(31)

Canadian Mathematical Society
Conference Proceedings
Volume 2, Part 1 (1982)

CONNEXIONS, COURBURES ET CLASSES CARACTERISTIQUES EN K-THEORIE ALGEBRIQUE

par

Max KAROUBI

Le but de cet article est de construire des homomorphismes $K_*(A) \to H_*(A)$ pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre commutative A, $H_*(A)$ désignant une théorie de l'homologie (type De Rham) de l'algèbre A ; cf. § 2. Il ne contient pas de démonstrations. Celles-ci paraîtront dans un autre article qui généralisera en même temps les concepts introduits ici, en particulier dans le cas des anneaux A quelconques. Cette rédaction n'est donc qu'un point de départ.

1.- DESCRIPTION DES CLASSES DE CHERN CLASSIQUES (théorie de Chern-Weil)

Soit E un fibré vectoriel complexe sur une variété différentiable X associé à des fonctions de transition différentiables

$$g_{ji} : U_i \cap U_j \to GL_n(\mathbb{C})$$

(U_k) étant un recouvrement ouvert trivialisant de E. On désigne par dg_{ji} la matrice de 1-formes dont les coefficients s'obtiennent en différentiant les coefficients g_{ji}. Si (α_k) désigne une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert (U_k), on désigne par Γ_i la matrice de 1-formes sur U_i définie par la somme

$$\Gamma_i = \Sigma\, \alpha_k\, g_{ki}^{-1} \cdot dg_{ki}$$

Cette matrice représente l'expression locale d'une connexion compte tenu de l'identité

$$\Gamma_i = g_{ji}^{-1} \cdot dg_{ji} + g_{ji}^{-1} \cdot \Gamma_j \cdot g_{ji}$$

sur $U_i \cap U_j$. L'expression locale de la courbure est donnée de même par la matrice de 2-formes

$$R_i = d\,\Gamma_i + (\Gamma_i)^2$$

L'identité précédente permet de montrer que $R_i = g_{ji}^{-1} \cdot R_j \cdot g_{ji}$ sur $U_i \cap U_j$.

1980 Mathematics Subject Classification. 57R20, 55N15

Désignons en général par $\Omega^{\mathrm{pair}}(X)$ l'algèbre <u>commutative</u> formée des formes différentielles de degré pair sur X. Alors $\mathrm{Dét}(1+R_i) = \mathrm{Dét}(1+R_j)$ dans $\Omega^{\mathrm{pair}}(U_i \cap U_j)$. Donc le développement de $\mathrm{Dét}(1+R_i) = 1 + c_1 + \ldots + c_n$ pour tout i définit des formes différentielles c_α de degré 2α qui sont fermées et dont les classes de cohomologie sont les classes de Chern (complexes) de E [6].

2.- <u>HOMOLOGIE DE DE RHAM D'UN ANNEAU COMMUTATIF A</u>

Pour tout anneau commutatif A on peut introduire le module $\Omega_*^{\mathbb{Z}}A$ formé des formes différentielles formelles. Ainsi $\Omega_1^{\mathbb{Z}}A$ est le quotient du A-module libre engendré par les symboles df, $f \in A$, par le sous-module engendré par les relations $d(fg) = fdg + gdf$. Le module $\Omega_n^{\mathbb{Z}}A$ est la $n^{\text{ième}}$ puissance extérieure de $\Omega_1^{\mathbb{Z}}A$ en tant que A-module. La différentielle extérieure $d : \Omega_n^{\mathbb{Z}}A \to \Omega_{n+1}^{\mathbb{Z}}A$ définit un complexe (avec $\Omega_0^{\mathbb{Z}}A = A$)

$$0 \to \Omega_0^{\mathbb{Z}}A \to \Omega_1^{\mathbb{Z}}A \to \ldots \to \Omega_n^{\mathbb{Z}}A \to \ldots$$

dont l'homologie est désignée par $H_*(A)$.

