40a

ALGÈBRE. — *Homologie cyclique des groupes et des algèbres.* Note (*) de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Dans cette Note nous présentons les définitions de base qui nous serviront à introduire certaines classes caractéristiques en K-théorie algébrique et topologique. Ces définitions (à l'exception de celles des paragraphes 2 et 4) figurent pour l'essentiel dans [2], [3] et [4]. Nous les adaptons simplement à l'usage qui en sera fait.

ALGEBRA. — Cyclic Homology of Groups and Algebras.

In this Note we introduce the basic definitions which we will need to introduce certain characteristic classes in algebraic and topological K-theory. These definitions (with the exception of those in sections 2 and 4) are essentially contained in [2], [3] and [4]. We simply adapt them to our purposes.

I. HOMOLOGIE CYCLIQUE DES ALGÈBRES. — La définition de l'homologie cyclique des $\mathbb{C}$-algèbres (et de son analogue en cohomologie) est due à Alain Connes [2]. Soit maintenant k un anneau commutatif avec élément unité et soit A une k-algèbre quelconque (non nécessairement commutative). En suivant [3] et [4] nous allons définir l'homologie cyclique de A, définition qui coïncidera avec celle de [2] si $k=\mathbb{C}$. Pour cela désignons par A^p le produit tensoriel de p copies de A et faisons opérer le groupe cyclique $\mathbb{Z}/p$ sur A^p par la transformation :

$$a_1 \otimes a_2 \ldots \otimes a_p \to (-1)^{p-1} a_p \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{p-1},$$

qu'on désignera par t_p ou simplement t. Soit $N=N_p$ la transformation définie par $N_p = 1+t+ \ldots + t^{p-1}$ (si $p=1$, on convient que $t=N=\mathrm{Id}$). Définissons b et b' : $A^{p+1} \to A^p$ par les formules :

$$b'(a_0 \otimes \ldots \otimes a_p) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_p,$$

$$b(a_0 \otimes \ldots \otimes a_p) = b'(a_0 \otimes \ldots \otimes a_p) + (-1)^p a_p a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{p-1}.$$

Par définition, l'homologie cyclique de A, notée $HC_*(A)$, est l'homologie du complexe simple associé au double complexe $C_{**}(A)$:

$$\begin{tikzcd}
\arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
A^3 \arrow[d, "b"'] & A^3 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^3 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & \arrow[l, "1-t"'] \\
A^2 \arrow[d, "b"'] & A^2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & \arrow[l, "1-t"'] \\
A & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & \arrow[l, "1-t"']
\end{tikzcd}$$

Par exemple $HC_0(A) = A/[A, A]$. Si k contient $\mathbb{Q}$, les lignes sont des résolutions de $A^p/(1-t_p)$ et $HC_*(A)$ est alors l'homologie du complexe $(A^p/(1-t_p),\ b)$: c'est essentiellement la définition de A. Connes [2] qu'on notera $H^\lambda_*(A)$. Plus généralement, si k contient $1/n!$, il est facile de voir que $HC_p(A) \approx H^\lambda_p(A)$ pour $p<n$. Un des résultats fondamentaux de la théorie est l'existence d'une suite exacte naturelle ([2], [3], [4]) :

$$\to H_p(A, A) \xrightarrow{I} HC_p(A) \xrightarrow{S} HC_{p-2}(A) \xrightarrow{B} H_{p-1}(A, A) \to \ldots,$$

où $H_*(A, A)$ désigne l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans le bimodule A ([1], p. 169).

II. Homologie cyclique des groupes. — Soit G un groupe discret et soit $A = k[G]$ l'algèbre du groupe. Définissons β et β' : $A^{p+1} \to A^p$ par les formules usuelles ($g_i \in G$) :

$$\beta(g_0 \otimes \ldots \otimes g_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i g_0 \otimes \ldots \otimes \hat{g}_i \otimes \ldots \otimes g_p,$$

$$\beta'(g_0 \otimes \ldots \otimes g_p) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i g_0 \otimes \ldots \otimes \hat{g}_i \otimes \ldots \otimes g_p.$$

Comme dans le paragraphe 1 on peut introduire un double complexe $\tilde{C}_{**}(G)$ de $k[G]$-modules libres en remplaçant b et b' par β et β' respectivement.

