41a

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm.

Note de **Alain Connes,** Membre de l'Académie et **Max Karoubi.**

Remise le 1[er] octobre 1984.

Nous définissons un accouplement $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A}) \times \mathrm{K}_{p+1}(\mathscr{A}) \to \mathbf{C}^*$, où $\mathscr{A}$ est une $\mathbf{C}$-algèbre quelconque, $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A})$ est le groupe engendré par les modules de Fredholm $(p+1)$-sommables [7] et où $\mathrm{K}_{p+1}(\mathscr{A})$ est le groupe de K-théorie algébrique de Quillen [10]. Cet accouplement généralise la construction de l'extension centrale des « groupes de lacets » $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^1, \mathrm{U}(n))$ par $\mathbf{C}^*$ [18].

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Multiplicative Character of a Fredholm Module.

We define a pairing $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A}) \times \mathrm{K}_{p+1}(\mathscr{A}) \to \mathbf{C}^*$ *where* $\mathscr{A}$ *is an arbitrary* $\mathbf{C}$*-algebra,* $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A})$ *is the group generated by* $(p+1)$*-summable Fredholm modules* [7] *and where* $\mathrm{K}_{p+1}(\mathscr{A})$ *is the algebraic K-theory group of Quillen* [10]. *This pairing extends the construction of the central extension of the loop groups* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^1, \mathrm{U}(n))$ *by* $\mathbf{C}^*$ [18].

I. Les groupes $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A})$. — Soit $\mathscr{A}$ une $\mathbf{C}$-algèbre. Une structure de $\mathscr{A}$-module à gauche sur un espace hilbertien H est la donnée d'un homomorphisme π de $\mathscr{A}$ dans l'algèbre $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ des opérateurs bornés dans H. Nous noterons $\mathscr{K}(\mathrm{H})$ l'idéal bilatère de $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ formé des opérateurs compacts. La notion de *module de Fredholm* rappelée ci-dessous est due à Atiyah [4] dans le cas pair et à Brown, Douglas, Fillmore et Kasparov ([5], [15]) dans le cas impair.

Définition 1. — (*a*) *Un module de Fredholm impair sur* $\mathscr{A}$ *est donné par un couple* (H, F) *où* H *est un espace hilbertien qui est un* $\mathscr{A}$*-module à gauche et où* $\mathrm{F} \in \mathscr{L}(\mathrm{H})$ *avec* $\mathrm{F}^2=1$ *et* $[\mathrm{F}, \pi(a)] \in \mathscr{K}(\mathrm{H})$ *pour tout* $a \in \mathscr{A}$. (*b*) *Un module de Fredholm pair sur* $\mathscr{A}$ *est donné par un couple* (H, F) *comme dans* (*a*) *et d'une* $\mathbf{Z}/2$*-graduation* [1] *de* H *telle que* $\varepsilon \mathrm{F} = -\mathrm{F}\varepsilon$ *et* $\varepsilon\,\pi(a) = \pi(a)\,\varepsilon$ *pour tout* $a \in \mathscr{A}$.

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on désigne par $\mathscr{L}^p(\mathrm{H})$ l'idéal de Schatten de $\mathscr{L}(\mathrm{H})$, c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs T tels que $\mathrm{Trace}(|\mathrm{T}|^p) < +\infty$.

Définition 2. — *Un module de Fredholm* (H, F) *est dit p-sommable si, pour tout* $a \in \mathscr{A}$, $[\mathrm{F}, \pi(a)] \in \mathscr{L}^p(\mathrm{H})$.

Pour tout nombre entier p positif ou nul, on désigne par $\mathscr{E}ll^p(\mathscr{A})$ l'ensemble des classes d'isomorphie de modules de Fredholm (H, F) sur $\mathscr{A}$ tels que : (i) H est un espace hilbertien à base dénombrable; (ii) (H, F) a la même parité que p; (iii) (H, F) est $(p+1)$-sommable.

Muni de l'opération de somme directe, $\mathscr{E}ll^p(\mathscr{A})$ est un semi-groupe commutatif. Soit $(\mathrm{H}, \mathrm{F})^-$ l'élément de $\mathscr{E}ll^p(\mathscr{A})$ obtenu en changeant F en $(-1)^p\mathrm{F}$ et ε en $-\varepsilon$ (si p est pair).