Plus généralement, si Ω_*A désigne une algèbre différentielle graduée strictement commutative avec $\Omega_0A = A$, on désigne par $H_*^{\Omega}(A)$ l'homologie du complexe associé. L'homomorphisme évident $\Omega_*^{\mathbb{Z}}A \to \Omega_*A$ induit un homomorphisme $H_*(A) \to H_*^{\Omega}(A)$.

Ainsi, si A est l'algèbre des fonctions C^∞ sur une variété X, il est en général préférable de considérer l'algèbre des formes différentielles classiques plutôt que l'algèbre "abstraite" $\Omega_*^{\mathbb{Z}}A$. Dans ce cas, on a bien sûr $H_n^{\Omega}(A) \approx H^n(X\,;\mathbb{C})$.

3.- <u>A-FIBRES PLATS ET K-THEORIE ALGEBRIQUE</u>

Un "A-fibré plat" sur un CW-complexe Y est un revêtement $\pi : E \to Y$, les fibres étant munies d'une structure de A-module projectif de type fini et tel que pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage U de y, un module projectif de type fini P et un isomorphisme de revêtements $\pi^{-1}(U) \to U \times P$, A-linéaire sur chaque fibre. Si $P = A^n$, un A-fibré plat de fibre A^n, est canoniquement associé à un fibré principal de groupe (discret) $GL_n(A)$.

Si X est un CW-complexe fini, on définit un <u>"A-fibré plat virtuel"</u> comme la donnée

1) d'une fibration de Serre $f : Y \to X$ qui soit une application acyclique.

2) d'un A-fibré plat E sur Y.

On notera un tel fibré virtuel $E \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{f} X$.

Deux fibrés virtuels $E \to Y \to X$ et $E' \to Y' \to X$ sont dits équivalents s'il existe un fibré virtuel $F \to Z \to X$ et des applications $Y \xrightarrow{\sigma} Z$ et $Y' \xrightarrow{\sigma'} Z$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"'] & X \\ Z \arrow[ur] & Y' \arrow[u] \arrow[l, "\sigma'"] \end{tikzcd}$$

commute et tels que E et E' soient isomorphes à $\sigma^* F$ et $\sigma'^* F$ respectivement.

Les classes d'équivalence de A-fibrés virtuels forment un monoïde abélien de manière évidente (par produit fibré au-dessus de X). On note $K_A(X)$ son groupe de Grothendieck.

THEOREME : *Pour tout anneau A et pour tout CW-complexe fini X, on a un isomorphisme naturel de groupes*

$$K_A(X) \approx [X, K_0(A) \times BGL(A)^+]$$

En particulier $K_A(S^n) \approx K_0(A) \oplus K_n(A)$.

4.- CONNEXIONS ET COURBURES SIMPLICIALES

Soit X un ensemble simplicial quelconque et soit E un "A-fibré plat simplicial" de fibre A^r sur X : un tel fibré est déterminé par un cocycle $g_{ji}(\sigma)$, i et j $\in \{0,\dots,n\}$ pour chaque cellule σ de dimension n de X où les $g_{ji}(\sigma)$ sont des éléments de $GL_r(A)$ vérifiant les relations usuelles. Si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative et si $\Omega_* A$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre différentielle graduée avec $\Omega_0 A = A$ (cf. § 2), une "connexion" sur E est donnée pour chaque cellule σ de dimension n et pour chaque entier i $\in \{0,\dots,n\}$ par une matrice d'ordre r $\Gamma_i(\sigma)$ à coefficients dans $\Omega^0(\sigma) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \Omega_1(A)$ où $\Omega^*(\sigma)$ désigne en général $\Omega_*^{\mathbb{Z}}(\Lambda_n) \otimes \mathbb{Q}$, Λ_n étant l'algèbre $\mathbb{Q}[x_0,\dots,x_n]/\Sigma x_i - 1$. En outre si τ est une face de σ associée à une application croissante $\alpha : \Delta_m \to \Delta_n$, on a $\Gamma_{\alpha(j)}(\sigma)|_\tau = \Gamma_j(\sigma)$. Enfin, si (ji) est une "arête" de σ, on a la formule

$$\Gamma_i = g_{ji}^{-1} \cdot dg_{ji} + g_{ji}^{-1} \cdot \Gamma_j \cdot g_{ji}$$

