

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Périodicité de la K-théorie hermitienne.*  
*Les théories  ${}_{\varepsilon}V^n$  et  ${}_{\varepsilon}U^n$ .* Note (\*) de M. MAX KAROUBI, transmise par  
 M. Henri Cartan.

En explicitant certaines idées de Novikov (<sup>1</sup>), nous construisons ici des théories  ${}_{\varepsilon}U^n$  et  ${}_{\varepsilon}V^n$  intermédiaires entre la K-théorie classique et la K-théorie hermitienne.

1. INVARIANCE HOMOTOPIQUE DE LA K-THÉORIE HERMITIENNE. —  
 Soit A un anneau de Banach et soit  $A_{n,p}$  l'anneau de Banach

$$A \langle x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_p, t_1^{-1}, \dots, t_p^{-1} \rangle$$

des séries convergentes en les variables  $x_1, \dots, t_p^{-1}$  (si A est muni de la norme discrète, ces séries sont simplement des polynômes). En suivant (<sup>2</sup>), on dit que A est *n-régulier* (resp. *K-régulier*) si l'inclusion de A dans  $A_{n,0}$  [resp. de A dans  $A_{n,p}$  pour tout couple  $(n, p)$ ] induit un isomorphisme  $K(A) \approx K(A_{n,0})$  [resp.  $K(A) \approx K(A_{n,p})$ ]. Si A est un *anneau hermitien* [c'est-à-dire un anneau de Banach muni d'une anti-involution bornée, cf. (<sup>3</sup>)], A est dit *n-régulier* (resp. *K-régulier*) si l'anneau de Banach sous-jacent est *n-régulier* (resp. *K-régulier*). Enfin, notons que, pour toute suite exacte

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

d'anneaux de Banach *p-réguliers* ( $p \in \mathbf{N}$ ), on a la suite exacte

$$K^n(A) \rightarrow K^n(A'') \rightarrow K^{n+1}(A') \rightarrow K^{n+1}(A) \rightarrow K^{n+1}(A''), \quad n \in \mathbf{Z}$$

*Exemples d'anneaux de Banach K-réguliers* (donc *n-réguliers*). — Les algèbres de Banach sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , les anneaux noethériens réguliers discrets, les corps complets à valuation discrète, etc. [cf. (<sup>3</sup>)].

CONVENTION IMPORTANTE POUR LA SUITE. — *Les anneaux considérés ont tous leurs éléments divisibles par 2* (i. e. l'équation  $2x = a$  admet une solution et une seule).

LEMME 1. — *Soit A un anneau hermitien et soit  ${}_{\varepsilon}L'(A)$  le noyau de l'homomorphisme  ${}_{\varepsilon}L(A) \rightarrow K(A)$ . L'inclusion de A dans  $A_{n,0}$  induit alors un isomorphisme  ${}_{\varepsilon}L'(A_{n,0}) \approx {}_{\varepsilon}L'(A)$ . En particulier,  ${}_{\varepsilon}L(A_{n,0}) \approx {}_{\varepsilon}L(A)$  si A est *n-régulier*.*

COROLLAIRE 2. — *Soit  $A''$  un anneau hermitien *n-régulier* pour tout n et soit  $A \rightarrow A''$  un homomorphisme surjectif d'anneaux hermitiens ( $A''$  étant muni de la norme quotient). Alors l'homomorphisme  $SA \rightarrow SA''$  est une  ${}_{\varepsilon}0$ -fibration dans le sens de (<sup>4</sup>).*

COROLLAIRE 3. — *Soit*

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

une suite exacte d'anneaux hermitiens  $p$ -réguliers pour tout  $p$ . On a alors la suite exacte

$${}_{\varepsilon}L^n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L^n(A'') \rightarrow {}_{\varepsilon}L^{n+1}(A') \rightarrow {}_{\varepsilon}L^{n+1}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L^{n+1}(A''), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

PROPOSITION 4. — Soit  $A$  un anneau hermitien  $K$ -régulier et soit  ${}_{\varepsilon}L^{p,q}(A)$  le groupe  ${}_{\varepsilon}L(S^p \Omega^q A)$ . Alors  ${}_{\varepsilon}L^{p,q}(A)$  est naturellement isomorphe au groupe  ${}_{\varepsilon}L^n(A)$ ,  $n = p - q$ .

La proposition précédente peut être formulée de manière plus précise grâce à des « cup-produits » appropriés comme dans (2). En effet, si on pose  $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$ , on a  ${}_1L(S \Omega \mathbf{Z}') \approx {}_1L(\mathbf{Z}')$  d'après la proposition précédente. Le cup-produit par l'élément de  ${}_1L(S \Omega \mathbf{Z}')$  correspondant à l'élément unité de  ${}_1L(\mathbf{Z}')$  induit un isomorphisme de  ${}_{\varepsilon}L^{p,q}(A)$  sur  ${}_{\varepsilon}L^{p+1,q+1}(A)$  si  $A$  est  $K$ -régulier.

