C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278 (7 janvier 1974) Série A — 67

ALGÈBRE. — *K-théorie algébrique. Sur l'ordre de* $K_3(Z)$.

Note (*) de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

On montre que l'ordre de $K_3(Z)$ est divisible par 48. Ceci contredit une conjecture récente de Lichtenbaum qui implique $\# K_3(Z) = 24$.

1. *La « suite exacte des* 12 ». — Nous conserverons pour l'essentiel les notations de ([6]). Pour des raisons de symétrie, nous écrirons cependant ${}_\varepsilon W'^n(A)$ le groupe ${}_\varepsilon L'^n(A)$ de ([6]). L'involution de A induit un « foncteur de dualité » sur la catégorie des A-modules projectifs de type fini, foncteur qui induit une involution $x \mapsto \bar{x}$ sur les groupes $K^n(A)$. Nous noterons

$$k^n(A) = \{x = \bar{x}\}/\{x = y + \bar{y}\} \quad \text{et} \quad k'^n(A) = \{x = -\bar{x}\}/\{x = y - \bar{y}\}.$$

On a donc

$$k^n(A) = \hat{H}^{\text{pair}}(Z/2;\, K^n(A)) \quad \text{et} \quad k'^n(A) = \hat{H}^{\text{impair}}(Z/2;\, K^n(A)).$$

THÉORÈME 1. — *Soit* A *un anneau hermitien* K-*régulier tel que* 2 *soit inversible dans* A. *On a alors une suite exacte à* 12 *termes* :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
k^n(A) & \to & {}_\varepsilon W^{n-1}(A) & \to & {}_{-\varepsilon}W'^{n+1}(A) & \to & k'^n(A) & \to & {}_\varepsilon W'^n(A) & \to & {}_\varepsilon W^n(A) \\
\uparrow & & & & & & & & & & \downarrow \\
{}_{-\varepsilon}W^n(A) & \leftarrow & {}_{-\varepsilon}W'^n(A) & \leftarrow & k'^n(A) & \leftarrow & {}_\varepsilon W'^{n+1}(A) & \leftarrow & {}_{-\varepsilon}W^{n-1}(A) & \leftarrow & k^n(A)
\end{array}$$

En fait, ce théorème est une conséquence formelle de l'isomorphisme ${}_\varepsilon V^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$ démontré dans ([6]) et des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
{}_\varepsilon L^{n-1}(A) & \to & K^{n-1}(A) & \to & {}_\varepsilon V^n(A) & \to & {}_\varepsilon L^n(A) & \to & K^n(A) \\
 & & & & \wr\wr & & & & \\
K^{n-2}(A) & \to & {}_{-\varepsilon}L^{n-2}(A) & \to & {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A) & \to & K^{n-1}(A) & \to & {}_{-\varepsilon}L^{n-1}(A)
\end{array}$$

où l'homomorphisme zigzag $K^{n-1}(A) \to {}_\varepsilon V^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A) \to K^{n-1}(A)$ est $x \mapsto x - \bar{x}$, noter que

$${}_\varepsilon W'^n(A) = \mathrm{Ker}[{}_\varepsilon L^n(A) \to K^n(A)] \quad \text{et} \quad {}_{-\varepsilon}W^{n-2}(A) = \mathrm{Coker}[K^{n-2}(A) \to {}_{-\varepsilon}L^{n-2}(A)];$$

2. CALCUL DE $K^{-3}(Z')$ ET DE ${}_1W^{-3}(Z')$.

THÉORÈME 2. — *Désignons par* Z' *l'anneau* $A = Z[1/2]$. *Si* $\varepsilon = 1$ *on a alors* ${}_\varepsilon W^{-3}(A) = 0$.