Le seul exemple qui nous intéressera dans ce paragraphe est celui de la "connexion canonique" définie par

$$\Gamma_i = \sum_{k=0}^{n} x_k g_{ki}^{-1} \cdot dg_{ki}$$

En suivant le schéma du § 1, on peut associer à une connexion simpliciale sa "courbure" : elle est définie sur chaque cellule et chaque indice i par la formule $R_i = d\Gamma_i + (\Gamma_i)^2$ où d représente la différentielle du bicomplexe $\Omega^*(\sigma) \otimes \Omega_*(A)$. En raison de la formule $R_i = g_{ji}^{-1} \cdot R_j \cdot g_{ji}$, il en résulte que

$$c(E) = \mathrm{Dét}(1 + R_i)$$

définit un élément bien déterminé, de degré total pair dans le bicomplexe $\Omega^*(X ; \Omega_*(A))$ (complexe de De Rham-Sullivan de X à coefficients dans $\Omega_*(A)$).

Soit $\mathcal{C}_A^*(X)$ le sous-complexe du complexe simple associé à $\Omega^*(X ; \Omega_*(A))$ défini par

$$\mathcal{C}_A^{2n}(X) = \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p<q}} \Omega^p(X\,;\Omega_q(A)) \oplus Z^n(X\,;\Omega_n(A))$$

$$\mathcal{C}_A^{2n+1}(X) = \bigoplus_{\substack{p+q=2n+1 \\ p<q}} \Omega^p(X\,;\Omega_q(A))$$

Un examen plus attentif montre que c(E) définit en fait un cycle de degré pair de ce complexe. Son homologie, notée $\mathcal{H}_A^*(X)$, se calcule aisément par une variante du théorème de Kunneth :

$$\mathcal{H}_A^{2n}(X) \approx \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p<q}} H^p(X\,;H_q(A)) \oplus H^n(X\,;Z_n(A))$$

$$\mathcal{H}_A^{2n+1}(X) \approx \bigoplus_{\substack{p+q=2n+1 \\ p<q}} H^p(X\,;H_q(A))$$

Dans ces formules, $Z_n(A)$ désigne bien entendu l'ensemble des cycles de degré n du complexe $\Omega_*(A)$ et $H_n(A) = Z_n(A)/B_n(A)$ son homologie dans le même degré.

Ainsi, en copiant la méthode du § 1, on peut associer à E des classes de Chern

$$c_{p,q}(E) \in H^p(X\,;H_q(A)), \quad p+q = 2n, \quad p<q, \quad n \leq r$$

$$c_{n,n}(E) \in H^n(X\,;Z_n(A)), \quad n \leq r$$

Ces classes vérifient les mêmes propriétés formelles que les classes de Chern classiques. En particulier, on a une formule du type $c(E \oplus E') = c(E) \,.\, c(E')$ en désignant par $c = \Sigma\, c_{p,q}$ la "classe totale"de Chern.

De même, on peut définir des "caractères de Chern" $Ch_n(E) \in \mathcal{H}_A^{2n}(X)$ où $Ch_n(E) = \frac{1}{n!}\,Q_n(c_1,\dots,c_n)$, $c_i = c_i(E)$ désignant $\sum_{\substack{p+q=2i \\ p\leq q}} c_{p,q}(E)$ et Q_n désignant le polynôme de Newton. Si on pose en général $Ch(E) = \Sigma\, Ch_n(E)$, on a les formules $Ch(E \oplus E') = Ch(E) + Ch(E')$ et $Ch(E \otimes E') = Ch(E) \,.\, Ch(E')$.

