406 1

ALGÈBRE. — *Homologie cyclique et K-théorie algébrique I.* Note (*) de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Nous étendons aux anneaux quelconques les classes caractéristiques « absolues » définies dans [5] pour les $\mathbb{Q}$-algèbres commutatives. Pour cela nous utilisons l'homologie cyclique ([2], [3], [7]) et les résultats de la Note précédente [6].

ALGEBRA. — Cyclic Homology and Algebraic K-theory I.

We extend to arbitrary rings the "absolute" characteristic classes defined in [5] *for commutative* $\mathbb{Q}$*-algebras. For this we use cyclic homology* ([2], [3], [7]) *and results of the previous Note* [6].

I. DÉFINITION DES CLASSES CARACTÉRISTIQUES. — Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre A, A. Connes a défini des homomorphismes $K_0(A) \to HC_{2l}(A)$ [2]. Plus généralement, si A est une k-algèbre, tout module projectif de type fini E est l'image d'un projecteur p dans $M_r(A)$ pour un certain r.

Ce projecteur définit un homomorphisme d'anneaux :

$$\theta: \quad R = k[x]/(x^2 - x) \to M_r(A),$$

par $\theta(x) = p$. Puisque $\overline{HC}_{2l}(R) \approx HC_{2l}(k) \approx k$ canoniquement [7], il existe un élément privilégié u_l de $\overline{HC}_{2l}(R) \subset HC_{2l}(R)$. L'image de u_l par l'homomorphisme composé :

$$HC_{2l}(R) \to HC_{2l}(M_r(A)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} HC_{2l}(A),$$

où Tr est la « trace », définit l'invariant cherché : on démontre qu'il ne dépend que de E et que c'est une fonction additive de E, donc induit bien un homomorphisme Ch_0^l : $K_0(A) \to HC_{2l}(A)$. Notons que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & HC_{2l}(A) \arrow[dd, "S"] \\ K_0(A) \arrow[ur, "\mathrm{Ch}_0^l"] \arrow[dr, "\mathrm{Ch}_0^{l-1}"'] & \\ & HC_{2l-2}(A) \end{tikzcd}$$

Nous allons maintenant construire des invariants de la K-théorie algébrique « supérieure » :

$$D_i: \quad K_i(A) \to H_i(A, A) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ch}_i^l : K_i(A) \to HC_{i+2l}(A).$$

Ici D_i est l'homomorphisme introduit par K. Dennis [4], Ch_i^0 est l'homomorphisme composé $K_i(A) \to H_i(A, A) \to HC_i(A)$ et les Ch_i^l rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} & HC_{i+2l}(A) \arrow[dd, "S"] \\ K_i(A) \arrow[ur, "\mathrm{Ch}_i^l"] \arrow[dr, "\mathrm{Ch}_i^{l-1}"'] & \\ & HC_{i+2l-2}(A) \end{tikzcd}$$

Pour cela, désignons par MA l'anneau des matrices infinies dont tous les coefficients sont nuls sauf un nombre fini et par $G = GL(A)$ le groupe linéaire infini.

On a alors des isomorphismes de Morita induits par la trace :

$$HC_i(MA) \approx HC_i(A) \qquad \text{et} \qquad H_i(MA, MA) \approx H_i(A, A)$$

ainsi qu'un homomorphisme d'anneaux $k[G] \xrightarrow{\varphi} \widetilde{MA}$. L'homomorphisme de Dennis D_i est la composition des flèches suivantes :

$$K_i(A) = \pi_i(BG^+) \xrightarrow{h_i} H_i(G) \xrightarrow{\theta} H_i(k[G]) \xrightarrow{\varphi_*} H_i(\widetilde{MA}, \widetilde{MA}) \to H_i(A, A)$$

parmi lesquelles h_i est l'homomorphisme de Hurewicz, φ_* est induit par φ et θ est induit par l'homomorphisme de complexes :

$$g_1 \otimes g_2 \otimes \ldots \otimes g_n \mapsto (g_1 g_2 \ldots g_n)^{-1} \otimes g_1 \otimes g_2 \otimes \ldots \otimes g_n,$$

considéré dans la Note précédente [6]. Pour définir Ch_i^l on remarque simplement que $H_i(G)$ est un facteur direct *canonique* dans $HC_{i+2l}(G)$ [6].

