GROUPES TOPOLOGIQUES. — *Perturbations compactes des représentations d'un groupe dans un espace de Hilbert*. Note (*) de MM. **Pierre de la Harpe** et **Max Karoubi**, présentée par M. Henri Cartan.

Soient G un groupe topologique, U (H) le groupe unitaire d'un espace de Hilbert complexe de dimension infinie et $T : G \to U(H)$ une application continue telle que $T(gh) - T(g)T(h)$ soit un opérateur compact sur H pour tout couple $(g, h) \in G \times G$. Nous cherchons l'obstruction à trouver un homomorphisme continu $S : G \to U(H)$ tel que $S(g) - T(g)$ soit compact pour tout élément g de G. Nous montrons par exemple qu'un tel homomorphisme S existe toujours si G est un groupe compact.

1. Énoncé du problème. — Soient H un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, L (H) l'algèbre stellaire des opérateurs linéaires bornés sur H et C (H) l'idéal bilatère fermé constitué par les opérateurs compacts. *L'algèbre de Calkin* de H, notée Cal (H), est l'algèbre stellaire quotient de L (H) par C (H). Nous notons U (H) le groupe unitaire de H et $\mathrm{Cal}(H)_u$ le groupe des éléments unitaires de Cal (H), tous deux munis de leur topologie normique. La projection canoniqe π induit un homomorphisme continu $U(H) \to \mathrm{Cal}(H)^u$ dont l'image est la composante neutre $\mathrm{Cal}(H)^u_0$ du but [*cf.* par exemple (3) chap. VII].

Si G est un groupe topologique et si $\sigma : G \to \mathrm{Cal}(H)^u_0$ est un homomorphisme continu, nous dirons que σ est *relevable* s'il existe un homomorphisme continu $S : G \to U(H)$ tel que $\pi S = \sigma$ (S est appelée un relèvement de σ). Nous dirons que G est relevable si tous les homomorphismes continus σ de G dans $\mathrm{Cal}(H)^u_0$ le sont. Le problème qui nous intéresse est de trouver l'obstruction à « relever » un homomorphisme σ donné. Une première obstruction de nature homotopique consiste à trouver une *application* continue $T : G \to U(H)$ telle que $\pi T = \sigma$; une telle obstruction disparaît si G est discret; il en est de même si G est un groupe de Lie (on le montre en utilisant la K-théorie). Une deuxième obstruction, qui nous intéresse plus particulièrement dans cette rédaction, consiste à trouver une « déformation » de T en un *homomorphisme* continu S qui se projette encore sur σ.

2. Exemples. — Le groupe **Z** est relevable car $\pi : U(H) \to \mathrm{Cal}(H)^u_0$ est surjectif. Un cas particulier d'un résultat dû à Olsen (2) exprime que les groupes cycliques finis sont relevables. Par propriété universelle, un produit libre tel que $PSL_2(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2 \bigstar \mathbf{Z}/3$ l'est donc aussi. Si $G = \mathbf{R}$, tout homomorphisme continu $\sigma : \mathbf{R} \to \mathrm{Cal}(H)^u_0$ peut s'écrire $\sigma(t) = \exp(ita)$, où a est un élément auto-adjoint de Cal (H). Si A est un élément auto-adjoint de L (H) qui se projette sur a, l'homomorphisme S défini par $S(t) = \exp(itA)$ est un relèvement de σ. Par conséquent **R** est relevable.

A tout homomorphisme continu $\sigma : \mathbf{R}^2 \to \mathrm{Cal}(H)^u_0$ on peut associer

$$x = a' + ia'' \in \mathrm{Cal}(H),$$

où a' et a'' sont les deux éléments auto-adjoints définis par

$$\sigma(t', t'') = \exp(it' a')\exp(it'' a'').$$

Puisque a' et a'' commutent l'élément x est normal. L'homomorphisme σ se relève si et seulement s'il existe X normal dans L (H) tel que $\pi(X) = x$. Soit alors $\mathcal{O}(\sigma)$ la fonction localement constante, définie sur le complémentaire du spectre de x dans **C** et à valeurs dans **Z**, donnée en un point z du domaine par l'indice de Fredholm de $x-z$. D'après Brown, Douglas et Fillmore [1], σ se relève si et seulement si $\mathcal{O}(\sigma)$ est la fonction nulle.