Proposition 3. — (*a*) *Le quotient de* $\mathscr{E}ll^p(\mathscr{A})$ *par le semi-groupe* $\{x+x^-,\ x \in \mathscr{E}ll^p(\mathscr{A})\}$ *est un groupe commutatif noté* $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A})$. (*b*) *L'inclusion de* $\mathscr{E}ll^p(\mathscr{A})$ *dans* $\mathscr{E}ll^{p+2}(\mathscr{A})$ *induit un homomorphisme* $\mathrm{S}: \mathrm{Ell}^p(\mathscr{A}) \to \mathrm{Ell}^{p+2}(\mathscr{A})$.

Soit H_0 l'espace hilbertien $l^2(\mathbf{N})$. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, nous allons définir l'algèbre $\mathscr{M}^p$ suivante : *si p est pair,* $\mathscr{M}^p = \{(x, y) \in \mathscr{L}(\mathrm{H}_0) \times \mathscr{L}(\mathrm{H}_0)$ avec $x-y \in \mathscr{L}^{p+1}(\mathrm{H}_0)\}$; *si p est impair,* $\mathscr{M}^p$ est la sous-algèbre des matrices 2×2 sur l'anneau $\mathscr{L}(\mathrm{H}_0)$ formée des matrices $a=(a_{ij})$ telles que $a_{ij} \in \mathscr{L}^{p+1}(\mathrm{H}_0)$ si $i \neq j$.

Soit $(\mathrm{H}, \mathrm{F})_p$ l'élément de $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{M}^p)$ obtenu en posant $\mathrm{H}=\mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_0$ avec l'action évidente de $\mathscr{M}^p$ et les opérateurs F et ε suivants : *si p est pair* $\mathrm{F}_{11}=\mathrm{F}_{22}=0$, $\mathrm{F}_{12}=\mathrm{F}_{21}=1$, $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=0$, $\varepsilon_{11}=-\varepsilon_{22}=1$; *si p est impair* $\mathrm{F}_{12}=\mathrm{F}_{21}=0$, $\mathrm{F}_{11}=-\mathrm{F}_{22}=1$. On a alors la

0249-6321/84/02990963 $ 2.00

proposition évidente suivante :

PROPOSITION 4. — *(a)* Ell^p *est un foncteur contravariant de la catégorie des* **C**-*algèbres dans celle des groupes commutatifs. (b) Pour tout* $x \in \mathrm{Ell}^p(\mathscr{A})$, *il existe un homomorphisme d'algèbres* $\rho: \mathscr{A} \to \mathscr{M}^p$ *tel que* $x = \rho^*((\mathrm{H}, \mathrm{F})_p)$.

II. K-THÉORIE TOPOLOGIQUE ET COHOMOLOGIE CYCLIQUE DES ALGÈBRES DE BANACH $\mathscr{M}^p$. — Pour tout $q \in [1, +\infty[$, on note $\| \ \|_q$ la norme canonique sur $\mathscr{L}^q(\mathrm{H})$. On peut alors munir les algèbres $\mathscr{M}^p$ des normes suivantes qui en font des algèbres de Banach :

$$\| x \| = \| x \|_\infty + \| [\mathrm{F}, x] \|_{p+1},$$

où $\| x \|_\infty$ désigne la norme usuelle des opérateurs dans $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_0$. De plus, d'après [7], $\mathscr{M}^p$ est une sous-algèbre stable par calcul fonctionnel holomorphe dans la C*-algèbre $\mathscr{M}_j$, $j=0$ ou 1 avec $j \equiv p \pmod 2$, qui est l'adhérence de $\mathscr{M}^p$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{H})$. Du théorème de périodicité de Bott [11], p. 175 et du théorème de densité ([11], p. 109), on déduit alors la proposition suivante.

PROPOSITION 5. — *Les groupes* $\mathrm{K}_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{M}^p)$ *sont isomorphes à* **Z** *si* $n \equiv p \pmod 2$ *et sont égaux à* 0 *si* $n \equiv p+1 \pmod 2$.