En fait ici les colonnes impaires sont exactes et les colonnes paires sont des résolutions de k en tant que $k[G]$-module. Désignons par $C_{**}(G)$ le quotient du bicomplexe précédent par l'action de G et par $HC_*(G)$ l'homologie du complexe simple associé à $C_{**}(G)$.

Théorème. — *Pour tout groupe discret* G, *on a un isomorphisme naturel :*

$$HC_n(G) \approx H_n(G) \oplus H_{n-2}(G) \oplus \ldots$$

(*somme directe de groupes d'homologie de* G *à coefficients dans* k).

Regardons maintenant le bicomplexe $C_{**}(G)$ en termes d'éléments « non homogènes ». De manière précise, identifions $k \underset{A}{\otimes} A^{p+1}$ à A^p par la formule :

$$1.(g_0 \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_p) \to g_0^{-1} g_1 \otimes g_1^{-1} g_2 \otimes \ldots \otimes g_{p-1}^{-1} g_p = \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_p.$$

Cette correspondance permet de définir une transformation du bicomplexe $C_{**}(G)$ vers le bicomplexe $C_{**}(A)$ par la formule :

$$\alpha_1 \otimes \alpha_2 \ldots \otimes \alpha_p \to (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p)^{-1} \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2 \ldots \otimes \alpha_p.$$

Cette transformation admet une rétraction évidente :

$$r: \quad C_{**}(A) \to C_{**}(G),$$

définie par la formule $r(g_0 \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_p) = g_1 \otimes \ldots \otimes g_p$ si $g_0 g_1 \ldots g_p = 1$ et 0 sinon.

Corollaire. — *Le groupe* $HC_n(k[G])$ *contient* $H_n(G) \oplus H_{n-2}(G) \oplus \ldots$ *en facteur direct.*

Remarque. — Si k contient $\mathbb{Q}$, A. Connes a aussi défini des homomorphismes $HC_n(k[G]) \to H_{n-2k}(G)$ par une méthode sensiblement différente. J'ignore s'ils coïncident avec ceux définis ici.

III. Homologie cyclique réduite. — Supposons pour simplifier que A soit une algèbre augmentée d'augmentation $\varepsilon : A \to k$ et que $1/n! \in k$. Alors, pour $p < n$, on peut définir l'homologie cyclique réduite $\overline{HC}_p(A)$ de deux manières différentes : soit en considérant l'homologie de $(\overline{A}^{p+1}/1-t, b)$ avec $\overline{A} = \operatorname{Ker} \varepsilon$, soit en considérant le quotient $\overline{C}^{\lambda}_{p+1}(A)$ de $A^{p+1}/1-t$ par le sous k-module engendré par les produits tensoriels $a_0 \otimes \ldots \otimes a_p$ avec $a_i = 1$ pour un certain i et en remarquant que b passe au quotient [4]. On a alors une suite exacte scindée :

$$0 \to \overline{HC}_p(A) \to HC_p(A) \to HC_p(k) \to 0$$

avec $HC_p(k) = k$ si p est pair et $HC_p(k) = 0$ si p est impair.

Si G est un groupe discret, on peut de même définir une homologie cyclique réduite $\overline{HC}_p(G)$ si $p<n$ en considérant le quotient de $A^{p+1}=k[G]^{p+1}$ par le sous k-module engendré par les suites $(g_0, \ldots, g_p)$ telles que $g_i=g_{i+1}$ ou $g_0=g_p$ (dans la présentation « homogène »). On a alors $HC_p(G)\simeq\overline{HC}_p(G)\oplus HC_p(e)$.