2. LA THÉORIE  ${}_{\varepsilon}V^n$ . — Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie hermitienne (tout morphisme étant divisible par 2) désignons par  ${}_{\varepsilon}Q(\mathcal{C})$  la catégorie des objets  $\varepsilon$ -quadratiques de  $\mathcal{C}$ . Par définition, le groupe  ${}_{\varepsilon}V(\mathcal{C})$  est le groupe de Grothendieck du foncteur « oubli »  ${}_{\varepsilon}Q(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ . De manière plus précise, considérons l'ensemble des triples  $(E, g_1, g_2)$ , où  $E$  est un objet de  $\mathcal{C}$  et où  $g_j : E \rightarrow {}'E$ ,  $j = 1, 2$ , est un isomorphisme tel que  $t_{g_j} = \varepsilon g_j$ . Le groupe  ${}_{\varepsilon}V(\mathcal{C})$  est alors le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie de tels triples par le sous-groupe engendré par les relations suivantes :

$$(1) \quad (E \oplus E', g_1 \oplus g'_1, g_2 \oplus g'_2) = (E, g_1, g_2) + (E', g'_1, g'_2);$$

$$(2) \quad (E, g_1, g_2) = 0$$

si  $g_2$  est « homotope » à  $g_1$ , c'est-à-dire s'il existe un isomorphisme  $g = g(x) : E \rightarrow {}'E$  dans la catégorie  $\mathcal{C} \langle x \rangle$  tel que  $'g = \varepsilon g$  et tel que

$$g(0) = g_1, \quad g(1) = g_2.$$

Si  $A$  est un anneau hermitien unitaire, on pose  ${}_{\varepsilon}V(A) = {}_{\varepsilon}V(\mathcal{T}(A))$ . Si  $A$  n'est pas unitaire, on pose

$${}_{\varepsilon}V(A) = \text{Ker}({}_{\varepsilon}V(A^+) \rightarrow {}_{\varepsilon}V(\mathbf{Z}')),$$

$A^+$  étant l'algèbre  $A$  augmentée sur  $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$ .

DÉFINITION ET THÉORÈME 5. — Pour tout anneau hermitien  $K$ -régulier  $A$  posons  ${}_{\varepsilon}V^{p,q}(A) = {}_{\varepsilon}V(S^p \Omega^q A)$ . On a alors des isomorphismes naturels

$${}_{\varepsilon}V^{p,q}(A) \approx {}_{\varepsilon}V^{p+1,q+1}(A).$$

Posons

$${}_{\varepsilon}V^n(A) = {}_{\varepsilon}V^{n,0}(A) \quad \text{si } n \geq 0 \quad \text{et} \quad {}_{\varepsilon}V^n(A) = {}_{\varepsilon}V^{0,-n}(A) \quad \text{si } n \leq 0.$$

On a alors la suite exacte

$${}_{\varepsilon}L^{n-1}(A) \rightarrow K^{n-1}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}V^n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L^n(A) \rightarrow K^n(A).$$

Enfin, pour toute suite exacte d'anneaux hermitiens K-réguliers

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0,$$

on a la suite exacte

$${}_{\varepsilon}V^{n-1}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}V^{n-1}(A'') \rightarrow {}_{\varepsilon}V^n(A') \rightarrow {}_{\varepsilon}V^n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}V^n(A'').$$

*Remarque.* — Si  $A$  est une algèbre de Banach involutive, on vérifie aisément que  ${}_{\varepsilon}V(A) \approx {}_{-\varepsilon}U^{0,1}(A)$  avec les notations de la Note précédente <sup>(3)</sup>. Donc  ${}_{\varepsilon}V^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$  dans ce cas. En fait, nous verrons dans la Note suivante que  ${}_{\varepsilon}V^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$  si  $A$  est un anneau hermitien K-régulier.

3. LA THÉORIE  ${}_{\varepsilon}U^n$ . — Nous allons construire une théorie  ${}_{\varepsilon}U^n$  sur la catégorie des anneaux hermitiens généralisant la théorie  ${}_{\varepsilon}U^n$  étudiée dans le cas topologique <sup>(3)</sup>. Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie hermitienne telle que tout morphisme de  $\mathcal{C}$  soit divisible par 2. On désigne alors par  ${}_{\varepsilon}U(\mathcal{C})$  le groupe de Grothendieck du foncteur hyperbolique  $\overline{\mathcal{C}} \rightarrow {}_{\varepsilon}Q(\mathcal{C})$ ,  $\overline{\mathcal{C}}$  étant la catégorie des isomorphismes de  $\mathcal{C}$ . De manière plus précise, le groupe  ${}_{\varepsilon}U(\mathcal{C})$  peut être construit ainsi. On considère l'ensemble des triples  $(F, \gamma_1, \gamma_2)$ , où  $F$  est un objet  $\varepsilon$ -quadratique de  $\mathcal{C}$  et où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux graduations « gauches » de  $F$ , c'est-à-dire des automorphismes involutifs de  $F$  tels que  $\gamma_j^* = -\gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ . Le groupe  ${}_{\varepsilon}U(\mathcal{C})$  est alors le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie de tels triples par le sous-groupe engendré par les relations suivantes :

$$(1) \quad (E \oplus E', \gamma_1 \oplus \gamma'_1, \gamma_2 \oplus \gamma'_2) = (E, \gamma_1, \gamma_2) + (E', \gamma'_1, \gamma'_2);$$

$$(2) \quad (E, \gamma_1, \gamma_2) = 0$$

si la graduation  $\gamma_2$  est homotope à la graduation  $\gamma_1$ .

