteur hyperbolique » (3).

PROPOSITION 5. — *Soit k un corps commutatif discret muni de l'antiinvolution triviale. Alors l'image de ${}_{\varepsilon}H^{-1}$ est isomorphe à $k^*/(k^*)^2$ et ${}_{\varepsilon}V^{-2} \cdot {}_{\varepsilon}H^{-2}$ coïncide avec la multiplication par deux. En particulier, si -1 admet une racine carrée dans k , ${}_{\varepsilon}H^{-2}$ et ${}_{\varepsilon}V^{-2}$ induisent des isomorphismes entre les groupes $K^{-2}(k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}'$ et ${}_{\varepsilon}L^{-2}(k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}'$ où $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$.*

Remarque. — Soit A un anneau de Banach et soit A' l'anneau de Banach $A \times A^0$ muni de l'antiinvolution $\sigma(a, b) = (b, a)$. On voit alors aisément que ${}_{\varepsilon}L^n(A') \approx K^n(A)$. La K -théorie se retrouve ainsi comme un cas particulier de la « L -théorie ».

(*) Séance du 26 avril 1971.

(1) Ce léger changement de définition par rapport à (6) n'affecte pas les résultats de (6), compte tenu de (5).

(2) On écrit $A \langle x \rangle, A \langle x_1, \dots, x_p \rangle, \dots$ au lieu de $A \{ x \}, A \{ x_1, \dots, x_p \}, \dots$ comme dans (6).

(3) H. BASS, *Lectures on topics in algebraic K-theory*, Tata Institute, Bombay, 1967.

(4) J. DIEUDONNÉ, *La géométrie des groupes classiques*, Springer, Berlin, 1963.

(5) M. KAROUBI, Séminaire Heidelberg-Saarbrücken-Strasbourg, 1967-1968, exposé IV, Springer Lecture Notes, n° 136.

(6) M. KAROUBI et O. VILLAMAYOR, *Comptes rendus*, 269, série A, 1969, p. 416.

(7) S. NOVIKOV, *Matematika*, 34, 1970, p. 253-288.

(8) J. TITS, *Invent. Math.*, 5, 1968, p. 19-41.

(9) C. T. C. WALL, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 67, 1970, p. 243-250.

(Institut de Mathématique,
7, rue René-Descartes, 67-Strasbourg,
Bas-Rhin.)