Au-delà de $H_i(G)$ on peut donc aussi considérer la composition des homomorphismes :

$$K_i(A) \to H_i(G) \to HC_{i+2l}(G) \xrightarrow{\theta} HC_{i+2l}(k[G]) \xrightarrow{\varphi_*} HC_{i+2l}(\widetilde{MA}) \to HC_{i+2l}(A)$$

où θ est aussi défini dans [6], paragraphe 2. Il est clair que les homomorphismes D_i et Ch_i^l satisfont aux propriétés requises.

II. — Définition simpliciale des classes caractéristiques. — Nous allons reprendre ici le travail commencé dans [5] où A est maintenant une k-algèbre unitaire quelconque non nécessairement commutative mais en supposant quelques factorielles inversibles dans k. De manière plus précise, la méthode développée dans [5] se généralise sans peine à ce cadre à condition de considérer le complexe des formes différentielles *non commutatives* $\Omega_* A$ défini dans [6]. Les « traces » prendront alors leurs valeurs dans :

$$\overline{\Omega}_* A = \Omega_* A / [\Omega_* A, \Omega_* A].$$

D'autre part, si E est un k-module et si $1/n! \in k$, les groupes de cohomologie $H^p(X; E)$ où X est un ensemble simplicial, peuvent être calculés pour $p \leqq n$ par le complexe de De Rham-Sullivan des formes différentielles « simpliciales » de poids $\leqq n$ (*cf.* [1]), c'est-à-dire combinaisons linéaires à coefficients dans E d'éléments de la forme :

$$x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \qquad \text{avec} \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + p \leqq n$$

($x_0, x_1, \ldots, x_m$ représentant les coordonnées barycentriques sur chaque simplexe de dimension m). On désigne par $\Omega^p(X, E)$ le k-module des formes différentielles de degré p et de poids $\leqq n$ (donc $p \leqq n$ aussi).

En suivant [5], considérons maintenant le bicomplexe $\Omega^*(X, \overline{\Omega}_* A)$ et le sous-complexe $\mathscr{C}_A^*(X)$ défini par :

$$\mathscr{C}_A^{2r}(X) = \bigoplus_{\substack{p<q \\ p+q=2r}} \Omega^p(X, \overline{\Omega}_q A) \oplus Z^r(X, \overline{\Omega}_r A)$$

$$\mathscr{C}_A^{2r+1}(X) = \bigoplus_{\substack{p<q \\ p+q=2r+1}} \Omega^p(X, \overline{\Omega}_q A)$$

On notera $\mathscr{H}_{A}^{*}(X)$ l'homologie de ce sous-complexe; elle se calcule par une variante du théorème de Künneth : pour $r \leqq n$, on a une suite exacte scindée :

$$0 \to \bigoplus_{\substack{p+q=2r-1 \\ p<q}} \operatorname{Ext}(H_p(X), \overline{H}_q(A)) \to \mathscr{H}_{A}^{2r}(X)$$

$$\to \bigoplus_{p+q=2r} \operatorname{Hom}(H_p(X), \overline{H}_q(A)) \oplus \operatorname{Hom}(H_r(X), \overline{Z}_r(A)) \to 0.$$

A tout A-fibré plat E sur X de fibre A^s, on a associé dans [5] un caractère de Chern $\mathrm{Ch}_r(E) \in \mathscr{H}_{A}^{2r}(X)$. En particulier, si X est une sphère homologique de dimension p, on en déduit un homomorphisme de $\mathbb{Z} \approx H_p(X)$ dans $\overline{H}_q(A)$ pour $p \leqq q$ qui peut être défini par « intégration » sur les simplexes de dimension p de $1/r!\ \mathrm{Tr}(R r)$ où R est la forme de courbure [5]. D'après la description de la K-théorie algébrique en termes de fibrés plats [5], on en déduit un homomorphisme :

$$K_i(A) \to \overline{H}_{i+2l}(A)$$

(en posant $p=i$ et $q=i+2l$) qui est bien défini pour $i+l \leqq n$.

Supposons maintenant que A soit une algèbre augmentée. Dans ce cas :

$$\overline{H}_{i+2l}(A) \approx \operatorname{Ker}(\overline{HC}_{i+2l}(A) \to H_{i+2l+1}(A, A)) \quad ([2], [6]).$$

On en déduit un homomorphisme :

$$\mathrm{Ch}_i'^{\,l} : \quad K_i(A) \to \overline{HC}_{i+2l}(A),$$

avec $\mathrm{Ch}_i'^{\,l}=0$ pour $l<0$.