L'homologie et la cohomologie cycliques des algèbres de Banach $\mathscr{M}^p$ sont moins connues [7]. Cependant, on peut définir des éléments remarquables non triviaux τ_p de $\mathrm{HC}^p(\mathscr{M}^p)$ par les formules suivantes [7]. *Si p est pair :*

$$\tau_p((x^0, y^0), (x^1, y^1), \ldots, (x^p, y^p)) = c_p \operatorname{Trace}((x^0 - y^0).(x^1 - y^1) \ldots (x^p - y^p)),$$

avec $c_p = (p/2)!$. *Si p est impair :*

$$\tau_p(a^0, a^1, \ldots, a^p) = c_p \operatorname{Trace} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^0 \\ a_{21}^0 & 0 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^p \\ a_{21}^p & 0 \end{pmatrix},$$

avec :

$$c_p = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - 1\right) \ldots \frac{1}{2}.$$

On remarquera que le « caractère de Chern topologique » défini dans [8] et [14] :

$$\mathbf{Z} \approx \mathrm{K}_p^{\mathrm{top}}(\mathscr{M}^p) \to \mathrm{HC}_p(\mathscr{M}^p) \xrightarrow{\tau_p} \mathbf{C},$$

a comme image le sous-groupe $r_p \mathbf{Z}$ où $r_p = (2i\pi)^{[p/2]}$ avec les constantes de normalisation c_p choisies [3].

III. DÉFINITION DES GROUPES DE K-THÉORIE RELATIVE $\mathrm{K}_n^{\mathrm{rel}}(\mathrm{A})$ ET DES HOMOMORPHISMES $\mathrm{K}_n^{\mathrm{rel}}(\mathrm{A}) \to \mathrm{HC}_{n-1}(\mathrm{A})$ *(voir aussi* IV). — Si A est une algèbre topologique localement convexe, nous suivrons [14] en définissant $\mathrm{K}_n^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})$ pour $n > 0$ comme le n-ième groupe d'homotopie de l'ensemble simplicial $\mathrm{BGL}(\mathrm{A}_*)$ où A_* est l'anneau simplicial défini par $\mathrm{A}_n = \mathrm{A} \hat{\otimes} \mathrm{C}^\infty(\Delta^n)$, Δ^n étant le n-simplexe standard. En particulier, $\mathrm{K}_n^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})$ est le groupe de K-théorie topologique usuel si A est une algèbre de Banach, ce que nous supposerons désormais. Nous définirons le groupe de « K-théorie relative » $\mathrm{K}_n^{\mathrm{rel}}(\mathrm{A})$ comme le n-ième groupe d'homotopie de la fibre homotopique $\mathscr{F}_\mathrm{A}$ de l'application évidente :

$$\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ = \mathrm{BGL}(\mathrm{A}_0)^+ \to \mathrm{BGL}(\mathrm{A}_*)^+ \sim \mathrm{BGL}(\mathrm{A}_*).$$

On a donc une suite exacte fondamentale :

$$\mathrm{K}_{n+1}(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_{n+1}^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_n^{\mathrm{rel}}(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_n(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_n^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}),$$