IV. Homologie de De Rham et homologie cyclique réduite. — Pour toute k-algèbre A, posons :

$$\Omega_0 A=A \quad \text{et} \quad \Omega_1 A=\operatorname{Ker}(A\otimes A \xrightarrow{m} A) \quad \text{où} \quad m(a\otimes b)=ab.$$

Les groupes $\Omega_0 A$ et $\Omega_1 A$ sont naturellement des A-bimodules et on définit $\Omega_n A=\Omega_1 A \underset{A}{\otimes} \ldots \underset{A}{\otimes} \Omega_1 A$ (n facteurs). La somme directe $\Omega_* A=\oplus\,\Omega_n A$ est naturellement une algèbre graduée et les éléments de $\Omega_n A$ sont appelés formes différentielles (non commutatives) de degré n sur A. Soit $d:\Omega_* A\to\Omega_* A$ l'opérateur k-linéaire de degré un caractérisé par les propriétés suivantes :

(α) $$d(a)=1\otimes a-a\otimes 1 \quad \text{si} \quad a\in\Omega_0 A=A,$$

(β) $$d(\Sigma a_i\otimes b_i)=\Sigma(1\otimes a_i\otimes b_i-a_i\otimes 1\otimes b_i+a_i\otimes b_i\otimes 1)$$

si :

$$\Sigma a_i\otimes b_i\in\Omega_1 A\subset A\otimes A,$$

(γ) $$d(\omega_n.\omega_p)=d\omega_n.\omega_p+(-1)^n\omega_n.d\omega_p \quad \text{si} \quad \omega_n\in\Omega_n A \quad \text{et} \quad \omega_p\in\Omega_p A.$$

Soit $[\Omega_* A, \Omega_* A]$ le sous k-module de $\Omega_* A$ engendré par les éléments de la forme $\omega_n.\omega_p-(-1)^{np}\omega_p.\omega_n$. Alors, si on pose $\overline{\Omega}_* A=\Omega_* A/[\Omega_* A, \Omega_* A]$, l'opérateur d passe au quotient et définit un complexe :

$$0\to\overline{\Omega}_0 A\to\overline{\Omega}_1 A\to\overline{\Omega}_2 A\to\ldots$$

On posera :

$$\overline{Z}_p A=\operatorname{Ker}(\overline{\Omega}_p A\to\overline{\Omega}_{p+1} A) \quad \text{et} \quad \overline{B}_p A=\operatorname{Im}(\overline{\Omega}_{p-1} A\to\overline{\Omega}_p A).$$

Définition. — *L'homologie de De Rham non commutative* $\check{H}_*(A)$ *est l'homologie du complexe* $(\overline{\Omega}\ A, d)$. *De manière plus précise :* $\overline{H}_p(A)=\overline{Z}_p A/\overline{B}_p A$.

Supposons maintenant que A soit une algèbre augmentée d'augmentation ε et soit $\overline{A}$ l'idéal d'augmentation. Alors tout élément de $\Omega_n A$ s'écrit comme combinaison linéaire d'expressions de la forme :

$$\omega=a_0\,da_1\ldots da_n \quad \text{avec} \quad a_0\in A \text{ et } a_i\in\overline{A} \text{ pour } i>0.$$

De même :

$$d\omega=da'_0\,da_1\ldots da_n \quad \text{avec} \quad a'_0=a_0-\varepsilon(a_0).$$

Théorème (*cf.* [2], théorème 33). — *Supposons $n!$ inversible dans k. Alors, pour $p<n$,*

$$\overline{H}_p(A)\approx\operatorname{Ker}(\overline{HC}_p(A)\xrightarrow{B}H_{p+1}(A, A)).$$

