33

TOPOLOGIE. — *K-théorie réelle de fibrés projectifs complexes.* Note (*) de **Max Karoubi** et **Vojislav Mudrinski,** présentée par Henri Cartan

Dans cette Note nous achevons le calcul des groupes $K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_r, X \times P_s)$, où P_n désigne l'espace projectif complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$, calcul commencé par le second auteur dans une Note précédente [3]. Nous calculons aussi la K-théorie réelle de certains fibrés projectifs complexes.

TOPOLOGY. — Real K-Theory of Complex Projective Bundles.

In this Note we finish the computation of the groups $K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_r, X \times P_s)$ where P_n denotes the complex projective space of $\mathbb{C}^{n+1}$, which has been started by the second author in a previous Note [3]. *We compute also the real K-theory of some complex projective bundles.*

1. Calcul de $K_{\mathbb{C}}(P_{2m}, P_{2k})$ considéré comme un $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$-module. — Le calcul de $K_{\mathbb{C}}(P_r, P_s)$, $r>s$, comme groupe abélien est classique (*cf.* [2], p. 191 par exemple). Si H désigne le fibré de Hopf sur P_r et si t désigne l'élément $1-H$ de $K_{\mathbb{C}}(P_r)$, alors $K_{\mathbb{C}}(P_r, P_s)$ s'identifie au sous-groupe de $K_{\mathbb{C}}(P_r) \approx \mathbb{Z}[t]/t^{r+1}$ engendré par $t^{s+1}, t^{s+2}, \ldots, t^r$. D'autre part, pour toute paire d'espaces (X, Y), le groupe $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opère sur $K_{\mathbb{C}}(X, Y)$ *via* la conjugaison complexe. Dans ce cas ci, la conjugaison complexe transforme H en $\bar{H} = H^{-1}$, soit t en $1-1/(1-t) = -(t+t^2+\ldots+t^r)$, donc t^m en $(-1)^m(t+\ldots+t^r)^m$.

Lemme. — *Le groupe $K_{\mathbb{C}}(P_{2m}, P_{2k})$ est un $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$-module libre de base :*

$$t^{2k+1}+(k+1)\,t^{2k+2}, \qquad t^{2k+3}+(k+2)\,t^{2k+4}, \ \ldots, \ t^{2m-1}+mt^{2m}.$$

Démonstration. — Nous allons démontrer ce lemme par récurrence sur $m-k$. Pour $m=k+1$, $K_{\mathbb{C}}(P_{2m}, P_{2k})$ est engendré par t^{2k+1} et t^{2k+2} et la conjugaison complexe transforme t^{2k+1} en $-t^{2k+1}-(2k+1)\,t^{2k+2}$ et laisse t^{2k+2} invariant. Si on pose $e_1 = t^{2k+1}+(k+1)\,t^{2k+2}$, on voit ainsi que $\bar{e}_1 = -t^{2k+1}-kt^{2k+2}$ et que e_1 et $\bar{e}_1$ forment une base du $\mathbb{Z}$-module $K_{\mathbb{C}}(P_{2m}, P_{2k}) \approx \mathbb{Z}^2$.

Pour m et k quelconques, nous pouvons écrire la suite exacte de $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$-modules :

$$0 \to K_{\mathbb{C}}(P_{2m}, P_{2m-2}) \to K_{\mathbb{C}}(P_{2m}, P_{2k}) \to K_{\mathbb{C}}(P_{2m-2}, P_{2k}) \to 0.$$

La liberté des termes extrêmes implique celle du terme du milieu avec la base explicitée ci-dessus.