où $K_*(A)$ représente la K-théorie algébrique de Quillen. En fait, il est facile de voir que l'espace $\mathscr{F}_A$ est homotopiquement équivalent à $\mathrm{Bgl}(A)^+$ où $\mathrm{Bgl}(A)$ est la fibre homotopique de l'application $\mathrm{BGL}(A_0) \to \mathrm{BGL}(A_*)$, fibre qui s'identifie au quotient $\mathrm{GL}(A_*)/\mathrm{GL}(A_0)$ du groupe simplicial $\mathrm{GL}(A_*)$ par le groupe simplicial trivial $\mathrm{GL}(A)$ (*cf.* [17] pour une discussion analogue et une justification de la notation $\mathrm{Bgl}(A)$). Ainsi un n-simplexe de $\mathrm{Bgl}(A)$ est simplement défini par une application C^∞ $\sigma : \Delta^n \to \mathrm{GL}(A)$ bien définie modulo la multiplication à droite par un élément de $\mathrm{GL}(A)$. Sur cet ensemble simplicial il existe un $\mathrm{GL}(A_0)$-fibré canonique induit par l'application $\mathrm{GL}(A_*)/\mathrm{GL}(A_0) \to \mathrm{BGL}(A_0)$: ses fonctions de transition $g_{ji}(\sigma)$ dans le sens de [14] sont définies par $g_{ji}(\sigma) = \sigma(j)\,\sigma(i)^{-1}$. Considéré comme $\mathrm{GL}(A_*)$-fibré par extension du groupe structural, ce fibré se trivialise de manière explicite en posant $\alpha_i(\sigma) = \sigma \,.\, \sigma(i)^{-1}$, soit $g_{ji} = \alpha_j^{-1} \,.\, \alpha_i$. Si $\alpha : E \to T$ désigne la trivialisation, la méthode décrite dans [12] et [14] permet d'associer au triplet $x = (E, T, \alpha)$ un « caractère de Chern relatif » $\mathrm{Ch}_n^{\mathrm{rel}}(x) \in H^n(\mathrm{Bgl}(A); C_{n-1}^\lambda(A)/b(C_n^\lambda(A))$ avec les notations de [8] et [16]. En utilisant l'homomorphisme de Hurewicz, on en déduit un homomorphisme :

$$\mathrm{Ch}_n^{\mathrm{rel}} : \quad K_n^{\mathrm{rel}}(A) \to C_{n-1}^\lambda(A)/b(C_n^\lambda(A)),$$

dont on peut montrer qu'il coïncide avec celui défini dans [14], l'espace $\mathrm{Bgl}(A)$ jouant le rôle « d'espace classifiant » pour la K-théorie relative. Des définitions et résultats de [8] et [14] il est facile de déduire les deux théorèmes suivants (où $\gamma_n = 1/n!$).

Théorème 6. — *L'image de l'homomorphisme* $\mathrm{Ch}_n^{\mathrm{rel}}$ *est contenue dans le sous-groupe* $H_{n-1}^\lambda(A) = \mathrm{HC}_{n-1}(A) \subset C_{n-1}^\lambda(A)/b(C_n^\lambda(A))$.

Théorème 7. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
K_{n+1}^{\mathrm{top}}(A) & \to & K_n^{\mathrm{rel}}(A) & \to & K_n(A) & \to & K_n^{\mathrm{top}}(A) & \to & K_{n-1}^{\mathrm{rel}}(A) \\
{\scriptstyle \mathrm{Ch}_{n+1}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{Ch}_n^{\mathrm{rel}}}\downarrow & & {\scriptstyle \gamma_n D_n}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{Ch}_n}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{Ch}_{n-1}^{\mathrm{rel}}}\downarrow \\
\mathrm{HC}_{n+1}(A) & \xrightarrow{S} & \mathrm{HC}_{n-1}(A) & \xrightarrow{(1/n)\,B} & H_n(A, A) & \xrightarrow{I} & \mathrm{HC}_n(A) & \xrightarrow{S} & \mathrm{HC}_{n-2}(A).
\end{array}$$

Examinons de plus près la définition du caractère de Chern relatif sur l'espace $\mathrm{Bgl}(A)$ de manière à assurer la transition vers le paragraphe suivant et donner une formule plus maniable. On considère sur le fibré E la « connexion canonique » définie en fonction des coordonnées barycentriques x_k par la formule utilisée dans [12] et où i représente un sommet du simplexe σ :

$$\Gamma_i(\sigma) = \sum_k x_k\, g_{ki}^{-1}\, dg_{ki}.$$

Cette connexion, transportée sur le fibré trivial T par l'isomorphisme α, est égale à :

$$\alpha_i \Gamma_i \alpha_i^{-1} + \alpha_i\, d\,(\alpha_i^{-1}) = -\sum x_k\, d\alpha_k \,.\, \alpha_k^{-1}$$

(expression notée Γ qui, comme on s'y attend, ne dépend pas de i). Ici $d = d' + d''$ où d' est la différentielle usuelle des formes différentielles sur l'ensemble simplicial $\mathrm{Bgl}(A)$ [6] et où d'' est la différentielle « non commutative » sur le complexe $\Omega_*(A^+)$, A^+ désignant l'algèbre A augmentée d'un élément unité ([8], [13]). En considérant l'homotopie $t\Gamma$ entre Γ et la connexion triviale, la formule explicite pour $\mathrm{Ch}_n^{\mathrm{rel}}(x)$ est la classe du cocycle :

$$\sigma \mapsto \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{Trace} \int_\sigma \int_0^1 dt \wedge \Gamma\,(t\,d\Gamma + t^2\,\Gamma^2)^{n-1}.$$