THÉORÈME. — *Supposons $n!$ inversible dans k. Alors les homomorphismes $\mathrm{Ch}_i'^{\,l}$ sont bien définis pour $i+l \leqq n$ et rendent le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} & \overline{HC}_{i+2l}(A) \arrow[dd, "S"] \\ K_i(A) \arrow[ur, "\mathrm{Ch}_i'^{\,l}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ch}_i'^{\,l-1}"'] & \\ & \overline{HC}_{i+2l-2}(A) \end{tikzcd}$$

En outre, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & HC_{i+2l}(A) \arrow[dd, "\pi"] \\ K_i(A) \arrow[ur, "\mathrm{Ch}_i^{l}"] \arrow[dr, "i!\,\mathrm{Ch}_i'^{\,l}"'] & \\ & \overline{HC}_{i+2l}(A) \end{tikzcd}$$

où Ch_i^l est défini dans le paragraphe 1 *et où π est la projection canonique de l'homologie cyclique sur l'homologie cyclique réduite.*

La démonstration de ce théorème est trop technique pour être reproduite intégralement ici. Mentionnons simplement que les formules décrivant $\mathrm{Ch}_r(E)$ (*cf.* [5]) ne font intervenir que les « différentielles logarithmiques » $g_{ki}^{-1}\, dg_{ki}$ des fonctions de transition g_{ki} de E. Ceci montre que dans les diverses factorisations permettant de définir Ch_i^l et $\mathrm{Ch}_i'^{\,l}$ l'ingrédient essentiel est un homomorphisme naturel $H_i(G) \to \overline{HC}_{i+2l}(G)$ défini pour *tout* groupe G noté Δ_i^l ou $\Delta_i'^{\,l}$ suivant la situation. Puisque Δ_i^l et $\Delta_i'^{\,l}$ sont tous deux compatibles avec l'homomorphisme de périodicité S et qu'il n'existe pas de transformation naturelle différente de 0 de $H_i(G)$ dans $H_{i+k}(G)$ pour $k > 0$, il suffit de comparer Δ_i^0 et $\Delta_i'^{\,0}$. Or dans les deux cas, l'homomorphisme composé $H_i(G) \to \overline{HC}_i(G) \xrightarrow{S} \overline{HC}_{i-2}(G)$ est réduit à 0. On doit donc avoir $\Delta_i'^{\,l} = \lambda\, \Delta_i^l$ pour un certain scalaire $\lambda \in k$. Pour déterminer λ, il suffit de choisir l'exemple $G = \mathbb{Z}^i$.

Dans ce cas, $H_i(G) \approx k$ et l'homomorphisme :

$$k \approx H_i(G) \subset H_i(k[G], k[G]) \to H_i^{DR}(k[G]) \approx k,$$

qui associe à la forme différentielle non commutative $a_0\, da_1 \ldots da_i$ la forme différentielle usuelle $a_0\, da_1 \wedge da_2 \wedge \ldots \wedge da_i$ est la multiplication par $i!$ d'après les formules usuelles de multiplication en homologie de Hochschild. Puisque l'homomorphisme composé :

$$\mathrm{Ch}' : \quad K_*(A) \to \overline{H}_*(A) \to H_*^{DR}(A)$$

est multiplicatif [5], le théorème en résulte (choisir $A = k[G]$).

Remarque 1. — Pour une $\mathbb{Q}$-algèbre A, A. Connes a aussi défini un homomorphisme :

$$\mathrm{Ch}_1''^{\,l} : \quad K_1(A) \to HC_{1+2l}(A).$$

Si $\tilde{A}$ désigne l'algèbre A augmentée d'un élément unité, il est facile de voir que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
K_1(\tilde{A}) \arrow[r, "\mathrm{Ch}_1'^{\,l}"] & \overline{HC}_{1+2l}(\tilde{A}) \\
K_1(A) \arrow[u, tail] \arrow[r, "\mathrm{Ch}_1''^{\,l}"'] & HC_{1+2l}(A) \arrow[u, phantom, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

Remarque 2. — Pour les fibrés plats de base X quelconque, la méthode développée dans le paragraphe 2 semble apporter des résultats plus fins (à condition d'inverser quelques factorielles) que la méthode du paragraphe 1. Pour généraliser les résultats du paragraphe 1 à ce cadre il manque semble-t-il une « bonne » interprétation des formes différentielles en caractéristique quelconque.

