

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Périodicité de la K-théorie hermitienne.*
Les théorèmes fondamentaux. Note (*) de M. MAX KAROUBI, transmise
 par M. Henri Cartan.

De l'isomorphisme ${}_{-\varepsilon}U^n(A) \approx {}_{\varepsilon}V^{n+1}(A)$, vrai pour tout anneau hermitien K-régulier A, on déduit un certain nombre de théorèmes de périodicité du type ${}_{\varepsilon}L^n(A) \approx {}_{\varepsilon}L^{n+4}(A)$, notamment si A est noethérien régulier discret.

1. L'ISOMORPHISME ${}_{\varepsilon}V^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$. — Soit A un anneau hermitien K-régulier (1) et soit $\psi : A \langle x \rangle \rightarrow A \times A$ l'homomorphisme défini par $\psi(P) = (P(0), P(1))$. On va s'inspirer de la construction de l'opérateur topologique $t_U : {}_{-\varepsilon}U^{0,1}(A) \approx {}_{\varepsilon}V(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}U^{0,0}(\Omega A)$, défini seulement si A est une algèbre de Banach involutive, pour définir un homomorphisme analogue

$$\tau_V : {}_{\varepsilon}V(A) \rightarrow {}_{-\varepsilon}U(\psi).$$

A un triple (E, g_1, g_2) définissant un élément de ${}_{\varepsilon}V(A)$, on associe le triple (F, γ_1, γ_2) , où $F = E \oplus {}^tE$ est muni de la forme $(-\varepsilon)$ -hyperbolique canonique et où $\gamma_j, j = 1, 2$, est la graduation gauche définie par la matrice

$$\gamma_j(x) = \begin{pmatrix} 2x^4 - 4x^2 + 1 & g_j^{-1}x(2x^4 - 6x^2 + 4) \\ 2g_jx(1 - x^2) & -2x^4 + 4x^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque ${}_{-\varepsilon}U(\psi) \approx {}_{-\varepsilon}U(\Omega A)$ d'après le théorème d'excision, on voit que τ_V définit en fait un homomorphisme de ${}_{\varepsilon}V(A)$ dans ${}_{-\varepsilon}U^{-1}(A)$ pour tout anneau hermitien K-régulier A. En appliquant les foncteurs S et Ω , on en déduit un homomorphisme de ${}_{\varepsilon}V^n(A)$ dans ${}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$ que nous noterons encore τ_V . Si A est une algèbre de Banach involutive, il est facile de voir que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} {}_{\varepsilon}V(A) & \xrightarrow{\tau_V} & {}_{-\varepsilon}U(\Omega A) \\ \cong & & \parallel \\ {}_{-\varepsilon}U^{0,1}(A) & \xrightarrow{t_U} & {}_{-\varepsilon}U(\Omega A) \end{array}$$

(noter que la définition de t_U utilise les fonctions trigonométriques).

On peut de même définir un homomorphisme en sens inverse de la manière suivante. Considérons l'anneau hermitien $A_{0,1} = A \langle z, z^{-1} \rangle$ des

séries laurentiennes $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ à coefficients dans A avec $\sum \|a_n\| < +\infty$,

l'antiinvolutions transformant S en $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{a}_n z^{-n}$. Cet anneau est naturellement

contenu dans la suspension SA de A grâce à l'homomorphisme explicité dans (3). On définit alors un homomorphisme

$$\tau_U : {}_{-\varepsilon}U(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}V(A \langle z, z^{-1} \rangle)$$

de la manière suivante. Considérons un triple (F, γ_1, γ_2) , où $F = E \oplus {}^tE$ est muni de la forme $(-\varepsilon)$ -hyperbolique canonique et où γ_j est la graduation gauche définie par $\gamma_j = 2p_j - 1$ avec

$$p_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}.$$

A ce triple on associe alors le triple $(E \oplus {}^tE, g_1, g_2)$ où $E \oplus {}^tE \approx {}^t(E \oplus {}^tE)$ est muni de la forme ε -hyperbolique canonique et où g_j est défini par la matrice

$$g_j = g_j(z) = \begin{pmatrix} a_j + (1 - a_j)z & -b_j(z + z^{-1} - 2) \\ -\varepsilon c_j & \varepsilon(d_j z^{-1} + (1 - d_j)) \end{pmatrix}.$$

L'homomorphisme τ'_U ainsi défini induit un homomorphisme τ_U de ${}_{-\varepsilon}U(A)$ dans ${}_{\varepsilon}V(SA) = {}_{\varepsilon}V^1(A)$, d'où un homomorphisme de ${}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$ dans ${}_{\varepsilon}V^n(A)$ que nous noterons encore τ_U . Si A est une algèbre de Banach involutive, on vérifie la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}_{-\varepsilon}U(A) & \xrightarrow{\tau'_U} & {}_{\varepsilon}V(A \langle z, z^{-1} \rangle) \\ \cong & & \cong \\ {}_{-\varepsilon}U^{1,1}(A) & \xrightarrow{t_U} & {}_{-\varepsilon}U^{0,1}(A \langle z, z^{-1} \rangle) \end{array}$$

où t_U est défini grâce à la théorie KR (convenablement généralisée).

