

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Formule de Künneth en homologie cyclique, II.* Note de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Soient A et B deux k -algèbres telles que B et $HC_*(B)$ soient des k -modules plats. Le théorème essentiel de cette Note exprime $HC_*(A \otimes B)$ en fonction de $HC_*(A)$ et $HC_*(B)$. Nous étudions aussi le cas de la cohomologie cyclique et celui de l'homologie cyclique topologique. Des résultats analogues ont été obtenus indépendamment par D. Burghéla et C. Kassel en utilisant des méthodes différentes ([3], [8]).

HOMOLOGICAL ALGEBRA. — Künneth formula in cyclic homology, II.

Let A and B be two k -algebras such that B and $HC_*(B)$ are k -flat modules. The main theorem of this Note computes $HC_*(A \otimes B)$ in terms of $HC_*(A)$ and $HC_*(B)$. We study also the cohomological and topological cases. Analogous results have been obtained independently by D. Burghéla and C. Kassel with different methods ([3], [8]).

I. L'HOMOLOGIE CYCLIQUE DU PRODUIT TENSORIEL DE DEUX ALGÈBRES. — Soient E et F deux $k[\Lambda^0]$ -modules dans le sens précisé dans la Note précédente [6]. Nous avons vu que $HC_*(E \otimes F)$ est l'homologie du complexe $C_{\wedge}(E) \square C_{\wedge}(F)$ qui s'insère dans la suite exacte :

$$0 \rightarrow C_{\wedge}(E) \square C_{\wedge}(F) \rightarrow C_{\wedge}(E) \otimes C_{\wedge}(F) \xrightarrow{S_E \otimes 1 - 1 \otimes S_F} C_{\wedge}(E) \otimes C_{\wedge}(F) \rightarrow 0 \quad (S).$$

Si F et $HC_*(F)$ sont k -plats, on a

$$H_n(C_{\wedge}(E) \otimes C_{\wedge}(F)) \approx \bigoplus_{p+q=n} HC_p(E) \otimes HC_q(F),$$

d'après la formule de Künneth classique [car $C_{\wedge}(F)$ est k -plat]. La suite exacte d'homologie associée à la suite exacte (S) s'écrit donc

$$\begin{aligned} \bigoplus_{p+q=n+1} HC_p(E) \otimes HC_q(F) &\xrightarrow{S_E \otimes 1 - 1 \otimes S_F} \bigoplus_{p+q=n-1} HC_p(E) \otimes HC_q(F) \rightarrow HC_n(E \otimes F) \\ &\rightarrow \bigoplus_{p+q=n} HC_p(E) \otimes HC_q(F) \xrightarrow{S_E \otimes 1 - 1 \otimes S_F} \bigoplus_{p+q=n-2} HC_p(E) \otimes HC_q(F) \end{aligned}$$

soit

$$0 \rightarrow \text{Cotor}(HC_{*-1}(E), HC_*(F)) \rightarrow HC_*(E \otimes F) \rightarrow HC_*(E) \square HC_*(F) \rightarrow 0.$$

Supposons en particulier que E et F soient les $k[\Lambda^0]$ -modules associés à des algèbres A et B [2]. En notant comme il est d'usage $HC_*(A)$ et $HC_*(B)$ les homologies cycliques obtenues, on obtient le théorème de Künneth suivant :

THÉORÈME. — *Supposons que B et $HC_*(B)$ soient plats en tant que k -modules. On a alors la suite exacte suivante (où les structures de $k[u]$ -comodules sont induites par S) :*

$$0 \rightarrow \text{Cotor}(HC_{*-1}(A), HC_*(B)) \xrightarrow{\theta} HC_*(A \otimes B) \rightarrow HC_*(A) \square HC_*(B) \rightarrow 0.$$

Des applications nombreuses de ce théorème sont décrites dans [3] et [8]. Nous ne les répèterons pas ici.