Démonstration. — Puisque Z' est un anneau euclidien, on a

$${}_{-1}W'^{-1}(Z') = \mathrm{Sp}(Z')/[\mathrm{Sp}(Z'),\, \mathrm{Sp}(Z')] = 0.$$

D'autre part, l'homomorphisme ${}_{-1}W^{-2}(Z') \to k^{-2}(Z')$ est induit par l'homomorphisme « oubli » ${}_{-1}L^{-2}(Z') \to K^{-2}(Z')$. D'après la suite exacte d'une localisation et l'isomorphisme entre les théories $K^n(A)$ et $K^{-n}(A)$ [résultats démontrés par Quillen ([7])], on a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} K^{-2}(Z/2) & \to & K^{-2}(Z) & \to & K^{-2}(Z') & \to & K^{-1}(Z/2) \\ \| & & \| & & & & \| \\ 0 & & Z/2 & & & & 0 \end{array}$$

Donc $K^{-2}(Z) \approx K^{-2}(Z') \approx Z/2$, de générateur le lacet $(h(x))^4$, où

$$h(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $Sp_2(Z') = SL_2(Z')$, le générateur est bien dans l'image de l'homomorphisme ${}_{-1}L^{-2}(Z') \to K^{-2}(Z')$. D'après la suite exacte des 12,

$$\ldots \to {}_{-\varepsilon}W^n(A) \to k^n(A) \to {}_{\varepsilon}W^{n-1}(A) \to {}_{-\varepsilon}W'^{n+1}(A) \to \ldots,$$

avec $A = Z'$, $n = 2$ et $\varepsilon = 1$, on a bien ${}_1W^{-3}(Z') = 0$.

Désignons par π_n^s le n-ième groupe d'homotopie stable des sphères. D'après un théorème de Barratt, Priddy, Quillen, Segal ([8]), on a $\pi_n^s = \pi_n(B^+ \Sigma_\infty)$ où Σ_∞ désigne le groupe symétrique infini [pour la construction « + » *voir* ([9]) par exemple]. Ceci permet de définir un homomorphisme $\pi_n^s \to K_n(Z)$ en plongeant le groupe symétrique infini dans GL (Z). D'après Quillen, l'homomorphisme $Z/24 \approx \pi_3^s \to K_3(Z) \approx K^{-3}(Z)$ est injectif. Nous montrerons dans le paragraphe suivant que cet homomorphisme n'est pas surjectif au niveau de la composante 2-primaire. En fait, écrivons de nouveau la suite d'une localisation au niveau K^{-3} :

$$\begin{array}{ccccccc} K^{-3}(Z/2) & \to & K^{-3}(Z) & \to & K^{-3}(Z') & \to & K^{-2}(Z/2) \\ \| & & & & & & \| \\ Z/3 & & & & & & 0 \end{array}$$

D'après cette suite, les composantes 2-primaires de $K^{-3}(Z)$ et de $K^{-3}(Z')$ sont isomorphes et, pour démontrer l'assertion ci-dessus, on peut remplacer Z par Z', ce qui va permettre d'appliquer les techniques de K-théorie hermitienne.

3. Calcul de l'ordre de $K_3(Z) \approx K^{-3}(Z)$. — D'après l'interprétation simpliciale des groupes K^{-n} (valable aussi pour les groupes ${}_{\varepsilon}L^{-n}$) donnée par Gersten ([4]) et Anderson ([1]), l'homomorphisme $\pi_3^s \xrightarrow{\alpha} K^{-3}(Z')$ se factorise par ${}_1L^{-3}(Z')$. En effet, si Σ_r désigne le groupe symétrique à r variables, l'homomorphisme de groupes simpliciaux (triviaux) $\Sigma_r \to GL_{2r}(Z')$ défini par