Corollaire. — *Le groupe $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(P_{2m})$ est un $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$-module libre de base $t+t^2$, $t^3+2\,t^4, \ldots, t^{2m-1}+mt^{2m}$.*

2. Calcul de $K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})$. — Rappelons (*cf.* [2] de nouveau) que $K^*_{\mathbb{C}}(X \times P_r, X \times P_s)$ est un $K^*_{\mathbb{C}}(X)$-module libre de base $t^{s+1}, \ldots, t^r$ en tant que sous-module de $K^*_{\mathbb{C}}(X \times P_r) \approx K^*_{\mathbb{C}}(X)[t]/t^{r+1}$. Pour alléger les notations, désignons par $K^i_{\mathbb{C}}(X)(\eta_{k+1}, \ldots, \eta_m)$ le sous-groupe de $K^i_{\mathbb{C}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})$ engendré par les :

$$\eta_j = t^{2j-1}+jt^{2j} \qquad \text{avec} \quad j=k+1, \ldots, m.$$

Le calcul du paragraphe 1 montre que $K^i_{\mathbb{C}}(X)(\eta_{k+1}, \ldots, \eta_m)$ s'identifie aussi au quotient de $K^i_{\mathbb{C}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})$ par l'action de $\mathbb{Z}_2$.

Théorème. — *Pour tout CW-complexe fini, l'homomorphisme de « réalification » :*

$$K^i_{\mathbb{C}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}) \to K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}),$$

induit des isomorphismes :

$$K_{\mathbb{C}}^{i}(X)^{m-k} \approx K_{\mathbb{C}}^{i}(X)(\eta_{k+1}, \ldots, \eta_m) \approx K_{\mathbb{C}}^{i}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})/\mathbb{Z}_2 \approx K_{\mathbb{R}}^{i}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}).$$

En particulier : $K_{\mathbb{R}}^{i}(X \times P_{2m}) \approx K_{\mathbb{R}}^{i}(X) \oplus K_{\mathbb{C}}^{i}(X)^m$.

Démonstration. — Précisons d'abord que dans cet énoncé, $K_{\mathbb{C}}^{i}(X)^{m-k}$ désigne la somme de $(m-k)$ copies de $K_{\mathbb{C}}^{i}(X)$. Pour $m-k=1$ on retrouve ainsi (sous une forme plus précise) l'isomorphisme démontré dans [3], soit $K_{\mathbb{C}}^{i}(X) \approx K_{\mathbb{R}}^{i}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k})$. Puisque $K_{\mathbb{C}}^{*}(X)^{m-k}$ et $K_{\mathbb{R}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})$ sont des foncteurs cohomologiques en X, un argument standard de récurrence sur le nombre de cellules de X [1] nous permet de réduire le problème au cas où X est une sphère et où $i=0$.

Première étape : $m-k=1$. Nous savons déjà que $K_{\mathbb{C}}^{i}(X) \approx K_{\mathbb{R}}^{i}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k})$. Il reste simplement à préciser que l'isomorphisme est induit par la réalification. Si X est une sphère de dimension paire, considérons la « K-théorie réduite » :

$$\tilde{F}(X) = \mathrm{Coker}(F(\mathrm{Point}) \to F(X))$$

avec :

$$F(X) = K_{\mathbb{C}}^{*}(X) \quad \text{ou} \quad K_{\mathbb{R}}^{*}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k}) \quad \text{ou} \quad K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k}).$$

On a alors une suite exacte (*cf.* [2], p. 154) :

$$\to \tilde{K}_{\mathbb{R}}^{-2}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k}) \xrightarrow{\theta} \tilde{K}_{\mathbb{C}}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k}) \to \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k}) \to \ldots$$

où θ est l'homomorphisme de complexification suivi de l'isomorphisme de Bott. Dans ce cas, cette suite se réduit à :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \to 0.$$

L'involution est l'identité sur le deuxième facteur $\mathbb{Z}$ et son opposé sur le premier facteur. Comme suite de $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$-modules, elle est donc isomorphe à :

$$0 \to M^- \to M \to M/\mathbb{Z}_2 \to 0,$$

où $M = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$ et où M^- est la partie antisymétrique de M d'après le paragraphe 1. Puisque la K-théorie réduite de S^0 est la K-théorie du point, le théorème est démontré pour les sphères de dimension paire. Le cas des sphères de dimension impaire se ramène à celui des sphères de dimension paire d'après la périodicité de Bott.