(*) Remise le 19 septembre 1983.

[1] H. Cartan, *Inventiones Math.*, 35, 1976, p. 261-271.

[2] A. Connes, *Non Commutative Differential Geometry*, Part II (*De Rham Homology and Non Commutative Algebra*, Preprint I.H.E.S., 1983).

[3] A. Connes, *Comptes rendus*, 296, série I, 1983, p. 953.

[4] K. Dennis, *Algebraic K-theory and Hochschild Homology* (non publié).

[5] M. Karoubi, *Canadian Math. Society Conference Proceedings*, 2, Part 1, 1982.

[6] M. Karoubi, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 381.

[7] J.-L. Loday et D. Quillen, *On the Cyclic Homology of Algebras* (à paraître).

Université Paris-VII, U.E.R. de Mathématiques,
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.

ALGÈBRE. — *Homologie cyclique et* K-*théorie algébrique II.* Note (*) de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Nous étudions la compatibilité du caractère de Chern généralisé [7] avec les structures multiplicatives en cohomologie cyclique [3]. Nous définissons aussi de nouveaux invariants de la K-théorie algébrique d'algèbres de groupes.

ALGEBRA. — Cyclic Homology and Algebraic K-Theory II.

We study the compatibility of the generalized Chern character [7] *with the multiplicative structures in cyclic cohomology* [3]. *We also define new invariants of the algebraic K-theory of group algebras.*

I. Homologie et cohomologie cycliques. — Nous reprenons ici les considérations de [3] en les précisant et en les adaptant à la cohomologie des k-algèbres et des groupes.

Rappelons d'abord que la catégorie Δ a comme objets les entiers naturels $[n]$, un morphisme $[n] \to p$ étant donné par une application croissante $\{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, p\}$. Ces morphismes sont engendrés par les deux familles de morphismes :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i,q} : \quad [q-1] \to [q] \qquad \text{et} \qquad \eta_i = \eta_{i,q} : [q+1] \to [q],$$

satisfaisant aux relations usuelles [8], p. 234. La catégorie Λ de A. Connes [3] a les mêmes objets que Δ mais on étend l'ensemble des morphismes en considérant en outre les permutations circulaires de la source ou du but. De manière plus précise, si on désigne par $\lambda = \lambda_q$ la permutation de $\{0, \ldots, q\} = \mathbb{Z}/q+1$ pour tout q définie par $\lambda(j) = j-1$, on a les relations :

$$\varepsilon_i = \lambda^{-1} . \varepsilon_{i-1} . \lambda \qquad \text{et} \qquad \eta_i = \lambda^{-1} . \eta_{i-1} . \lambda.$$

Ces relations définissent alors Λ comme « produit semi-direct » de la catégorie Δ avec les divers groupes cycliques $\mathbb{Z}/q+1$.

Soit $k[\Delta]$ (resp. $k[\Lambda]$) l'algèbre associée à la catégorie Δ (resp. Λ), c'est-à-dire l'algèbre engendrée par les symboles ε_i, η_i (resp. ε_i, η_i, λ) et vérifiant les relations ci-dessus. On peut remarquer qu'un groupe abélien simplicial (resp. cosimplicial) est un $k[\Delta]^0$-module (resp. un $k[\Delta]$-module) à gauche. De manière analogue, on définira un $\mathbb{Z}$-module *cyclique* (resp. *cocyclique*) comme un $k[\Lambda]^0$-module (resp. un $k[\Lambda]$-module) à gauche. On pourra remarquer ici que $k[\mathscr{C}^0] \approx k[\mathscr{C}]^0$ pour $\mathscr{C} = \Delta$ ou Λ, et que nous nous écartons légèrement des notations de [3], ce qui n'a qu'une importance relative puisque les catégories Λ et Λ^0 sont isomorphes [3]. D'autre part, pour éviter des lourdeurs d'écriture nous écrirons souvent Δ, Λ, etc. au lieu de $k[\Delta]$, $k[\Lambda]$, ... Par exemple, un $\mathbb{Z}$-module cyclique est donné par une famille de groupes abéliens E_q avec des morphismes :

$$d_i : \quad E_q \to E_{q-1}, \qquad s_i : \quad E_q \to E_{q+1} \qquad \text{et} \qquad \sigma : \quad E_q \to E_q .$$

satisfaisant aux relations « duales » de celles écrites plus haut : celles de [8], p. 234, puis :

$$d_i = \sigma . d_{i-1} . \sigma^{-1} \qquad \text{et} \qquad s_i = \sigma . s_{i-1} . \sigma^{-1} \quad [9].$$