On a $\Gamma = -\Gamma' + \Gamma''$ avec $\Gamma' = d'\alpha_k . \alpha_k^{-1}$ (qui est indépendant de k et qu'on peut noter aussi $d'\sigma . \sigma^{-1}$) et $\Gamma'' = -\sum x_k d''\alpha_k . \alpha_k^{-1}$. On ne change pas alors la classe de cohomologie précédente en remplaçant Γ par $-\Gamma'$ dans l'intégrale ci-dessus (faire l'homotopie $-\Gamma' + u\Gamma''$, $u \in [0, 1]$). On en déduit que $\mathrm{Ch}_n(x)$ est aussi la classe du cocycle suivant d'expression plus simple :

$$\sigma \mapsto \frac{(-1)^n}{n!} \operatorname{Trace} \int_\sigma \Gamma' (d''\Gamma')^{n-1}.$$

IV. Interprétation des classes caractéristiques relatives en termes de cohomologie d'algèbres de Lie. — Le but de ce paragraphe est de donner une définition plus géométrique de l'accouplement $K_n^{\mathrm{rel}}(A) \times H_\lambda^{n-1}(A) \to \mathbf{C}$ qu'on déduit de III (*cf.* le théorème 9 ci-dessous qu'on appliquera à une sphère homologique M en interprétant la K-théorie relative en termes de A-fibrés plats sur M munis d'une trivialisation différentiable [12]). Soit donc $\tau \in Z_\lambda^{n-1}(A)$ un $(n-1)$-cocycle cyclique continu [2]. En suivant [16], § 6, on en déduit une forme différentielle fermée ω_τ, invariante à droite sur le groupe de Lie-Banach $GL_q(A)$, $q \in \mathbf{N}$, en posant :

$$\omega_\tau((a, X^1), \ldots, (a, X^n)) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum \operatorname{sgn}(s)\, (\tau \otimes \mathrm{Tr})\, (X^{s_1} a^{-1}, X^{s_2} a^{-1}, \ldots, X^{s_n} a^{-1}).$$

Ici s parcourt le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, (a, X) désigne pour $a \in GL_q(A)$, $X \in M_q(A)$, le vecteur tangent en $\varepsilon = 0$ à la courbe $\varepsilon \mapsto a + \varepsilon X$, et $\tau \otimes \mathrm{Tr}$ désigne l'élément de $Z_\lambda^{n-1}(M_q(A))$ produit tensoriel de τ par la trace canonique Tr sur $M_q(\mathbf{C})$.

Remarque. — Un calcul simple montre que ω_τ est aussi :

$$\frac{(-1)^n}{n!} (\tau \otimes \mathrm{Tr})\, (\theta (d''\theta)^{n-1}),$$

où $\theta = d'a . a^{-1}$ est la « forme de Maurer-Cartan » sur $GL_q(A)$ avec des notations évidentes. Cette remarque est essentielle pour montrer que les deux interprétations des classes caractéristiques relatives coïncident.

Si M est une variété de classe C^∞, tout courant fermé C à support compact et de dimension n définit un n-cocycle cyclique $\tilde{C}$ sur l'algèbre $C^\infty(M)$ par l'égalité :

$$\tilde{C}(f^0, f^1, \ldots, f^n) = \langle C, f^0 df^1 \wedge \ldots \wedge df^n \rangle \qquad \text{pour} \quad f^i \in C^\infty(M).$$

Théorème 8. — *Soit* $\alpha : M \to GL_q(A)$ *une application de classe* C^∞ *et soit* $\tilde{C} \# \tau$ *le produit tensoriel de* $\tilde{C}$ *par* τ [8] *comme cocycle cyclique sur* $C^\infty(M) \hat{\otimes} A$. *Alors :*

(*a*) *On a l'identité* $\langle [C], \alpha^* \omega_\tau \rangle = \langle \tilde{C} \# \tau, [\alpha] \rangle$ *où* $[\alpha] \in K_1^{\mathrm{top}}(C^\infty(M) \hat{\otimes} A)$ *est la classe de* $\alpha \in GL_q(C^\infty(M) \hat{\otimes} A)$ *et où l'accouplement entre* HC^* *et* K_*^{top} *est défini dans* [8].