Remarque. — Il semble raisonnable de conjecturer que l'homomorphisme θ est induit par le cup-produit de Loday et Quillen [9].

II. LE CAS DE LA COHOMOLOGIE CYCLIQUE. — Si E est un $k[\Lambda^0]$ -module, rappelons qu'on peut définir sa cohomologie cyclique $HC^n(E)$ comme la cohomologie du complexe dual $C_\wedge(E)^* = \text{Hom}(C_\wedge(E), k)$, soit encore $\text{Ext}_\wedge^n(k^\natural, E^*)$ où E^* désigne le dual de E qui est un Λ -module à gauche [2]. En utilisant le cup-produit sur les foncteurs Ext, on en déduit un « produit »

$$HC^n(E) \times HC^p(F) \rightarrow HC^{n+p}(E \otimes F)$$

(cf. [7], p. 514) qui est dual du coproduit en homologie cyclique et dont il est raisonnable de conjecturer qu'il redonne le produit d'A. Connes [1] à un facteur de normalisation près. En outre, $HC^*(E) = \prod HC^n(E)$ est naturellement un $k[u]$ -module, l'action de $u : HC^*(E) \rightarrow HC^{*+2}(E)$ étant induite par le transposé de l'homomorphisme $S : C_\wedge(E) \rightarrow C_\wedge(E)(-2)$ et étant le cup-produit par le générateur de $HC^2(k)$.

Supposons maintenant que k soit un corps et que M et N soient des k -espaces vectoriels. On définit leur produit tensoriel profini $M \bar{\otimes} N$ comme $\varprojlim M/M' \otimes N \approx \varprojlim M/M' \otimes N/N' \approx \varprojlim M \otimes N/N'$ où M' et N' parcourent l'ensemble des sous-espaces

vectoriels de codimension finie de M et N respectivement. Si M_1 et N_1 sont deux k -espaces vectoriels quelconques, il est facile de voir que $(M_1 \otimes N_1)^* \approx M_1^* \bar{\otimes} N_1^*$. Si en outre M et N sont des $k[u]$ -modules, on définit $M \bar{\otimes} N$ et $\text{Tor}^{k[u]}(M, N)$ comme étant respectivement le conoyau et le noyau de l'homomorphisme

$$u_M \otimes 1 - 1 \otimes u_N : M \bar{\otimes} N \rightarrow M \bar{\otimes} N,$$

avec des notations évidentes.

THÉORÈME. — Avec les hypothèses et les définitions précédentes, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow HC^*(E) \bar{\otimes} HC^*(F) \rightarrow HC^*(E \otimes F) \rightarrow \text{Tor}^{k[u]}(HC^{*-1}(E), HC^*(F)) \rightarrow 0.$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du paragraphe 1 en considérant la suite duale de la suite exacte

$$HC_*(E) \otimes HC_*(F) \xrightarrow{S_E \otimes 1 - 1 \otimes S_F} HC_*(E) \otimes HC_*(F) \rightarrow HC_*(E \otimes F) \rightarrow HC_*(E) \otimes HC_*(F) \xrightarrow{S_E \otimes 1 - 1 \otimes S_F} HC_*(E) \otimes HC_*(F).$$

Remarque 1. — Comme dans le paragraphe précédent, on en déduit un théorème analogue pour la cohomologie cyclique du produit tensoriel de deux algèbres.

