34

TOPOLOGIE. — *Homologie cyclique et régulateurs en K-théorie algébrique.* Note (*) de **Max Karoubi,** présentée par Alain Connes.

Cette Note est la suite des Notes précédentes sur le sujet ([11], [12], [13]). On y généralise aux algèbres de Banach quelconques ainsi qu'aux algèbres de Banach ultramétriques la notion de régulateur en K-théorie algébrique définie dans [2] et [10].

TOPOLOGY. — Cyclic Homology and Regulators in Algebraic K-Theory.

This Note follows previous Notes on the same subject ([11], [12], [13]). *We generalize to arbitrary Banach algebras and to ultrametric Banach algebras the notion of regulator in algebraic K-theory defined in* [2] *and* [10].

1. Fibrés simpliciaux repérés. — Soit G un groupe simplicial et soit X un ensemble simplicial. Par définition, un G-*fibré repéré* sur X est la donnée pour chaque cellule $\sigma \in X_n$ et pour $\{i, j\} \subset \Delta_n = \{0, \ldots, n\}$ d'éléments $g_{ji} = g_{ji}(\sigma) \in G_n$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $g_{ki} = g_{kj} . g_{ji}$.

(ii) Soit $\varphi : \Delta_p \to \Delta_n$ une application croissante et soit $\varphi^* : X_n \to X_p$ et $\varphi^* : G_n \to G_p$ une notation indifférente pour les applications induites sur X et G. On a alors la formule :

$$\varphi^*(g_{\varphi(j)\,\varphi(i)}(\sigma)) = g_{ji}(\sigma).$$

Si $E = (g_{ji})$ et $F = (h_{ji})$ sont deux tels G-fibrés repérés, un morphisme $\lambda : E \to F$ est donné pour chaque cellule $\sigma \in X_n$ et pour $i \in \Delta_n$ par des éléments $\lambda_i = \lambda_i(\sigma) \in G_n$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $h_{ji} . \lambda_i = \lambda_j . g_{ji}$.

(ii) Avec φ comme ci-dessus, on a la formule :

$$\varphi^*(\lambda_{\varphi(i)}(\sigma)) = \lambda_i(\varphi^* \sigma).$$

Les morphismes se composent de manière évidente (et sont tous des isomorphismes). Notons $\Phi_G(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de tels fibrés repérés.

Théorème. — *L'ensemble* $\Phi_G(X)$ *est naturellement isomorphe à l'ensemble* [X, BG] *des classes d'homotopie d'applications de* X *dans le complexe de Kan* BG [14].

2. K-théorie topologique et K-théorie relative. — Soit $A = (A_n)$ un anneau simplicial *connexe* et soit G le groupe simplicial GL(A). Alors nous définirons la *K-théorie topologique* de A comme l'ensemble des groupes d'homotopie ($i > 0$) :

$$K_i^{top}(A) = \pi_i(BGL(A)),$$

Dans cette Note nous nous intéressons aux deux types d'exemples suivants :

(1) Soit R une algèbre de Banach réelle ou complexe et soit A_n l'ensemble des applications de classe C^m (m fixé tel que $0 \leqq m \leqq \infty$) du simplexe type Δ_n dans R. Il est bien connu que les groupes $K_i^{top}(A)$ [qu'on notera simplement $K_i^{top}(R)$] sont indépendants de m et sont les groupes usuels de la K-théorie topologique [7]. Si R est complexe par exemple, on a $K_i^{top}(R) \approx K_0(R)$ pour i pair et $K_i^{top}(R) \approx \pi_0(GL(R))$ pour i impair (périodicité de Bott).

(2) Soit R une algèbre de Banach ultramétrique et soit B_n l'anneau des séries formelles à $n+1$ variables :

$$P = \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_n} a_{i_0 \ldots i_n} x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n},$$

à coefficients dans R telles que $(i_0 i_1 \ldots i_n)^m . \| a_{i_0 \ldots i_n} \| \to 0$ (m fixé tel que $0 \leqq m < \infty$). Soit I_n l'idéal formé des séries P telles que :

$$\mathrm{P}(x_0, \ldots, x_n) = 0 \qquad \text{si} \quad x_0 + \ldots + x_n = 1.$$

Alors $\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n / \mathrm{I}_n$ définit un anneau simplicial et les groupes $\mathrm{K}_i^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})$ [qu'on notera aussi $\mathrm{K}_i^{\mathrm{top}}(\mathrm{R})$] sont indépendants de m et coïncident avec les groupes notés $\mathrm{K}^{-i}(\mathrm{R})$ dans [7]. On trouvera des exemples de calcul de tels groupes dans [3].