Si on choisit pour X l'ensemble simplicial $BGL_r(A)$ classifiant du groupe discret $Gl_r(A)$ et pour E le fibré universel , on en déduit un homomorphisme d'anneaux

$$Ch \;:\; K_A(Y) \to \mathcal{H}_A^{pair}(Y)$$

pour tout CW-complexe fini Y, $\mathcal{H}_A^*(Y)$ étant défini par les mêmes formules que ci-dessus (remplacer X par Y). En particulier, si Y est une sphère, on en déduit des homomorphismes

$$Ch_{n,n} \;:\; K_n(A) \to Z_n(A)$$

$$Ch_{p,q} \;:\; K_p(A) \to H_q(A)$$

pour $p < q$, $p+q = 2n$. Ces homomorphismes vérifient des formules de multiplication du type $Ch(x\,.\,y) = Ch(x)\,.\,Ch(y)$.

5.- K-THEORIE RELATIVE ET CLASSES CARACTERISTIQUES RELATIVES

Supposons maintenant que A soit une algèbre de Banach. On peut lui associer une K-théorie topologique $K_A^{top}(X) \approx [X, K_0(A) \times BGL(A)^{top}]$ où $BGL(A)^{top}$ désigne l'espace classifiant du groupe topologique (non discret) $GL(A)^{top} = \varinjlim_r GL_r(A)^{top}$. En particulier, $K_A^{top}(S^n) = K_0(A) \oplus K_n^{top}(A)$ avec $K_n^{top}(A) = \pi_n(BGL(A)^{top}) \approx \pi_{n-1}(GL(A)^{top})$ pour $n \geq 1$. Les groupes $K_n^{top}(A)$ sont périodiques [5][7]. Soit $\mathcal{F}_A$ la fibre homotopique de l'application

$$BGL(A)^+ \to BGL(A)^{top}$$

La "K-théorie relative" de X, notée $K_A^{rel}(X)$, est par définition $[X, \mathcal{F}_A]$. En particulier, si X est une sphère, on pose $K_A^{rel}(S^n) = K_n^{rel}(A)$ et on a alors la suite exacte

$$\dots \to K_{n+1}(A) \to K_{n+1}^{top}(A) \to K_n^{rel}(A) \to K_n(A) \to K_n^{top}(A) \to \dots$$

Si X est un CW-complexe fini, cette théorie relative peut se décrire suivant un schéma éprouvé en considérant des triplets (E,F,β) où E et F sont deux fibrés plats virtuels de fibre A^n sur X, soit $E \to Y \to X$ et $F \to Y \to X$ et où $\beta : E \to F$ est un isomorphisme <u>topologique</u>.

Supposons donnée, d'autre part, une algèbre différentielle graduée $\Omega_*(A)$ avec $\Omega_0(A) = A$, telle que le complexe

$$0 \to \Omega_0(A) \to \Omega_1(A) \to \dots$$

soit un complexe d'espaces de Banach et telle que les différents produits $\Omega_i(A) \times \Omega_j(A) \to \Omega_{i+j}(A)$ soient bilinéaires continus. Pour toute variété différentiable Y, on peut alors considérer le bicomplexe $\Omega^*(Y ; \Omega_*(A))$ où $\Omega^p(Y ; \Omega_q(A))$ désigne maintenant l'ensemble des formes différentielles de degré p sur Y à valeurs dans l'espace de Banach $\Omega_q(A)$. Si $\Omega_*(A)$ est un complexe <u>direct</u> d'espaces de Banach, on a $H_n(\Omega^*(Y ; \Omega_*(A)) \approx \bigoplus_{p+q=n} H^p(Y ; H_q(A))$ où $H_*(A)$ désigne l'homologie du complexe $\Omega_*(A)$. Dans le cas général, par intégration sur les simplexes singuliers, on a des homomorphismes caractéristiques

$$H_n(\Omega^*(Y ; \Omega_*(A)) \to \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(H_p(Y), H_q(A))$$