(*b*) *Si la classe d'homologie* [C] *de* $H_n(M)$ *appartient à l'image de l'homomorphisme de Hurewicz* $\pi_n(M^+) \to H_n(M^+) \approx H_n(M)$ [10], *on a* $\langle [C], \alpha^* \omega_\tau \rangle \in 2 i \pi \langle \tau, K_{n-1}^{\mathrm{top}}(A) \rangle$.

La partie (*a*) se démontre en utilisant l'homotopie $-\Gamma' + u\Gamma''$ du paragraphe III. La partie (*b*) résulte de (*a*), de la périodicité de Bott et de la multiplicativité du caractère de Chern topologique.

Soit maintenant E un fibré plat de A-modules à droite, de fibre A^q, sur la variété M. Il lui correspond un homomorphisme ρ de $\Gamma = \pi_1(M)$ dans $GL_q(A)$. Le A-module $C^\infty(M, E)$ des sections de E s'identifie au A-module des applications $\xi : \tilde{M} \to A^q$, où $\tilde{M}$ est le revêtement universel sur lequel on fait agir Γ librement à droite, telles que $\xi(xg) = \rho(g)^{-1} \xi(x)$, $x \in \tilde{M}$, $g \in \Gamma$. De même, une trivialisation $\alpha : E \to M \times A^q$ correspond à une application $\tilde{\alpha}: \tilde{M} \to GL_q(A)$ telle que $\tilde{\alpha}(xg) = \tilde{\alpha}(x)\rho(g)$. Le théorème suivant est alors une conséquence directe du théorème 8.

THÉORÈME 9. — *Soit* $\alpha^* \omega_\tau$ *la forme différentielle sur* M *associée à la forme différentielle* Γ*-invariante* $\tilde{\alpha}^* \omega_\tau$ *sur* $\tilde{M}$ *et soit* $c \in H_n(M)$ *une classe d'homologie appartenant à l'image de l'homomorphisme de Hurewicz. Alors, l'image de* $\langle c, \alpha^* \omega_\tau \rangle$ *dans le quotient de* **C** *par le sous-groupe* $2 i \pi \langle \tau, K_{n-1}^{top}(A) \rangle$ *est indépendante du choix de la trivialisation* α.

V. DÉFINITION DE L'ACCOUPLEMENT $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A}) \times K_{p+1}(\mathscr{A}) \to \mathbf{C}^*$. — Nous allons tout d'abord définir un homomorphisme $K_{p+1}(\mathscr{M}^p) \to \mathbf{C}^*$. Cette définition est basée sur le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
K_{p+2}^{top}(\mathscr{M}^p) & \to & K_{p+1}^{rel}(\mathscr{M}^p) & \longrightarrow & K_{p+1}(\mathscr{M}^p) & \to & K_{p+1}^{top}(\mathscr{M}^p)=0 \\
\downarrow {\scriptstyle u=\mathrm{Ch}_{p+2}} & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{Ch}_{p+1}^{rel}} & & \downarrow & & \\
HC_{p+2}(\mathscr{M}^p) & \xrightarrow{S} & HC_p(\mathscr{M}^p) & \xrightarrow{\tau_p} & \mathbf{C}. & &
\end{array}$$