Si  $A$  est un anneau hermitien unitaire, on pose

$${}_{\varepsilon}U(A) = {}_{\varepsilon}U(\mathcal{T}(A)).$$

Si  $A$  n'est pas unitaire, on pose

$${}_{\varepsilon}U(A) = \text{Ker}({}_{\varepsilon}U(A^+) \rightarrow {}_{\varepsilon}U(\mathbf{Z}')).$$

**DÉFINITION ET THÉORÈME 6.** — Pour tout anneau hermitien K-régulier  $A$  posons  ${}_{\varepsilon}U^{p,q}(A) = {}_{\varepsilon}U(S^p \Omega^q A)$ . On a alors des isomorphismes naturels  ${}_{\varepsilon}U^{p,q}(A) \approx {}_{\varepsilon}U^{p+1,q+1}(A)$ . Posons

$${}_{\varepsilon}U^n(A) = {}_{\varepsilon}U^{n,0}(A) \quad \text{si } n \geq 0 \quad \text{et} \quad {}_{\varepsilon}U^n(A) = {}_{\varepsilon}U^{0,-n}(A) \quad \text{si } n \leq 0.$$

On a alors la suite exacte

$$K^{n-1}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L^{n-1}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}U^n(A) \rightarrow K^n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L^n(A).$$

Enfin, pour toute suite exacte d'anneaux hermitiens K-réguliers

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0,$$

on a la suite exacte

$${}_{\varepsilon}U^{n-1}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}U^{n-1}(A'') \rightarrow {}_{\varepsilon}U^n(A') \rightarrow {}_{\varepsilon}U^n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}U^n(A'').$$

*Remarque.* — Il est clair que la théorie  ${}_{\varepsilon}U^n$  qui vient d'être construite coïncide avec la théorie  ${}_{\varepsilon}U^n$  de la Note précédente sur la sous-catégorie des algèbres de Banach involutives.

4. THÉORIES RELATIVES. — Suivant un schéma maintes fois éprouvé <sup>(1)</sup>, il est possible de généraliser les définitions précédentes au cas d'un homomorphisme surjectif d'anneaux hermitiens unitaires  $A \xrightarrow{\psi} A''$  ( $A''$  étant muni de la norme quotient). Pour définir  ${}_{\varepsilon}U(\psi) = {}_{\varepsilon}U^0(\psi)$  par exemple, on considère des triples  $(F, \gamma_1, \gamma_2)$  tels que

$$\psi_*(\gamma_1) = \psi_*(\gamma_2), \quad \psi_* : \mathcal{X}(A) \rightarrow \mathcal{X}(A''),$$

la notion d'homotopie étant restreinte de manière convenable. Le groupe  ${}_{\varepsilon}V(\psi) = {}_{\varepsilon}V^0(\psi)$  se définit de la même manière. Enfin, les groupes  ${}_{\varepsilon}V^n(\psi)$  et  ${}_{\varepsilon}U^n(\psi)$  s'obtiennent en remplaçant  $\psi$  par  $S^n\psi$  ou  $\Omega^{-n}\psi$  dans la définition de  ${}_{\varepsilon}V^0$  et  ${}_{\varepsilon}U^0$ . Cette généralisation est mineure en théorie car on a des isomorphismes d'excision  ${}_{\varepsilon}U^n(\psi) \approx {}_{\varepsilon}U^n(A')$  et  ${}_{\varepsilon}V^n(\psi) \approx {}_{\varepsilon}V^n(A')$  avec  $A' = \text{Ker } \psi$ . Cependant, elle est parfois commode pour les calculs.

(\*) Séance du 27 septembre 1971.

<sup>(1)</sup> M. KAROUBI, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, 1, 1968, p. 161-270.

<sup>(2)</sup> M. KAROUBI, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, 4, fasc. 1, 1971, p. 63-95.

<sup>(3)</sup> M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 599.

<sup>(4)</sup> M. KAROUBI et O. VILLAMAYOR, *Comptes rendus*, 272, série A, 1971, p. 1237.

<sup>(5)</sup> S. NOVIKOV, *Math. USSR-Izvestija*, vol. 4, 1970, n° 2, p. 257-292.

*Institut de Recherche mathématique,  
7, rue René-Descartes,  
67-Strasbourg, Bas-Rhin.*