La situation simpliciale étudiée au § 4 a un analogue différentiable : si E est un A-fibré plat défini par des fonctions de transition g_{ji}, les classes de Chern $c_n(A)$ appartiennent à $H_{2n}(\mathcal{C}_A^*(Y))$ où $\mathcal{C}_A^*(Y)$ est un sous-complexe de $\Omega^*(Y ; \Omega_*(A))$ défini par les mêmes formules que dans le § 4. De nouveau, si $\Omega_*(A)$ est un complexe direct d'espaces de Banach on trouve

$$H^{2n}(\mathcal{C}_A^{\star}(Y)) = \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p<q}} H^p(Y\,;H_q(A)) \oplus H^n(Y\,;Z_n(A))$$

$$H^{2n+1}(\mathcal{C}_A^{\star}(Y) = \bigoplus_{\substack{p+q=2n+1 \\ p<q}} H^p(X\,;H_q(A))$$

Dans le cas général, l'intégration sur les simplexes singuliers donne un homomorphisme caractéristique vers les invariants cohomologiques du second membre.

Revenons maintenant à la situation relative envisagée au début de ce paragraphe et supposons pour simplifier que Y soit une variété différentiable et que $\beta\colon E \to F$ soit un isomorphisme différentiable entre les deux fibrés plats virtuels E et F. Par un procédé éprouvé en géométrie différentielle, on peut munir E de deux connexions. En effet, si (α_i) est une partition de l'unité associée à un recouvrement ouvert trivialisant de E et de F et si g_{ji} (resp. h_{ji}) désignent les fonctions de transition de E (resp. F), la matrice de la première connexion est définie localement par $\Gamma_i = \Sigma\, \alpha_k\, g_{ki}^{-1} \cdot dg_{ki}$ (cf. § 1) ; la matrice de la deuxième connexion est $\widetilde{\Delta}_i = \beta^{-1} \cdot \Delta_i \cdot \beta + \beta^{-1} \cdot d\beta$ où $\Delta_i = \Sigma\, \alpha_k\, h_{ki}^{-1} \cdot dh_{ki}$ (matrice de la connexion canonique sur F). Si $t \in [0,1]$, il s'ensuit que l'expression $t\,\Gamma_i + (1-t)\widetilde{\Delta}_i$ définit une connexion sur $\pi^{*}E$ avec $\pi : Y \times I \to Y$. La courbure R associée vérifie la propriété remarquable suivante : $\frac{1}{n!}\,\mathrm{Tr}(R^n)$ est un élément de $\Omega^{*}(Y \times I\,;\Omega_{*}(A))$ dont la restriction à $Y \times \{0,1\}$ appartient en fait à $\mathcal{C}_A^{*}(Y \times \{0,1\})$. Un argument de suspension standard montre ainsi que le triplet (E,F,β) définit des éléments

$$\mathrm{Ch}_r^{\mathrm{rel}}(E,F,\beta) \in \bigoplus_{\substack{p+q=2r-1 \\ p>q-1}} H^p(X\,;H_q(A)) \oplus H^r(X\,;\Omega_{r-1}(A)/B_{r-1}(A))\ ,$$

ce qui permet de définir des homomorphismes $\mathrm{Ch}_r^{\mathrm{rel}}$ de $K_A^{\mathrm{rel}}(X)$ vers le groupe de droite. Ces homomorphismes sont compatibles avec la structure de $K_A(X)$-module de $K_A^{\mathrm{rel}}(X)$: si $x \in K_A(X)$ et si $y \in K_A^{\mathrm{rel}}(X)$ on a une formule du type

$$\mathrm{Ch}^{\mathrm{rel}}(x \,.\, y) = \mathrm{Ch}(x) \,.\, \mathrm{Ch}^{\mathrm{rel}}(y)$$