Remarque 2. — On peut décomposer la suite exacte précédente degré par degré : on trouve alors la suite exacte

$$0 \rightarrow U \rightarrow HC^n(E \otimes F) \rightarrow V \rightarrow 0$$

où

$$U = \text{Coker} \bigoplus_{i+j=n-2} HC^i(E) \bar{\otimes} HC^j(F) \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} HC^i(E) \bar{\otimes} HC^j(F)$$

$$V = \text{Ker} \bigoplus_{i+j=n-1} HC^i(E) \bar{\otimes} HC^j(F) \rightarrow \bigoplus_{i+j=n+1} HC^i(E) \bar{\otimes} HC^j(F).$$

III. LE CAS TOPOLOGIQUE. — Soient

$$\rightarrow \mathcal{C}_n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_0 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \rightarrow \mathcal{D}_n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_0 \rightarrow 0,$$

deux complexes d'espaces de Fréchet, le second étant constitué d'espaces nucléaires ([4], [5]). Si on suppose que les homologies de \mathcal{C}_* et \mathcal{D}_* sont des espaces séparés, on a la formule de Künneth topologique :

$$\bigoplus_{i+j=n} H_i(\mathcal{C}_*) \hat{\otimes} H_j(\mathcal{D}_*) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathcal{C}_* \hat{\otimes} \mathcal{D}_*).$$

Celle-ci se démontre en remarquant que $H_n(\mathcal{C}_* \hat{\otimes} \mathcal{D}_*)$ ne dépend que du complexe \mathcal{C}_* et du complexe borné $0 \rightarrow \mathcal{D}_{n+1} \rightarrow \mathcal{D}_n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_0 \rightarrow 0$. En nous ramenant ainsi au cas où \mathcal{D}_* est un complexe borné, on raisonne par récurrence sur la longueur de celui-ci en utilisant le fait que le produit tensoriel topologique par un espace de Fréchet nucléaire est un foncteur exact ([4], [5]).

D'autre part, si E est un $\mathbb{C}[\Lambda^0]$ -module qui est un espace vectoriel topologique localement convexe, on peut définir son homologie cyclique topologique $HC_*^{\text{top}}(E)$ en suivant [1] grâce à des produits tensoriels topologiques projectifs. Enfin, si M et N sont des $\mathbb{C}[u]$ -comodules qui sont en outre des espaces de Fréchet (N étant nucléaire), on définit $M \hat{\square} N$ et $\widehat{\text{Cotor}}(M, N)$ comme respectivement le noyau et le conoyau de l'homomorphisme

$$S_M \otimes 1 - 1 \otimes S_N : M \hat{\otimes} N \rightarrow M \hat{\otimes} N,$$

où S_M et S_N sont les applications linéaires continues associées à la structure de $\mathbb{C}[u]$ -comodule (cf. [6], §1).

THÉORÈME. — Soient E et F deux $\mathbb{C}[\Lambda^0]$ -modules qui sont des espaces de Fréchet, F étant en outre nucléaire. Si on suppose $HC_*^{\text{top}}(E)$ et $HC_*^{\text{top}}(F)$ séparés, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \widehat{\text{Cotor}}(HC_{*-1}^{\text{top}}(E), HC_*^{\text{top}}(F)) \rightarrow HC_*^{\text{top}}(E \hat{\otimes} F) \rightarrow HC_*^{\text{top}}(E) \hat{\square} HC_*^{\text{top}}(F) \rightarrow 0.$$

Démonstration. — Elle est la même que celle du théorème énoncé dans le paragraphe 1. En effet, le théorème d'Eilenberg-Zilber [10] qui est de nature combinatoire est valable aussi dans le cas topologique et permet de montrer que $C_\Delta(E \hat{\otimes} F)$ a même homologie que $C_\Delta(E) \hat{\otimes} C_\Delta(F)$ (avec les notations de [6], §IV). On en déduit comme en [6], §IV que $C_\wedge(E \hat{\otimes} F)$ a même homologie que le complexe $C_\wedge(E) \hat{\square} C_\wedge(F)$ qui s'insère dans la suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow C_\wedge(E) \hat{\square} C_\wedge(F) \rightarrow C_\wedge(E) \hat{\otimes} C_\wedge(F) \rightarrow C_\wedge(E) \hat{\otimes} C_\wedge(F)(-2) \rightarrow 0.$$

En considérant la suite exacte d'homologie associée à cette suite exacte de complexes et en appliquant le théorème de Künneth topologique rappelé plus haut, on en déduit le théorème.