Remarque. — L'homomorphisme τ'_U est à rapprocher d'un homomorphisme analogue introduit par Novikov [cf. (7), p. 286, l. 13 à 32.]

THÉORÈME 1. — *Soit A un anneau hermitien K -régulier. Les homomorphismes τ_U et τ_V définissent alors des isomorphismes naturels entre les groupes ${}_{\varepsilon}V^n(A)$ et ${}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$. De manière plus précise, $\tau_V \tau_U$ et $\tau_U \tau_V$ sont définis par le cup-produit par un élément inversible de l'anneau ${}_1L(\mathbf{Z}')$.*

Remarque. — Ce théorème s'applique notamment lorsque A est un anneau noethérien régulier discret, un corps valué complet non discret, une algèbre de Banach sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} , etc.

2. LES THÉORÈMES DE PÉRIODICITÉ. — Pour tout anneau hermitien K -régulier posons

$${}_{\varepsilon}W^n(A) = \text{Coker}(K^n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L^n(A))$$

[noter que ${}_{\varepsilon}W^0(A)$ est le « groupe de Witt » de A]. Puisque $K^n(A) = 0$ si $n > 0$ et si A est noethérien régulier, le théorème 1 implique le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit A un anneau noethérien régulier discret. On a alors des isomorphismes naturels ${}_{\varepsilon}W^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}W^{n+2}(A)$ pour $n \geq 0$. En particulier, ${}_{\varepsilon}L^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}L^{n+2}(A)$ pour $n > 0$ et ${}_{\varepsilon}L^2(A) \approx {}_{-\varepsilon}W^0(A)$.*

Considérons le cas particulier $A = \mathbf{Z}'$. Par l'isomorphisme

$${}_1W^0(\mathbf{Z}') \approx {}_{-1}W^2(\mathbf{Z}') \approx {}_{-1}L^2(\mathbf{Z}'),$$

l'élément unité de ${}_1W^0(\mathbf{Z}')$ se transforme en un élément u_2 de ${}_{-1}L^2(\mathbf{Z}')$ dont l'image dans ${}_{-1}L^2(\mathbf{R}) \approx KU^2(\text{Point})$ est le générateur topologique usuel. En appliquant le théorème 1, on démontre de même qu'il existe un élément u_{-2} de ${}_{-1}L^{-2}(\mathbf{Z}')$ dont l'image dans ${}_{-1}L^{-2}(\mathbf{R}) \approx KU^{-2}(\text{Point})$ est le générateur topologique. Par des arguments topologiques, on en déduit que le cup-produit $u_2 u \cup u_{-2}$ est un élément de ${}_1L^0(\mathbf{Z}')$ dont l'image dans ${}_1L^0(\mathbf{R})$ s'écrit $E^+ - E^-$, où E^+ (resp. E^-) représente \mathbf{R}^2 muni de la forme quadratique $x^2 + y^2$ (resp. $-x^2 - y^2$). En particulier, sa classe dans ${}_1W^0(\mathbf{Z}')$ est quatre fois un élément inversible de ${}_1W^0(\mathbf{Z}')$. On en déduit aussitôt le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit A un anneau hermitien K-régulier. On a alors des isomorphismes naturels*

$${}_{-\varepsilon}W^n(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \approx {}_{\varepsilon}W^{n+2}(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

De manière plus précise, il existe des homomorphismes naturels

$$h : {}_{-\varepsilon}W^n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}W^{n+2}(A) \quad \text{et} \quad h' : {}_{\varepsilon}W^{n+2}(A) \rightarrow {}_{-\varepsilon}W^n(A)$$

tels que $h' \cdot h$ et $h \cdot h'$ soient la multiplication par quatre.

Remarques. — Si A est l'algèbre de Banach des fonctions continues réelles sur un espace compact X, le théorème 3 implique l'isomorphisme bien connu $KO^n(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z} [1/2] \approx KO^{n+4}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z} [1/2]$. Si A est discret, nous montrerons dans une prochaine Note que l'hypothèse de K-régularité est superflue.