Démonstration. — Désignons par $H_p^{\lambda}(A)$ l'homologie considérée par A. Connes (§ 1), par $\overline{C}_{p+1}^{\lambda}(A)$ le quotient de A^{p+1} défini dans le paragraphe 3 et par $\overline{H}_p^{\lambda}(A)$ l'homologie cyclique réduite. Alors l'application évidente de $\Omega_p(A)$ dans $\overline{C}_p^{\lambda}(A)$ qui associe à la forme différentielle $a_0\, da_1 \ldots da_p$ la classe de $a_0 \otimes a_1 \ldots \otimes a_p$ induit un isomorphisme :

$$\overline{\Omega}_p(A)/\overline{B}_p(A) \xrightarrow{\theta} \overline{C}_p^{\lambda}(A)/b(\overline{C}_{p+1}^{\lambda}(A)).$$

D'autre part, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\Omega}_p(A)/\overline{B}_p(A) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "d"'] & \overline{C}_p^{\lambda}(A)/b(\overline{C}_{p+1}^{\lambda}(A)) \arrow[d, "b"] \\
\overline{\Omega}_{p+1}(A) \arrow[r, "\varphi"] & \overline{C}_{p-1}^{\lambda}(A),
\end{tikzcd}$$

où :

$$\varphi(a_0\, da_1 \ldots da_{p+1})$$
$$= \sum \varepsilon_{ij}\, a_i\, a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_j\, a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_{i-1} + (-1)^p\, a_{p+1}\, a_0\, a_1 \otimes \ldots \otimes a_p,$$

avec $a_0 \in A$ et $a_i \in \overline{A}$ pour $i>0$. Ici les ε_{ij} sont définis pour i et $j \in \mathbb{Z}/p+2$, $(i, j) \neq (0, p+1)$, $0 \leqq i \leqq p-1$, $2 \leqq j \leqq p+1$, $i<j-1$ et doivent satisfaire aux identités :

$$\varepsilon_{ij} = (-1)^{p+1}\, \varepsilon_{i+1,\, j+1} \qquad (j<p+1).$$

Ceci montre déjà que θ induit une injection $\overline{H}_p(A) \to \overline{HC}_p(A)$ pour $p<n$. D'autre part, dans le complexe de Hochschild normalisé, l'opérateur B est défini par la formule (*cf.* [2], [4]) :

$$B(a_0 \otimes \ldots \otimes a_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{pi}\, 1 \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{i-1}.$$

L'opérateur b dans $\Omega_p A$ est défini par $b(\omega . da) = (-1)^{p-1}(\omega a - a\omega)$ pour $\omega \in \Omega_{p-1} A$. Il s'en suit que le groupe cyclique $\mathbb{Z}/p$ opère sur $\Omega_p A / b\,\Omega_{p+1}(A)$ par la formule :

$$\sigma : \quad \omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_p \to (-1)^{p-1}\, \omega_p \otimes \ldots \otimes \omega_{p-1} \qquad \text{avec} \quad \omega_i \in \Omega_1 A$$

et que $\overline{\Omega}_p A$ s'identifie à $\operatorname{Ker}(1-\sigma)$ puisque p est inversible dans k. Si $\omega \in \overline{\Omega}_p A/\overline{B}_p A = \overline{C}_p^{\lambda}(A)/b(\overline{C}_{p+1}^{\lambda}(A))$, $B\,\omega \in \operatorname{Ker}(1-\sigma)$ et on voit donc que l'égalité $B\,\omega = 0$ équivaut à $d\omega = 0$.

(*) Remise le 19 septembre 1983.

[1] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.

[2] A. CONNES, *Non Commutative Differential Geometry*, Part II (*De Rham Homology and non Commutative Algebra*, Preprint I.H.E.S., 1983).

[3] A. CONNES, *Comptes rendus*, 296, série I, 1983, p. 953.

[4] J.-L. LODAY et D. QUILLEN, *On the Cyclic Homology of Algebras* (à paraître).

Université Paris-VII, U.E.R. de Mathématiques,
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.