COROLLAIRE. — Soient A et B deux algèbres de Fréchet, B étant en outre nucléaire. Si on suppose $HC_*^{\text{top}}(A)$ et $HC_*^{\text{top}}(B)$ séparés, on a alors la suite exacte

$$0 \rightarrow \widehat{\text{Cotor}}(HC_{*-1}^{\text{top}}(A), HC_*^{\text{top}}(B)) \rightarrow HC_*^{\text{top}}(A \hat{\otimes} B) \rightarrow HC_*^{\text{top}}(A) \hat{\square} HC_*^{\text{top}}(B) \rightarrow 0.$$

Remarque 1. — Compte tenu des résultats de [1], cette formule généralise au cas non commutatif la formule de Künneth classique pour le produit de deux variétés compactes.

Remarque 2. — Il est évidemment regrettable de supposer les homologies cycliques séparées dans les résultats précédents. On peut s'en passer au moins pour un des facteurs à condition d'avoir une « bonne » définition de $H_i(\mathcal{C}_*) \hat{\otimes} H_j(\mathcal{D}_*)$ avec les notations du

début de ce paragraphe. En effet, il est facile de voir que le complexe \mathcal{D}_* admet une résolution

$$(S) \quad 0 \rightarrow \mathcal{D}_* \rightarrow \mathcal{D}_*^0 \rightarrow \mathcal{D}_*^1 \rightarrow 0,$$

avec $H_{j+1}(\mathcal{D}_*^0) \approx C_{j+1}(\mathcal{D}_*)/Z_{j+1}(\mathcal{D}_*)$ et $H_{j+1}(\mathcal{D}_*^1) \approx Z_j(\mathcal{D}_*)$, donc séparés.

La suite exacte d'homologie relative à (S) s'écrit donc

$$0 \rightarrow C_{j+1}(\mathcal{D}_*)/Z_{j+1}(\mathcal{D}_*) \rightarrow Z_j(\mathcal{D}_*) \rightarrow H_j(\mathcal{D}_*) \rightarrow 0.$$

La formule de Künneth topologique s'étend alors au cas où les $H_j(\mathcal{D}_*)$ ne sont pas nécessairement séparés [les $H_i(\mathcal{C}_*)$ l'étant cependant] à condition d'interpréter $H_i(\mathcal{C}_*) \hat{\otimes} H_j(\mathcal{D}_*)$ comme le conoyau de l'homomorphisme

$$H_i(\mathcal{C}_*) \hat{\otimes} C_{j+1}(\mathcal{D}_*)/Z_{j+1}(\mathcal{D}_*) \rightarrow H_i(\mathcal{C}_*) \hat{\otimes} Z_j(\mathcal{D}_*).$$

Grâce à cette interprétation du produit tensoriel topologique des homologies, on étend de la même manière les autres résultats de ce paragraphe.

Reçue le 24 février 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. CONNES, *Non commutative differential geometry*, Part II, Prépublication I.H.E.S., 1983.
- [2] A. CONNES, *Comptes rendus*, 296, série I, 1983, p. 953-958.
- [3] D. BURGHELEA, *Künneth formula in cyclic homology*, Prépublication, 1985.
- [4] R. DOUADY, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Astérisque*, 16, 1974, Société Mathématique de France.
- [5] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 16, 1955.
- [6] M. KAROUBI, Formule de Künneth en homologie cyclique I, *Comptes rendus*, 303, série I, 1986, p. 527-530.
- [7] M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 513-551.
- [8] C. KASSEL, *Cyclic homology, comodules and mixed complexes*, Publication M.S.R.I., 10711, juillet 1985.
- [9] J.-L. LODAY et D. QUILLEN, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 59, 1984, p. 565-591.
- [10] S. MACLANE, *Homology*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

*Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 212, Université de Paris-VII,
U.E.R. de Mathématiques, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.*