En effet, d'après le paragraphe II, $K_{p+2}^{top}(\mathscr{M}^p) \approx \mathbf{Z}$ et $(\tau_p . S . u)(\mathbf{Z}) = r_{p+2}\mathbf{Z}$ avec $r_{p+2} = (2 i \pi)^{[p/2]+1}$. D'après le paragraphe III, on en déduit aussitôt l'homomorphisme $K_{p+1}(\mathscr{M}^p) \to \mathbf{C}/r_{p+2}\mathbf{Z} \approx \mathbf{C}^*$. Nous pouvons aussi raisonner plus géométriquement comme dans le paragraphe IV : un élément de $K_{p+1}(\mathscr{M}^p)$ peut être représenté par un A-fibré plat sur une n-sphère homologique M ($n = p+1$, $A = \mathscr{M}^p$) de classe fondamentale $c \in H_n(M)$ [10]. Puisque $K_n^{top}(A) = 0$, ce fibré plat est stablement et différentiablement trivial. Le choix d'une trivialisation α de E (supposé stabilisé) permet de définir un nombre complexe $\langle c, \alpha^* \omega_\tau \rangle$ bien défini modulo $r_{p+2}\mathbf{Z}$ d'après le théorème 9 (*cf.* la remarque à la fin du paragraphe II).

D'autre part, il résulte de la définition de τ_p que l'involution de $\mathscr{M}^p$ définie par $(x, y) \mapsto (y, x)$ si p est pair et $u \mapsto F . u . F^{-1}$ si p est impair, change le signe de τ_p. Puisque tout élément de $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A})$ est une combinaison linéaire de représentations $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{M}^p$, il en résulte que l'accouplement cherché est bien défini d'après la proposition 4.

VI. LES CAS $p=0$ ET $p=1$. — Soit A une algèbre de Banach quelconque. On a $K_1^{rel}(A) \approx H_1(GL(A_*)/GL(A))$ avec les notations du paragraphe III. Pour toute cellule σ de dimension 1 de $GL(A_*)/GL(A)$, on a $\mathrm{Ch}_1^{rel}(\sigma) = \mathrm{Tr} \int_0^1 d'\sigma . \sigma^{-1}$, où $\sigma(t)$, $t \in [0, 1]$, est un chemin dans GL(A). Pour $n=1$ on démontre ainsi de manière élémentaire le diagramme commutatif du théorème 7 :

$$\begin{array}{ccccccccc}
K_2(A) \to & K_2^{top}(A) & \to & K_1^{rel}(A) & \xrightarrow{u} & K_1(A) & \xrightarrow{v} & K_1^{top}(A) & \\
& \downarrow {\scriptstyle \mathrm{Ch}_2} & \searrow^{w} & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{Ch}_1^{rel}} & & \downarrow & & / & \\
\to & HC_2(A) & \xrightarrow{S} & HC_0(A) & \xrightarrow{B} & H_1(A, A) & \to & &
\end{array}$$

L'application u est induite par $\sigma \mapsto \sigma(0)^{-1}\sigma(1)$ et l'application w: $K_0(A) \approx K_2^{top}(A) \to HC_0(A)$ est induite par $e \mapsto 2 i \pi\, \mathrm{Trace}(e)$ où e est un idempotent représentant un élément de $K_0(A)$. La classe caractéristique « secondaire » obtenue $\mathrm{Ker}(v) \to HC_0(A)/\mathrm{Im}(w)$ coïncide avec celle construite indépendamment dans [9] et évoquée dans [14]. Étudions maintenant le cas particulier où $A = \mathscr{M}_0$.

THÉORÈME 10. — *L'homomorphisme* $K_1(\mathscr{M}^0) \to \mathbf{C}^*$ *défini dans le paragraphe précédent coïncide avec le déterminant de Fredholm* $(x, y) \mapsto \mathrm{dét}(x^{-1} y)$.

Démonstration. — Puisque $K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{M}^0)=0$ et que $K_1(\mathscr{L}(H))=0$, tout élément de $K_1(\mathscr{M}^0)$ est la classe d'un couple $(1, y)$ avec $y \in GL(\mathscr{L}_1)$ homotope à 1 dans ce groupe. Soit $\sigma_1(t)$ une homotopie différentiable dans $GL(\mathscr{L}_1)$ telle que $\sigma_1(0)=1$ et $\sigma_1(1)=y$. On a alors $\mathrm{Tr}(d'\sigma_1 . \sigma_1^{-1})=[\mathrm{Tr}\,\sigma_1(t)^{-1} . \sigma_1'(t)]\,dt$ dont la primitive est $\mathrm{Log}(\det(\sigma_1(t)))$. Par suite, l'intégrale qui définit $\mathrm{Ch}_1^{\mathrm{rel}}(\sigma)$ est égale à une détermination de $\mathrm{Log}(\det(y))$, d'où le théorème.