3. Cas des groupes compacts. — Soit G un groupe compact et soit $T : G \to U(H)$ une *application* continue telle que $\pi T = \sigma$. Nous allons esquisser la preuve que σ est relevable.

Soit $L^2_H(G)$ l'espace de Hilbert des classes d'applications de « carré » intégrable de G dans H (pour la mesure de Haar normalisée sur G). Le groupe G y opère de manière non continue en général par la représentation régulière gauche $g \mapsto L_g$ définie par $(L_g \varphi)(h) = \varphi(g^{-1} h)$ si $(g, h) \in G \times G$ et $\varphi \in L^2_H(G)$. Définissons des applications linéaires continues $i_T : H \to L^2_T(G)$ et $m_T : L^2_H(G) \to H$ par les formules

$$i_T(v)(g) = T(g^{-1})v \qquad \text{et} \qquad m_T(\varphi) = \int_G T(g^{-1})^{-1}\varphi(g)\,dg.$$

L'opérateur $P_T = i_T m_T$ est un projecteur auto-adjoint de $L^2_H(G)$ sur l'image H_P de i_T car $m_T i_T = \mathrm{Id}_H$. De plus P_T est équivariant modulo les compacts pour l'action de G définie ci-dessus. L'opérateur auto-adjoint équivariant

$$J_T = \int_G L_g(1-2P_T)L_g^{-1}\,dg$$

est alors une perturbation compacte de $1-2P_T$. Son indice de Fredholm étant nul, il existe un opérateur auto-adjoint équivariant inversible J'_T qui est encore une perturbation compacte de $1-2P_T$ tel que $(J'_T)^2-1$ soit compact. Le calcul fonctionnel permet alors de construire un opérateur auto-adjoint équivariant J''_T tel que $(J''_T)^2 = 1$ et tel que $J''_T-(1-2P_T)$ soit encore compact. Par suite, $Q_T = (1-J''_T)/2$ est un projecteur orthogonal de $L^2_H(G)$ sur un espace H_Q invariant par l'action de G tel que $P_T - Q_T$ soit compact.

L'opérateur $1-P_T-Q_T+2Q_TP_T$ induit $A_T : H_P \to H_Q$ et l'opérateur $1-Q_T-P_T+2P_TQ_T$ induit $B_T : H_Q \to H_P$. Soit Φ une isométrie quelconque de H_P sur H_Q, soit j_T l'inverse de l'isomorphisme $H \to H_P$ et soit $L^\Phi : G \to U(H)$ l'homomorphisme défini par $L^\Phi(g) = j_T \Phi^{-1} L_g \Phi i_T$. Si $\tilde{T} : G \to U(H)$ est l'application continue définie par

$$\tilde{T}(g) = j_T B_T L_g A_T i_T = (j_T B_T \Phi i_T) L^\Phi(g)(j_T \Phi^{-1} A_T i_T),$$

on vérifie que $\tilde{T}(g) - T(g)$ est compact pour tout $g \in G$ (ceci résulte de la compacité de $Q_T - P_T$). Si $x = \pi(j_T \Phi^{-1} A_T i_T)$, $\pi(T(g)) = \sigma(g)$ s'écrit donc $x^{-1}\pi(L^\Phi(g))x$ pour tout $g \in G$. En d'autres termes, il existe un conjugué de σ qui se relève en l'homomorphisme L^Φ.

La dernière étape consiste à montrer qu'un homomorphisme se relève si et seulement si un de ses conjugués se relève. La structure des homomorphismes continus d'un groupe compact dans U (H) étant particulièrement simple, il s'agit d'une manipulation de routine que nous n'expliciterons pas ici.

4. PARAMÉTRISATION DES RELÈVEMENTS RÉSULTATS RELATIFS — Si G est un groupe compact et si S′, S″ sont deux relèvements d'un même homomorphisme $\sigma : G \to \mathrm{Cal}(H)_0^u$, l'opérateur de Fredholm $E = m_{S''} . i_{S'} = \int_G S''(g)\, S'(g^{-1})\, dg$ est un opérateur d'indice 0. Par suite $\mathrm{Ker}(E) - \mathrm{Im}(E)^{\perp} = \mathrm{Ind}(S', S'')$ est un élément de $\tilde{R}(G)$ où $\tilde{R}(G)$ désigne l'idéal d'augmentation de l'anneau des représentations de G. On démontre alors le résultat suivant qui mesure le « degré d'unicité » des relèvements de σ : les représentations S′ et S″ sont conjuguées par un opérateur de la forme (1 + compact) si et seulement si $\mathrm{Ind}(S', S'') = 0$ [comparer avec la remarque 4.9 de ([1])].