Deuxième étape : $m-k$ quelconque. On raisonne par récurrence sur $m-k$ à partir du diagramme :

$$\begin{array}{lccccccc}
(E_1) & 0 \to & K_{\mathbb{R}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2m-2}) & \to & K_{\mathbb{R}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}) & \to & K_{\mathbb{R}}^{*}(X \times P_{2m-2}, X \times P_{2k}) & \to 0, \\
 & & \uparrow \sigma_1 & & \uparrow \sigma_2 & & \uparrow \sigma_3 & \\
(E_2) & 0 \to & K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2m-2})/\mathbb{Z}_2 & \to & K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})/\mathbb{Z}_2 & \to & K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2m-2}, X \times P_{2k})/\mathbb{Z}_2 & \to 0.
\end{array}$$

L'exactitude de la suite (E_2) résulte de la suite exacte :

$$0 \to K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2m-2}) \to K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}) \to K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2m-2}, X \times P_{2k}) \to 0$$

et des considérations du paragraphe 1. L'exactitude de la suite (E_1) (qui se réduit à la surjectivité de la dernière flèche), résulte de la surjectivité de σ_3 (hypothèse de récurrence) et de l'exactitude de la suite (E_2). Enfin, l'isomorphisme σ_2 est conséquence des isomorphismes σ_1 et σ_3.

3. CALCUL DE $K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_r, X \times P_s)$ POUR r ET s QUELCONQUES. — Puisque l'homomorphisme composé :

$$K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m+2}\ X \times P_{2k}) \to K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m+1}, X \times P_{2k}) \to K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}),$$

est surjectif scindé, on a la suite exacte scindée :

$$0 \to K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m+1}, X \times P_{2m}) \to K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m+1}, X \times P_{2k}) \to K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}) \to 0.$$

Puisque l'homomorphisme composé :

$$K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}) \to K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k-1}) \to K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k-2}),$$

est injectif scindé, on a la suite exacte scindée :

$$0 \to K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})$$

$$\to K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k-1}) \to K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2k}, X \times P_{2k-1}) \to 0.$$

Enfin, considérons le diagramme :

$$\text{(E)}\quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K^*_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m+1}, X \times P_{2m}) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, equal] & K^*_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m+1}, X \times P_{2k-2}) \arrow[r, "\alpha"] & K^*_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k-2}) \arrow[r] & 0, \\ 0 \arrow[r] & K^*_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m+1}, X \times P_{2m}) \arrow[r, "\alpha''"] & K^*_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m+1}, X \times P_{2k-1}) \arrow[r] \arrow[u] & K^*_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k-1}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

La surjectivité scindée de α implique l'injectivité scindée de α' donc celle de α''. Il en résulte immédiatement que (E) est une suite exacte scindée.

En résumé, nous avons démontré le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit* X *un* CW-*complexe fini quelconque. Alors :*

$$K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m+1}, X \times P_{2k}) \approx K^i_{\mathbb{C}}(X)^{m-k} \oplus K_{\mathbb{R}}^{-4m-2+i}(X),$$

$$K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k-1}) \approx K^i_{\mathbb{C}}(X)^{m-k} \oplus K_{\mathbb{R}}^{-4k+i}(X),$$

$$K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m+1}, X \times P_{2k-1}) \approx K^i_{\mathbb{C}}(X)^{m-k} \oplus K_{\mathbb{R}}^{-4m-2+i}(X) \oplus K_{\mathbb{R}}^{-4k}(X).$$

En particulier :

$$K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m+1}) \approx K^i_{\mathbb{R}}(X) \oplus K_{\mathbb{R}}^{-4m-2+i}(X) \oplus K^i_{\mathbb{C}}(X)^m.$$

Exemple. — Calcul de $K_{\mathbb{R}}(P_{2m+1} \times P_{2m+1})$.