En particulier lorsque X est une sphère de dimension n, on en déduit un homomorphisme

$$\mathrm{Ch}^{\mathrm{rel}} : K_n^{\mathrm{rel}}(A) \to \bigoplus_{[\frac{n+1}{2}]}^{n-1} H_{2r-1-n}(A) \oplus \Omega_{n-1}(A)/B_{n-1}(A)$$

compatible avec les structures multiplicatives de la K-théorie algébrique. Par exemple, la première composante de $\mathrm{Ch}^{\mathrm{rel}}$ pour $n = 2i-1$, soit

$$K_{2i-1}^{\mathrm{rel}}(A) \to H^{2i-1}(S^{2i-1}\,;H_0(A)) \approx H_0(A)$$

s'explicite aisément : à une constante rationnelle près, $\mathrm{Ch}_i(E,F,\beta)$ est la classe de cohomologie de la forme différentielle $\mathrm{Tr}(\beta^{-1}d\beta)^{2i-1}$ sur une sphère homologique convenable.

Dans le cas particulier où A est une C^*-algèbre, le choix d'une métrique sur les A-fibrés virtuels plats définit un homomorphisme canonique $K_A(X) \to K_A^{rel}(X)$, donc en particulier de $K_n(A)$ dans $K_n^{rel}(A)$. Si $A = \mathbb{C}$, l'homomorphisme composé

$$K_{2i-1}(F) \to K_{2i-1}(\mathbb{C}) \to K_{2i-1}^{rel}(\mathbb{C}) \xrightarrow{Ch^{rel}} \mathbb{C}$$

où F est un corps de nombres, détecte pour $i > 0$ le générateur de Borel de $K_{2i-1}(F)$ correspondant au plongement de F dans $\mathbb{C}$ [3].

6.- VARIANTES ET APPLICATIONS

Les homomorphismes Ch et Ch^{rel} permettent de trouver de nouveaux éléments en K-théorie algébrique. Considérons par exemple une variété algébrique affine non singulière $M = \mathrm{Spec}(A)$ sur le corps des complexes. On désigne par $\overline{A}$ l'algèbre des fonctions différentiables de classe C^k sur M ($2 \leq k < +\infty$, k fixé) et on pose

$$K_{alg}^{-n}(M) = K_n(A)$$

$$K^{-n}(M) = K_n(\overline{A})$$

$$K_{top}^{-n}(M) = K_n^{top}(\overline{A}) = [M, \Omega^n(\mathbb{Z} \times BU)]$$

On a bien sûr des homomorphismes

$$K_{alg}^{-n}(M) \to K^{-n}(M) \to K_{top}^{-n}(M)$$

Bien que $\overline{A}$ ne soit pas une algèbre de Banach, il n'est pas difficile de transposer les considérations du § 5 à ce cadre en considérant des fibrés différentiables sur $Y \times M$, plats "dans la direction Y". On peut aussi considérer des groupes $K_{rel}^{-n}(M)$ et $\widetilde{K}_{rel}^{-n}(M)$ s'insérant dans des suites exactes

$$K^{-n-1}(M) \to K_{top}^{-n-1}(M) \to K_{rel}^{-n}(M) \to K^{-n}(M) \to K_{top}^{-n}(M)$$

$$K_{alg}^{-n-1}(M) \to K_{top}^{-n-1}(M) \to \widetilde{K}_{rel}^{-n}(M) \to K_{alg}^{-n}(M) \to K_{top}^{-n}(M)$$

Dans ce contexte, il est possible de préciser un peu plus la classe de Chern "relative"

$$c_r^{rel} : K_{rel}^{-n}(M) \to H^{2r-1-n}(M\,;\mathbb{C}) \text{ ou } \Omega^{n-1}(M)/B^{n-1}(M) \quad (\text{si } r = n)$$

En effet, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_{rel}^{-n}(M) & \xrightarrow{c_r^{rel}} & H^{2r-1-n}(M\,;\mathbb{C}) \quad \text{ou } \Omega^{n-1}(M)/B^{n-1}(M) \\ \uparrow & & \uparrow \sigma \\ K_{top}^{-n-1}(M) & \xrightarrow{c_r^{top}} & H^{2r-1-n}(M\,;\mathbb{Z}) \end{array}$$