En particulier, à toute k-algèbre A on peut associer un $\mathbb{Z}$-module cyclique en posant $E_q = A^{q+1}$ (produit tensoriel sur k de $q+1$ copies de A) et :

$$d_i(a_0 \otimes \ldots \otimes a_q) = a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_q \quad \text{pour} \quad 0 \leqq i < q,$$

$$d_q(a_0 \otimes \ldots \otimes a_q) = a_q a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{q-1},$$
$$s_i(a_0 \otimes \ldots \otimes a_q) = a_0 \otimes \ldots a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_q,$$
$$\sigma(a_0 \otimes \ldots \otimes a_q) = a_q \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{q-1}.$$

C'est essentiellement le module $A^\natural$ considéré dans [3] via l'isomorphisme entre Λ et Λ^0.

Soit C^k le Λ-module à gauche défini dans [3]. En considérant C^k comme un Λ^0-module à droite, il est facile de voir que $C^k \underset{\Lambda^0}{\otimes} E \approx E_k$ pour tout $\mathbb{Z}$-module cyclique E. En explicitant le complexe double $C^{n,m} \underset{\Lambda^0}{\otimes} A^\natural$ [3], on retrouve le complexe défini dans une Note précédente [6]. On en déduit aussitôt l'isomorphisme :

$$HC_n(A) \approx \mathrm{Tor}_n^{\Lambda^0}(k^\natural, A^\natural).$$

De manière duale, si $E = (E^k)$ est un $\mathbb{Z}$-module cocyclique, $\mathrm{Hom}_\Lambda(C^k, E) \approx E^k$. En particulier si on pose en général $M^* = \mathrm{Hom}(M, k)$, $A^{\natural *}$ est un $\mathbb{Z}$-module cocyclique et on peut définir :

$$HC^n(A) = \mathrm{Ext}_\Lambda^n(k^\natural, A^{\natural *}).$$

Ainsi $HC^n(A)$ est le n-ième groupe de cohomologie du complexe simple associé au complexe double :

$$\begin{tikzcd}
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
A^{3*} \arrow[r, "1-t^*"] & A^{3*} \arrow[r, "N^*"] & A^{3*} \arrow[r, "1-t^*"] & {} \\
A^{2*} \arrow[u, "b^*"] \arrow[r, "1-t^*"] & A^{2*} \arrow[u, "b'^*"'] \arrow[r, "N^*"] & A^{2*} \arrow[u, "b^*"'] \arrow[r, "1-t^*"] & {} \\
A^{*} \arrow[u, "b^*"] \arrow[r, "1-t^*"] & A^{*} \arrow[u, "b'^*"'] \arrow[r, "N^*"] & A^{*} \arrow[u, "b^*"'] \arrow[r, "1-t^*"] & {}
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire le complexe dual de celui définissant l'homologie cyclique.

Soit maintenant G un groupe quelconque et soit $A = k[G]$. Soit $A_\cdot^\natural$ le sous-module cyclique de $A^\natural$ engendré par les produits tensoriels $g_0 \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_n$, $g_i \in G$, tels que $g_0 . g_1 \ldots g_n = 1$. Il est clair que $HC_n(G) \approx \mathrm{Tor}_n^{\Lambda^0}(k^\natural, A_\cdot^\natural)$ [6]. De même, on peut définir :

$$HC^n(G) = \mathrm{Ext}_\Lambda^n(k^\natural, A_\cdot^{\natural *}).$$

Comme dans [6], paragraphe 2, on démontre que $HC^n(G) \approx H^n(G) \oplus H^{n-2}(G) \oplus \ldots$

II. Compatibilité du caractère de Chern avec les structures multiplicatives. — L'exemple des fonctions C^∞ sur une variété montre qu'il est vain sans doute de rechercher un produit naturel :

$$HC_n(A) \times HC_p(B) \to HC_{n+p}(A \otimes B),$$

compatible avec le cup-produit en homologie de Hochschild [2]. Par contre, on peut définir un cup-produit en *cohomologie* cyclique ([2], [3]) :

$$HC^n(A) \times HC^p(B) \to HC^{n+p}(A \otimes B),$$

comme composition des flèches :