On a $K_{\mathbb{R}}(P_{2m+1}) \approx K_{\mathbb{R}}(P_0) \oplus K_{\mathbb{R}}(P_{2m+1}, P_0) \approx \mathbb{Z}^{m+1} \oplus K_{\mathbb{R}}^{-4m-2}(P_0)$ et :

$$K_{\mathbb{R}}^{-4m-2}(P_{2m+1}) \approx K_{\mathbb{R}}^{-4m-2}(P_0) \oplus K_{\mathbb{R}}^{-4m-2}(P_{2m+1}, P_0) \approx \mathbb{Z}^{m+1} \oplus K_{\mathbb{R}}^{-4m-2}(P_0).$$

Donc :

$$K_{\mathbb{R}}(P_{2m+1} \times P_{2m+1}) \approx K_{\mathbb{R}}(P_{2m+1}) \oplus K_{\mathbb{R}}(P_{2m+1} \times P_{2m+1}, P_{2m+1})$$
$$\approx K_{\mathbb{C}}(P_{2m+1})^m \oplus K_{\mathbb{R}}^{-4m-2}(P_{2m+1}) \oplus K_{\mathbb{R}}(P_{2m+1})$$

qui est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^{2(m+1)^2}$ si m est impair et à $\mathbb{Z}^{2(m+1)^2} \oplus (\mathbb{Z}_2)^2$ si m est pair.

4. Généralisation. Calcul de la K-théorie réelle de fibrés projectifs complexes. — Soit V un fibré vectoriel complexe de base X et de rang *impair* $2m+1$ et soit P(V) le fibré en espaces projectifs associé. Soit t la classe de $1-H$ dans $K_{\mathbb{C}}(P(V))$, H désignant le fibré en droites canonique sur P(V). Comme dans le paragraphe 1 posons :

$$\eta_1 = t + t^2, \qquad \eta_2 = t^3 + 2t^4, \ \ldots, \ \eta_m = t^{2m-1} + mt^{2m-1}.$$

Comme dans le paragraphe 2 on peut définir un homomorphisme :

$$\sigma : \quad K_{\mathbb{R}}^i(X) \oplus K_{\mathbb{C}}^i(X)^m \xrightarrow{(u,\, v)} K_{\mathbb{R}}^i(P(V)),$$

u étant induit par la projection $\pi : P(V) \to X$, et v étant défini par :

$$v(x_1, \ldots, x_m) = r(\eta_1 \pi^*(x_1) + \ldots + \eta_m \pi^*(x_m)),$$

où $r : K_{\mathbb{C}}^i(P(V)) \to K_{\mathbb{R}}^i(P(V))$ est la réalification. Si le fibré V est trivial, σ est un isomorphisme d'après le paragraphe 2. Un argument classique de suites exactes de Mayer-Vietoris (*cf.* [2], p. 181 par exemple) permet de montrer que σ est un isomorphisme. *En résumé*, nous avons démontré le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* V *un fibré vectoriel complexe de rang (complexe)* $2m+1$ *sur un* CW-*complexe fini* X. *Alors l'homomorphisme* $u : K_{\mathbb{R}}^i(X) \to K_{\mathbb{R}}^i(P(V))$ *est injectif scindé et* Coker $u \approx K_{\mathbb{C}}^i(X)^m$.

(*) Reçue le 21 juillet 1983, acceptée le 19 septembre 1983.

[1] M. Karoubi, *Séminaire Cartan-Schwartz* 1963/1964, Exposé 16, New York, Benjamin, 1967.
[2] M. Karoubi, K-*theory. An introduction* (*Grundlehren der Math. Wiss.*, Springer Verlag, 1978).
[3] V. Mudrinski, *Comptes rendus*, 292, série I, 1981, p. 683.

M. K. : *Université Paris-VII, U.E.R. de Mathématiques,* Tour 45-55, 2, *place Jussieu*, 75221 *Paris Cedex* 05;
V. M. : *Bulevar Avnoja* 49, 21000 *Novi Sad, Yougoslavie.*