Ici c_r^{top} désigne la classe de Chern usuelle pour les fibrés sur $M \times S^{n+1}$ et σ est induit par l'homomorphisme $\lambda \longmapsto (2\pi i)^r\lambda$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. Par un argument homotopique standard, il en résulte un homomorphisme

$$\tilde{c}_r : K_{alg}^{-n}(M) \to K^{-n}(M) \to H^{2r-1-n}(M ; \mathbb{C}/(2\pi i)^r\mathbb{Z}) \qquad \text{si } r < n.$$

Si $r = n$ et si M est une variété algébrique de dimension (complexe) $n-1$, l'homomorphisme $K_{alg}^{-n}(M) \to Z^n(M)$ est réduit à 0 car les n-différentielles de A sont nulles. On peut donc aussi définir des homomorphismes $\tilde{c}_n^{rel} : \tilde{K}_{rel}^{-n}(M) \to H^{n-1}(M ; \mathbb{C})$

$$\tilde{c}_n : K_{alg}^{-n}(M) \to H^{n-1}(M ; \mathbb{C}/(2\pi i)^n\mathbb{Z}) \text{ et } \check{c}_r : K_{alg}^{-n}(M) \to H^{2r-n}(M ; (2\pi i)^r\mathbb{Z})$$

Ces classes $\check{c}_r$ et $\tilde{c}_r$ vérifient une formule de multiplicativité facile à montrer du type

$$\tilde{c}_r(x \cdot y) = - \sum_{u+v=r} \frac{(u+v-1)!}{(u-1)!(v-1)!} \check{c}_u(x) \cdot \tilde{c}_v(y)$$

Il serait intéressant de comparer ces classes $\tilde{c}_r$ avec celles définies par Bloch et Beilinson grâce à une méthode toute différente [1][2].

Voici une application (entre d'autres) des considérations précédentes. Soit T^n un sous-groupe de $K_{alg}^{-n}(M)$ tel que $\Sigma\, c_r : K_{alg}^{-n}(M) \to \oplus\ H^{2r-n}(M ; \mathbb{C})$ soit injective sur T^n. Soit u un élément de $K_{alg}^{-2p+1}(\text{Point}) = K_{2p-1}(\mathbb{C})$ détecté modulo torsion par $\tilde{c}_p$ (par exemple l'image d'un générateur de la partie libre de $K_{2p-1}(F)$ dans $K_{2p-1}(\mathbb{C})$ où F est un corps de nombres). Alors le cup-produit par u induit une injection (modulo torsion) de T^n dans $K_{alg}^{-n-2p+1}(M)$.

o

o o

REFERENCES

[1] BEILINSON A.A : Higher regulators and values of L-functions of curves. Funk Analysis. 14 N°2 pp. 116-117 (1980).

[2] BLOCH S. : The dilogarithm and extensions of Lie algebras. Springer Lecture Notes N°854, pp. 1-23 (1981).

[3] BOREL A. : Stable real cohomology of arithmetic groups. Annales Sci. Ec. Norm. Sup. (4) 7, pp. 235-272 (1974).

[4] GROTHENDIECK A. : Classes de Chern des représentations des groupes discrets dans "Dix exposés sur la cohomologie des schémas", North Holland (1968).

[5] KAROUBI M. : Algèbres de Clifford et K-théorie. Annales Sci. Ec. Norm. Sup. (4) 1, pp. 161-270 (1968).

[6] MILNOR J., STASHEFF J. : Lectures on characteristic classes. Annals of Math Studies 197, Princeton NJ. Princeton University Press (1974).

[7] WOOD R. : Banach algebras and Bott periodicity. Topology 4, pp. 371-389 (1966).

MAX KAROUBI
DEPARTEMENT DES MATHEMETIQUES
UNIVERSITE DE PARIS VII
2PLACE JUSSIEU
75221 PARIS CEDEX 05