$$f(\sigma) = \gamma \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^{-1} \qquad \text{avec} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(matrices en blocs $r \times r$) se factorise par le groupe ${}_1O_{r,r}(Z')$ [pour la définition précise de ${}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$, *voir* ([5]), ([6])]. L'homomorphisme $\Sigma_\infty \to GL(Z')$ obtenu par passage à la limite inductive induit une application $B^+ \Sigma_\infty \to B_{GL(Z')}$ homotope à la précédente en raison d'un argument d'automorphisme intérieur déjà utilisé dans ([9]) par exemple [noter que $\pi_n(B^+ \Sigma_\infty) \approx \varinjlim \pi_n(B^+ \Sigma_r)$, $r \geqq 5$]. On obtient ainsi le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi_3^S \arrow[rr, "\alpha'"] \arrow[dr, "\beta'"'] & & K^{-3}(Z') \\
& {}_1L^{-3}(Z') \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Théorème 3. — *L'ordre du groupe fini* $K_3(Z)$ *est divisible par* 48. *De manière plus précise, la composante 2-primaire de* $K_3(Z)$ *contient comme facteur direct un groupe de la forme* $Z/8 \oplus Z/2^r$ *avec* $r \geqq 3$ *si* $\operatorname{Im}\alpha'$ *est facteur direct dans* $K_3(Z')$, *et contient simplement un facteur direct de la forme* $Z/2^r$ *avec* $r \geqq 4$ *sinon* [si la première éventualité se produisait, ce qui n'est pas encore prouvé pour l'instant, l'ordre du groupe $K_3(Z)$ serait donc même divisible par 192].

Démonstration .— Soit $H : K^{-3}(Z') \to {}_1L^{-3}(Z')$ l'homomorphisme induit par le foncteur hyperbolique. Alors Coker $H = {}_1W^{-3}(Z') = 0$ d'après le théorème précédent. Puisque $(FH)(x) = x + \bar{x}$, F ne peut donc être surjectif au niveau de la composante 2-primaire car $K_3(Z)$ est un groupe fini d'après des théorèmes récents de Quillen ([7]) et Borel ([3]). Donc l'ordre de la composante 2-primaire de $K^{-3}(Z')$ [donc de $K^{-3}(Z)$] est divisible par 16. Par conséquent, l'ordre de $K_3(Z)$ est divisible par 48 d'après ce qui précède. Supposons maintenant que $\operatorname{Im}\alpha$ soit facteur direct dans $K_3(Z)$. Soit x un élément de $K^{-3}(Z')$ tel que $H(x) = \beta'(u)$, u étant le générateur de $Z/8 \subset Z/24 \approx \pi_3^s$. En écrivant $K^{-3}(Z') = \operatorname{Im}\alpha' \oplus G$ (au niveau de la composante 2-primaire), on a $x = x' + x''$ où $x' \in \operatorname{Im}\alpha'$ et $x'' \in G$. Mais $\alpha'(u) = x + \bar{x} = 2x' + x'' + \bar{x}''$ est d'ordre 8. Donc

$$4(x'' + \bar{x}'') = \alpha'(4u) - 8x' \neq 0 \quad \text{et} \quad 4x'' \neq 0.$$

Donc x'' est aussi d'ordre 8, ce qui montre bien que $K^{-3}(Z')$ contient comme facteur direct un groupe de la forme $Z/8 \oplus Z/2^r$ avec $r \geqq 3$ (ce dernier argument m'a été suggéré par Lichtenbaum).

(*) Séance du 8 octobre 1973.

([1]) D. W. Anderson, *Simplicial K-theory and generalized homology theories* (non publié).

([2]) H. Bass, *Finite generation of the group* K_i *of rings of algebraic integers* (d'après D. Quillen). A paraître aux *Actes* de la Conférence de Seattle (septembre 1972).

([3]) A. Borel, *Comptes rendus*, 274, série A, 1972, p. 1000.

([4]) S. Gersten, *Higher K-theory of rings*. A paraître aux *Actes* de la Conférence de Seattle (septembre 1972).

([5]) M. Karoubi, *Périodicité de la K-théorie hermitienne*. A paraître aux *Actes* de la Conférence de Seattle (septembre 1972).

([6]) M. Karoubi, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 599, 802, 840 et 1030.

([7]) D. Quillen, *Higher algebraic K-theory*. A paraître aux *Actes* de la Conférence de Seattle (septembre 1972).

([8]) G. Segal, *Categories and cohomology theories* (notes ronéotypées).

([9]) J. Wagoner, *Delooping classifying spaces in algebraic K-theory* (*Topology*, 1972).

Université Paris VII,
U. E. R. de Mathématiques,
Tour 45-55, 5e étage
2, *place Jussieu,*
75005 *Paris.*