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^n(k^\natural, A^{\natural *}) \times \mathrm{Ext}_\Lambda^p(k^\natural, B^{\natural *}) \to \mathrm{Ext}_{\Lambda \times \Lambda}^{n+p}(k^\natural, A^{\natural *} \otimes B^{\natural *})$$
$$\to \mathrm{Ext}_{\Lambda \times \Lambda}^{n+p}(k^\natural, (A \otimes B)^{\natural *}) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{n+p}(k^\natural, (A \otimes B)^{\natural *}),$$

où la première flèche est le produit V de Cartan-Eilenberg [1], p. 216, et où la dernière flèche est induite par la diagonale $\Lambda \to \Lambda \times \Lambda$. Puisque Δ est une sous-catégorie de Λ, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} HC^n(A) \times HC^p(B) & \to & HC^{n+p}(A \otimes B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(A, A^*) \times H^p(B, B^*) & \to & H^{n+p}(A \otimes B, (A \otimes B)^*). \end{array}$$

De manière tout à fait analogue, si G et L sont deux groupes, on peut définir un cup-produit :

$$HC^n(G) \times HC^p(L) \to HC^{n+p}(G \times L),$$

qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} HC^n(G) \times HC^p(L) & \to & HC^{n+p}(G \times L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(G) \times H^p(L) & \to & H^{n+p}(G \times L). \end{array}$$

Il en résulte aussitôt que dans la décomposition de $HC^n(G)$ et de $HC^p(L)$ en somme directe de groupes de cohomologie, le cup-produit entre les « HC-groupes » s'obtient composante par composante : ceci est par exemple une conséquence du théorème de Kan-Thurston [4] qui implique qu'il n'existe pas de transformation naturelle non triviale :

$$H^n(G) \times H^p(L) \to H^{n+p-r}(G \times L),$$

pour $r>0$.

Enfin, une dernière remarque : nous aurions pu aussi bien considérer des HC-groupes à coefficients dans un k-module M, c'est-à-dire $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(k^\natural, A^{\natural *} \otimes M)$. Si on note $HC^n(A ; M)$ de tels groupes, on a aussi un cup-produit :

$$HC^n(A ; M) \times HC^p(B ; N) \to HC^{n+p}(A \otimes B ; M \otimes N),$$

vérifiant des propriétés analogues.

Théorème. — *Soient $a_i \in K_i(A)$, $b_j \in K_j(B)$ et soit $a_i \cup b_j \in K_{i+j}(A \otimes B)$ le cup-produit de a_i et b_j en K-théorie algébrique. Soient :*

$$\omega \in HC^{i+2l}(A ; M) \qquad et \qquad \theta \in HC^{j+2m}(B ; N).$$

On a alors la formule :

$$\langle \mathrm{Ch}^{l+m}_{i+j}(a_i \cup b_j), \omega \cup \theta \rangle = (-1)^{ij} \langle \mathrm{Ch}^l_i(a_i), \omega \rangle \otimes \langle \mathrm{Ch}^m_j(b_j), \theta \rangle,$$

dans $M \otimes N$, en désignant par $\langle\ ,\ \rangle$ l'homomorphisme de dualité entre homologie et cohomologie.

Esquisse de démonstration. — Nous ne considérerons que le cas où i et j sont strictement positifs, les autres cas étant laissés en exercices au lecteur. Alors l'élément a_i (resp. b_j) est représenté par une application continue $S^i \to BGL_r(A)^+$ (resp. $S^j \to BGL_s(B)^+$ pour certains entiers r et $s \geqq 3$). On en déduit des éléments $\alpha_i \in H_i(GL_r(A))$, $\beta_j \in H_j(GL_s(B))$ et l'image de $a_i \cup b_j$ dans $H_{i+j}(GL(A \otimes B))$ par l'homomorphisme de Hurewicz est celle du couple (α_i, β_j) par l'homomorphisme composé :

$$H_i(GL_r(A)) \times H_j(GL_s(B)) \to H_{i+j}(GL_r(A) \times GL_s(B))$$
$$\xrightarrow{\otimes} H_{i+j}(GL_{rs}(A \otimes B)) \to H_{i+j}(GL(A \otimes B)).$$

Ceci est par exemple une conséquence de la description de la K-théorie algébrique en termes de fibrés plats [5]. Si on pose $G = GL_r(A)$ et $L = GL_s(B)$, le théorème résulte alors des considérations de la fin du paragraphe 1 et de la description du caractère de Chern [7].