Soit F un sous-groupe fermé d'un groupe compact G et soit

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{S} & U(H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Cal}(H)_0^u \end{array}$$

un carré cartésien d'homomorphismes continus; on suppose qu'il existe une application continue relevant τ; on demande s'il existe un homomorphisme continu $T : G \to U(H)$ qu'on puisse introduire dans le carré ci-dessus pour obtenir un diagramme commutatif. Lorsque R décrit l'ensemble de tous les relèvements de τ, les indices $\mathrm{Ind}(R/_T, S)$ définissent un élément noté $\mathrm{Ind}(\tau, S)$ du conoyau de l'homomorphisme de restriction $R(G) \to R(F)$ induit par $F \to G$. Le problème précédent admet alors une solution si et seulement si $\mathrm{Ind}(\tau, S) = 0$. Par exemple, si G est abélien, l'homomorphisme $R(G) \to R(F)$ est surjectif et il existe toujours un tel T.

De même, si $G = G' \bigstar_A G''$ est un produit amalgamé (avec G′ et G″ finis), on associe à tout homomorphisme continu $\sigma : G \to \mathrm{Cal}(H)_0^u$ un « indice dans Coker $(R(G') \oplus R(G'') \to R(G))$. L'homomorphisme σ se relève si et seulement si cet indice est nul. Par exemple, le groupe $SL_2(\mathbf{Z})$ est relevable puisqu'il est isomorphe à $\mathbf{Z}/4 \bigstar_{\mathbf{Z}/2} \mathbf{Z}/6$.

Enfin considérons les groupes de la forme $G \times \mathbf{Z}$ avec G compact. Soit τ un homomorphisme continu de $G \times \mathbf{Z}$ dans $\mathrm{Cal}(H)_0^u$. Soient S un relèvement quelconque de la restriction de τ à G et E un opérateur S-équivariant sur H tel que $\pi(E)$ soit l'image par τ d'un générateur de Z. Alors $\mathrm{Ker}(E) - \mathrm{Im}(E)^{\perp}$ est un élément de R (G) qui ne dépend que de τ. On peut alors montrer que τ se relève si et seulement si cet élément est nul.

5. REMARQUES. — 1° L'essentiel de ce qui précède se transcrit au problème analogue de relever un homomorphisme de G dans la composante neutre $\mathrm{Cal}(H)_0^{\mathrm{inv}}$ du groupe des éléments inversibles de Cal (H) en un homomorphisme de G dans GL (H) [si G est compact, tout homomorphisme continu de G dans $\mathrm{Cal}(H)_0^{\mathrm{inv}}$ est conjugué d'un homomorphisme dans $\mathrm{Cal}(H)_0^u$].

2° On peut aussi remplacer H par un espace de Hilbert *réel* dans l'essentiel de nos considérations (à l'exception des exemples).

3° Certaines de nos méthodes permettent aussi d'étudier les perturbations d'homomorphismes continus de G dans U (H) par des opérateurs petits en norme [i. e. le problème de cette Note avec « $T(gh) - T(g)\, T(h)$ compact » remplacé par « $\| T(gh) - T(g)\, T(h) \|$ petit »]. Nous réservons les détails à une rédaction plus détaillée.

(*) Séance du 11 août 1975.

(1) L. G. Brown, R. G. Douglas et P. A. Fillmore, *Unitary Equivalence Modulo the Compact Operators and Extensions of* C*-*Algebras*, dans *Lecture Notes in Math.*, n° 345, Springer, 1973.

(2) C. L. Olsen, *Amer. J. Math.*, 93, 1971, p. 686-698.

(3) R. S. Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*, Princeton University Press, 1965.

P. H. :

Institut de Mathématiques,
Université de Lausanne,
Dorigny,
1015 *Lausanne,*
Suisse;

M. K. :

Université Paris VII,
U. E. R. de Mathématiques,
2, *place Jussieu,*
75221 *Paris Cedex* 05.