3. CALCUL DE L^{-2} . — Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} {}_{\varepsilon}L^{n-1}(A) & \longrightarrow & K^{n-1}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}V^n(A) & \xrightarrow{\alpha_n} & {}_{\varepsilon}L^n(A) & \longrightarrow & K^n(A) \\ & & & & \uparrow \tau_{n-1} & & & & \\ K^{n-2}(A) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}L^{n-2}(A) & \xrightarrow{\gamma_{n-2}} & {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A) & \longrightarrow & K^{n-1}(A) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}L^{n-1}(A) \end{array}$$

où $\tau_{n-1} = \tau_U$ est l'isomorphisme explicite dans le théorème 1. Posons $\delta_{n-2} = \alpha_n \cdot \tau_{n-1} \cdot \gamma_{n-2}$. Le diagramme précédent nous permet de définir une *filtration* sur le groupe ${}_{\varepsilon}L^n(A)$, soit

$$\dots \subset {}_{\varepsilon}L_{(p)}^n(A) \subset \dots \subset {}_{\varepsilon}L_{(2)}^n(A) \subset {}_{\varepsilon}L_{(1)}^n(A) \subset {}_{\varepsilon}L^n(A)$$

par les formules suivantes :

$${}_{\varepsilon}L_{(1)}^n(A) = \text{Im } \alpha_n, \quad {}_{\varepsilon}L_{(2)}^n(A) = \text{Im } \delta_{n-2}, \quad {}_{\varepsilon}L_{(p)}^n(A) = \text{Im } \delta_{n-p} \dots \delta_{n-2}$$

si p est pair, et

$${}_{\varepsilon}L_{(p)}^n(A) = \text{Im } \alpha_{n-p+1} \cdot \delta_{n-p+1} \dots \delta_{n-2}$$

si p est impair ≥ 3 . L'antiinvolution de A induit une involution σ sur $K^n(A)$. Posons

$$k^n(A) = K^n(A)/(1 - \sigma)K^n(A) \quad \text{et} \quad k'^n(A) = K^n(A)/(1 + \sigma)K^n(A).$$

Soit enfin ${}_{\varepsilon}k''^{n-1}(A)$ le groupe d'homologie du complexe

$${}_{\varepsilon}L^{n-1}(A) \rightarrow K^{n-1}(A) \xrightarrow{1-\sigma} K^{n-1}(A).$$

THÉORÈME 4. — *Le groupe ${}_{\varepsilon}L_{(2)}^n(A)$ s'identifie au noyau de l'homomorphisme « discriminant »*

$$d: {}_{\varepsilon}L_{(1)}^n(A) \rightarrow k^{n-1}(A) \quad (*)$$

On a en outre la suite exacte

$$0 \rightarrow {}_{\varepsilon}k''^{n-1}(A) \rightarrow {}_{-\varepsilon}W^{n-2}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L_{(2)}^n(A) \rightarrow 0.$$

En particulier, si A est un corps discret muni d'une involution triviale, on a

$${}_{-1}W^{-2}(A) \approx {}_1L_{(2)}^0(A) \quad \text{et} \quad {}_1W^{-2}(A) \approx \mathbf{Z}/2.$$

Si ${}_{\varepsilon}k''^{n-1}(A) = 0$, l'invariant de Hasse-Witt généralisé s'explique ainsi : c'est l'homomorphisme de ${}_{\varepsilon}L_{(2)}^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}W^{n-2}(A)$ dans $k'^{n-2}(A)$ obtenu par passage au quotient de l'homomorphisme « oubli » ${}_{-\varepsilon}L^{n-2}(A) \rightarrow K^{n-2}(A)$. Si $n = 0$, $\varepsilon = 1$ et si A est un corps de nombres, on obtient essentiellement l'invariant de Hasse-Witt classique.

(*) Séance du 27 octobre 1971.

(¹) Les définitions utilisées dans cette Note sont explicitées dans les trois Notes antérieures [(⁴), (⁵), (⁶)]. En particulier, 2 est inversible dans A .

(²) Avec cette définition, le groupe $k^{-1}(A)$ s'identifie ainsi au quotient de $K^{-1}(A)$ par le sous-groupe engendré par les classes des matrices α, α^* , où $\alpha \in GL_n(A) \subset GL(A)$.

(³) M. KAROUBI, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, 4, fasc. 1, 1971, p. 63-95.

(⁴) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 599.

(⁵) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 802.

(⁶) M. KAROUBI et O. VILLAMAYOR, *Comptes rendus*, 272, série A, 1971, p. 1237.

(⁷) S. NOVIKOV, *Math. USSR-Izvestja*, 4, n^o 2, 1970, p. 257-292.

Institut
de Recherche mathématique,
7, rue René-Descartes,
67-Strasbourg,
Bas-Rhin.