III. Invariants de la K-théorie algébrique d'algèbres de groupe. — Soit R une k-algèbre où G opère à droite et soit R [G] l'algèbre du groupe avec la règle de multiplication $g.r^g = r.g$ ($r \mapsto r^g$ désignant l'action à droite par $g \in G$ pour $r \in R$). La correspondance :

$$g_0 r_0 \otimes g_1 r_1 \otimes \ldots \otimes g_n r_n \mapsto \mathrm{Tr}(r_0 r_1^{g_1^{-1}} r_2^{g_2^{-1} g_1^{-1}} \ldots r_n^{g_n^{-1} \ldots g_1^{-1}}) g_1 \otimes \ldots \otimes g_n$$

si $\Pi g_i = 1$, et 0 sinon, induit un homomorphisme :

$$T_i : \quad HC_i(R[G]) \to HC_i(G; H_0(R)).$$

Ici, $\mathrm{Tr} : R \to H_0(R) = R/[R, R]$ désigne l'application canonique et $HC_i(G; M)$ désigne en général l'homologie du bicomplexe $M \otimes_G \tilde{C}^{**}(G)$ [6] paragraphe 2. On a de même un scindage canonique :

$$HC_i(G; M) \approx H_i(G; M) \oplus H_{i-2}(G; M) \oplus \ldots$$

En composant le caractère de Chern [7], paragraphe 1 avec T_i, on obtient finalement un homomorphisme :

$$\gamma_i^l : \quad K_i(R[G]) \to H_{i+2l}(G; H_0(R)).$$

Un homomorphisme analogue (pour $i = 0$ ou 1 et $\mathbb{Q} \subset k$) a été défini pour la première fois par A. Connes. Bien entendu, les propriétés multiplicatives du caractère de Chern décrites dans le paragraphe 2 se transcrivent sans peine aux classes γ_i^l. Mais ici, on peut donner un énoncé dual en homologie sous certaines hypothèses.

Théorème. — *Supposons que* $\dim(k) \leqq 1$ (*par exemple* $k = \mathbb{Z}$ *ou un localisé de* $\mathbb{Z}$ *ou un corps quelconque*). *Supposons aussi que* R, S, $H_0(R)$ *et* $H_0(S)$ *soient des* k-*modules projectifs. Soient* $a_i \in K_i(R[G])$ *et* $b_j \in K_j(S[L])$. *On a alors la formule :*

$$\gamma_{i+j}^n(a_i \cup b_j) = \sum_{l+m=n} \gamma_i^l(a_i) \cup \gamma_j^m(b_j),$$

dans $H_{i+j+2n}(G \times L; H_0(R \otimes S)) \approx H_{i+j+2n}(G \times L; H_0(R) \otimes H_0(S))$.

En désignant par z la différence des deux membres de la formule, on voit que le théorème est une conséquence du lemme suivant :

Lemme. — *Soient* C *et* Y *deux complexes de* k-*modules projectifs et soit* $z \in H_*(C \otimes Y)$ *tel que* $\langle z, \omega \cup \theta \rangle = 0$ *pour tout* $\omega \in H^*(C)$ *et* $\theta \in H^*(Y)$. *Alors* $z = 0$.

(*) Remise le 19 septembre 1983.

[1] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.

[2] A. Connes, *Non Commutative Differential Geometry*, Part II (*De Rham Homology and Non Commutative Algebra*), Preprint I.H.E.S., 1983.

[3] A. Connes, *Comptes rendus*, 296, série I, 1983, p. 953.

[4] D. M. Kan et W. P. Thurston, *Topology*, 15, n° 3, 1976, p. 253-258.

[5] M. Karoubi, *Canadian Math. Society Conference Proceedings*, 2, Part 1, 1982.

[6] M. Karoubi, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 381.

[7] M. Karoubi, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 447.

[8] S. MacLane, *Homology*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1975.

[9] En toute rigueur il faut se restreindre aux Λ-modules qui sont somme directe des E_q, ce qui n'affecte pas la suite. La même remarque s'applique aux Λ^0-modules.

Université Paris-VII, U.E.R. de Mathématiques,
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.