Revenons maintenant à la situation générale des anneaux simpliciaux connexes. Pour tout ensemble simplicial X on pose :

$$\tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{top}}(\mathrm{X}) = [\mathrm{X}, \mathrm{BGL}(\mathrm{A})],$$

les groupes $\mathrm{K}_i^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})$ étant simplement $\tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{top}}(\mathrm{S}^i)$ pour $i > 0$. Si X est fini [1], cet ensemble (en fait un groupe car $\mathrm{BGL}(\mathrm{A})$ est un H-espace) peut être défini de manière plus géométrique comme le groupe de Grothendieck réduit de la catégorie des fibrés simpliciaux repérés de groupe $\mathrm{GL}_r(\mathrm{A})$, $r = 0, 1, \ldots$: (*cf* [8], p. 58).

Comme dans [10], notons $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}$ la fibre homotopique de l'application évidente :

$$\mathrm{BGL}(\mathrm{A}_0)^+ \to \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \sim \mathrm{BGL}(\mathrm{A}).$$

La *K-théorie relative*, notée $\mathrm{K}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{rel}}(\mathrm{X})$, est par définition $[\mathrm{X}, \mathscr{F}_{\mathrm{A}}]$.

En particulier, on pose $\mathrm{K}_i^{\mathrm{rel}}(\mathrm{A}) = \mathrm{K}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{rel}}(\mathrm{S}^i)$ et on a la suite exacte :

$$\mathrm{K}_{i+1}(\mathrm{A}_0) \to \mathrm{K}_{i+1}^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_i^{\mathrm{rel}}(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_i(\mathrm{A}_0) \to \mathrm{K}_i^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}).$$

Si X est fini, le groupe $\mathrm{K}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{rel}}(\mathrm{X})$ peut être défini géométriquement de la manière suivante (comparer avec [10]). Considérons l'ensemble des triples $\tau = (\mathrm{E}, \mathrm{F}, \beta)$ où E et F sont deux $\mathrm{GL}_r(\mathrm{A}_0)$-fibrés repérés sur Y, $r = 0, 1, 2, \ldots$, avec $\pi : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ fibration acyclique et où $\beta : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est un isomorphisme des $\mathrm{GL}_r(\mathrm{A})$ fibrés associés (par extension du groupe structural). Deux triples :

$$\tau \to \mathrm{Y} \xrightarrow{\pi} \mathrm{X} \qquad \text{et} \qquad \tau' \to \mathrm{Y}' \xrightarrow{\pi'} \mathrm{X},$$

sont équivalents s'il existe un triple $\tau'' \to \mathrm{Y}'' \xrightarrow{\pi''} \mathrm{X}$ et des applications $\mathrm{Y} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Y}''$ et $\mathrm{Y}' \xrightarrow{\sigma'} \mathrm{Y}''$ tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathrm{X} \\
\mathrm{Y}'' \arrow[ur, "\pi''"] & \mathrm{Y}' \arrow[l, "\sigma'"] \arrow[u, "\pi'"']
\end{tikzcd}$$

commute et tels que τ et τ' soient isomorphes à $\sigma^*(\tau'')$ et $\sigma'^*(\tau'')$ en un sens évident. Le groupe $\mathrm{K}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{rel}}(\mathrm{X})$ est alors le quotient du groupe de Grothendieck formé par les classes d'équivalence de tels triples par le sous-groupe engendré par les triples du type $(\mathrm{E}, \mathrm{E}, \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

3. Construction des classes caractéristiques relatives. — Dans ce dernier paragraphe nous ne considérerons que les deux types d'exemples décrits dans le paragraphe 2. Nous supposerons en outre dans le cas ultramétrique que les algèbres sont des $\mathbb{Q}$-algèbres et qu'il existe un entier s et une constante C_s tels que $\| 1/k \| \leqq \mathrm{C}_s k^s$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Nous écrirons $\mathrm{K}_i(\mathrm{A})$ [resp. $\tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$] pour $\mathrm{K}_i(\mathrm{A}_0)$ [resp. $\tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{X})] \approx [\mathrm{X}, \mathrm{BGL}(\mathrm{A}_0)^+]$.

Comme l'a déjà remarqué A. Connes [5], la définition de l'homologie cyclique des algèbres a un analogue topologique que nous désignerons par $\mathrm{HC}_n^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})$ ou $\mathrm{H}_n^{\lambda\, \mathrm{top}}(\mathrm{A})$.

Dans le cas des algèbres de Banach A sur $k=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on considère le produit tensoriel complété projectif $\mathrm{C}_n^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})=\mathrm{A}\mathbin{\hat{\otimes}_k}\mathrm{A}\mathbin{\hat{\otimes}_k}\ldots\mathbin{\hat{\otimes}_k}\mathrm{A}$ ($n+1$ facteurs) au lieu de $\mathrm{C}_n(\mathrm{A})$ et $\mathrm{C}_n^{\lambda\,\mathrm{top}}(\mathrm{A})$ est le quotient de $\mathrm{C}_n^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})$ par l'action du groupe cyclique $\mathbb{Z}/n+1$. Dans le cas des algèbres de Banach ultramétriques, il convient de considérer des produits tensoriels complétés analogues : par exemple $\mathrm{C}_2^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})$ est le séparé complété de $\mathrm{A}\mathbin{\hat{\otimes}_{\mathbb{Q}}}\mathrm{A}$ pour la semi-norme $p(z)=\operatorname*{Inf}_{\mathrm{E}}\operatorname*{Sup}_{i}\|x_i\|\times\|y_i\|$ pour toutes les écritures E de l'élément z de $\mathrm{A}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathrm{A}$ sous la forme $\Sigma\, x_i\otimes y_i$. De même, les définitions de [11], paragraphe 4 se transcrivent sans peine dans le cas topologique : on obtient notamment une homologie de De Rham topologique notée $\overline{\mathrm{H}}_n^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})$.

La construction des classes caractéristiques en K-théorie algébrique détaillée dans [10], paragraphe 4, et rappelée dans [12], paragraphe 2, donne lieu à des homomorphismes :

$$\mathrm{K}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})\to\bigoplus_{\substack{p+q=2x\\ p\leqq q}}\mathrm{H}^p(\mathrm{X};\overline{\mathrm{H}}_q(\mathrm{A}))\to\bigoplus_{\substack{p+q=2n\\ p\leqq q}}\mathrm{H}^p(\mathrm{X};\overline{\mathrm{H}}_q^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}))\to\bigoplus_{\substack{p+q=2n\\ p\leqq q}}\mathrm{H}^p(\mathrm{X};\mathrm{HC}_q^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})),$$

On notera ici que nous utilisons de manière essentielle la notion de $\mathrm{GL}_r(\mathrm{A}_0)$-fibré repéré.

Dans le cas topologique, c'est-à-dire de $\tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{top}}(\mathrm{X})$, les formules définissant le caractère de Chern (*cf.* [10], § 4) sont sensiblement les mêmes à la nuance suivante près. La connexion canonique définie localement par :

$$\Gamma_i=\sum x_k\, g_{ki}^{-1}\,.\,dg_{ki}$$

doit faire intervenir la différentielle de g_{ki} en tant que fonction *non constante* des coordonnées barycentriques x_k (ce qui suppose $m\geqq 1$ dans le premier exemple du paragraphe 2). D'autre part, l'intégration sur les simplexes qui permet de passer de la cohomologie de De Rham à la cohomologie simpliciale fait apparaître des dénominateurs d'où la nécessité de la condition écrite au début de ce paragraphe. Toutes ces précautions étant prises, on peut définir le *caractère de Chern topologique* :

$$\mathrm{Ch}_n^{\mathrm{top}}:\quad \mathrm{K}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{top}}(\mathrm{X})\to\bigoplus_{p+q=2n}\mathrm{H}^p(\mathrm{X};\overline{\mathrm{H}}_q^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}))\to\bigoplus_{p+q=2n}\mathrm{H}^p(\mathrm{X};\mathrm{HC}_q^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})),$$

pour un ensemble simplicial X fini (noter que la condition $p\leqq q$ a disparu dans le cas topologique). En fait, si $k=\mathbb{C}$, on retrouve le caractère de Chern usuel pour une variété triangulée (*cf.* [10], § 1).

THÉORÈME. — *Il existe des homomorphismes :*

$$\mathrm{Ch}_n^{\mathrm{rel}}:\quad \mathrm{K}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{rel}}(\mathrm{X})\to\bigoplus_{\substack{p>q\\ p+q=2n}}\mathrm{H}^{p-1}(\mathrm{X};\mathrm{HC}_q^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}))\oplus\mathrm{H}^n(\mathrm{X};\mathrm{C}_{n-1}^{\lambda\,\mathrm{top}}\mathrm{A}/b\,(\mathrm{C}_n^{\lambda\,\mathrm{top}}\mathrm{A}))$$

et en particulier des homomorphismes :

$$\mathrm{Ch}^{\mathrm{rel}}:\quad \mathrm{K}_n^{\mathrm{rel}}(\mathrm{A})\to\bigoplus_{r<0}\mathrm{HC}_{n-1+2r}^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})\oplus\mathrm{C}_{n-1}^{\lambda\,\mathrm{top}}\mathrm{A}/b\,(\mathrm{C}_n^{\lambda\,\mathrm{top}}\mathrm{A})=\mathrm{F}_n\mathrm{A},$$

qui rendent commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_{n+1}(\mathrm{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ch}"] & \mathrm{K}_{n+1}^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ch}^{\mathrm{top}}"] & \mathrm{K}_n^{\mathrm{rel}}(\mathrm{A}) \arrow[d, "\mathrm{ch}^{\mathrm{rel}}"] \\
\bigoplus_{r>0}\mathrm{HC}_{n-1+2r}^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}) \arrow[r] & \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}}\mathrm{HC}_{n-1+2r}^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}) \arrow[r] & \mathrm{F}_n\mathrm{A}
\end{tikzcd}$$

Enfin, en considérant la dernière composante de $\mathrm{Ch}^{\mathrm{rel}}$, *on a aussi un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
K_n^{\mathrm{rel}}(A) \arrow[rr] \arrow[d] & & K_n(A) \arrow[drr, "D_n^{\mathrm{top}}"] & & \\
C_{n-1}^{\lambda\,\mathrm{top}} A/b(C_n^{\lambda\,\mathrm{top}} A) \arrow[rr, "B"] & & C_n^{\mathrm{top}} A/b(C_{n+1}^{\mathrm{top}} A) \arrow[rr] & & H_n^{\mathrm{top}}(A, A)
\end{tikzcd}$$

où B *est l'opérateur de Connes et où* D_n^{top} *est l'homomorphisme de Dennis* [12] $K_n(A) \to H_n(A, A)$ *composé avec l'homomorphisme canonique* $H_n(A, A) \to H_n^{\mathrm{top}}(A, A)$.

$$H_n(A, A) \to H_n^{\mathrm{top}}(A, A).$$

En fait, une description relativement explicite du caractère de Chern relatif est donnée dans [10], paragraphe 5. Dans le cas des algèbres de Banach involutives qui sont des C-algèbres dans le sens de [9], p. 233 on a un homomorphisme $K_n(A) \to K_n^{\mathrm{rel}}(A)$ obtenu en munissant les fibrés plats de « métriques ». En composant avec les classes caractéristiques relatives, on obtient les « *régulateurs* » :

$$R_n: \quad K_n(A) \to \bigoplus_{r<0} HC_{n-1+2r}^{\mathrm{top}}(A) \oplus C_{n-1}^{\lambda\,\mathrm{top}} A/b(C_n^{\lambda\,\mathrm{top}} A).$$

En particulier, si $A = \mathbb{C}$, on obtient le régulateur de Borel [2] :

$$K_{2i-1}(\mathbb{C}) \to HC_0^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C},$$

Enfin, mentionnons aussi qu'on peut donner une définition très explicite de l'invariant $K_1^{\mathrm{rel}}(A) \to HC_0^{\mathrm{top}}(A)$. C'est essentiellement ce qui a été fait dans un travail indépendant de P. de la Harpe et G. Skandalis [6].

Dans le cas d'un corps de valuation discrète F de corps résiduel fini et de caractéristique 0, $K_{2i-1}(F) \approx K_{2i-1}^{\mathrm{rel}}(F)$ modulo torsion pour $i > 1$ car $K_j^{\mathrm{top}}(F)$ est fini pour $j > 1$ [3]. On en déduit un régulateur :

$$K_{2i-1}(F) \to HC_0^{\mathrm{top}}(F) = F.$$

Pour F une extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$, il serait intéressant de comparer cet homomorphisme avec celui défini dans [4] pour $i = 2$.

(*) Remise le 19 septembre 1983.

[1] On dira que X est fini si la réalisation géométrique $|X|$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini.

[2] A. Borel, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, (4), 7, 1974, p. 235-272.
[3] A. Calvo, *K-théorie des anneaux ultramétriques*, Université Paris-VII (à paraître).
[4] R. F. Coleman, *Invent. Math.*, 69, 1982, p. 171-208.
[5] A. Connes, *Non Commutative Differential Geometry*, Part II (*De Rham Homology and non Commutative Algebra*, Preprint 1983).
[6] P. de la Harpe et G. Skandalis, (à paraître).
[7] M. Karoubi et O. Villamayor, *Math. Scand.*, 28, 1971, p. 265-307.
[8] M. Karoubi, *K-theory. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
[9] M. Karoubi, *Annals of Math.*, 112, 1980, p. 207-257.
[10] M. Karoubi, *Canadian Math. Soc. Proceedings*, 2, part 1, 1982, p. 19-27.
[11] M. Karoubi, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 381.
[12] M. Karoubi, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 447.
[13] M. Karoubi, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 513.
[14] J. P. May, *Simplicial Objets in Algebraic Topology*, Van Nostrand, Studies n° 11, Princeton, New Jersey.

Université Paris-VII, U.E.R. de Mathématiques,
2, place Jussieu, 75251 *Paris Cedex* 05.