Examinons maintenant le cas où $p=1$, qui est plus délicat. Rappelons que $\mathscr{M}^1$ est l'algèbre des matrices 2×2 notées a telles que a_{11}, $a_{22}\in\mathscr{L}(H)$ et a_{12}, $a_{21}\in\mathscr{L}^2(H)$. Soit $\mathscr{T}^1$ l'algèbre formée des couples (a, x) avec $a\in\mathscr{M}^1$, $x\in\mathscr{L}(H)$ et $a_{11}-x\in\mathscr{L}^1(H)$. C'est une algèbre de Banach pour la norme $\|(a, x)\| = \|a\|_{\mathscr{M}^1}+\|a_{11}-x\|_{\mathscr{L}^1}$ et on a une suite exacte d'algèbres de Banach :

$$\text{(E)} \qquad 0\to\mathscr{L}^1\to\mathscr{T}^1\to\mathscr{M}^1\to 0.$$

L'image de $GL(\mathscr{T}^1)$ dans $GL(\mathscr{M}^1)$ est la composante neutre $SL(\mathscr{M}^1)$ qui est un sous-groupe parfait [noter que $K_1(\mathscr{M}^1)\approx K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{M}^1)\approx\mathbf{Z}$]. On obtient alors l'extension centrale de $SL(\mathscr{M}^1)$ par $\mathbf{C}^*$ [18] :

$$\text{(GE)} \qquad 1\to\mathbf{C}^*\to\Gamma\to SL(\mathscr{M}^1)\to 1,$$

en appliquant le foncteur GL à la suite exacte (E) et en quotientant les deux premiers groupes par le sous-groupe $SL(\mathscr{L}^1)$ formé des éléments de $GL(\mathscr{L}^1(H))$ de déterminant égal à 1. On obtient l'extension centrale de $SL(C^\infty(S^1))$ par $\mathbf{C}^*$ en envoyant $C^\infty(S^1)$ dans $\mathscr{M}^1$ par l'homomorphisme décrit dans [18].

THÉORÈME 11. — *L'homomorphisme* $K_2(\mathscr{M}^1)\to\mathbf{C}^*$ *défini dans le paragraphe précédent coïncide avec l'homomorphisme* $H_2(SL(\mathscr{M}^1))=K_2(\mathscr{M}^1)\to\mathbf{C}^*$ *associé à l'extension centrale précédente* (GE) [*noter que* $H^2(SL(\mathscr{M}^1);\mathbf{C}^*)\approx\mathrm{Hom}(H_2(SL(\mathscr{M}^1));\mathbf{C}^*)$, *car* $H_1(SL(\mathscr{M}^1))=0$].

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Une $\mathbf{Z}/2$-graduation sur un espace hilbertien H est la donnée d'une décomposition de H en somme directe $H^+\oplus H^-$, i. e. d'un opérateur ε de carré 1 avec $H^+=\mathrm{Ker}(\varepsilon-1)$ et $H^-=\mathrm{Ker}(\varepsilon+1)$.

[2] L'homologie et la cohomologie cyclique des algèbres topologiques localement convexes doivent être comprises ici dans leur contexte topologique (*cf.* [8], § 5). En outre, l'homologie cyclique doit être prise séparée (quotient des cycles par l'adhérence des bords). Enfin, on utilisera indifféremment les notations $H_n^\lambda=HC_n$ et $H_\lambda^n=HC^n$.

[3] Pour mettre en accord les classes caractéristiques en K-théorie algébrique et topologique, on définira l'homomorphisme $S: HC_*\to HC_{*-2}$ ou $HC^*\to HC^{*+2}$ sur les cycles par la formule de [8], p. 19 sans le facteur $2i\pi$.

[4] M. F. ATIYAH, Global Theory of Elliptic Operators, *Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics*, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970.

[5] L. G. BROWN, R. G. DOUGLAS et P. A. FILLMORE, *Ann. of Math.*, (2), 105, 1977, p. 265-324.

[6] H. CARTAN, *Invent. Math.*, 35, 1976, p. 261-271.

[7] A. CONNES, *Non Commutative Differential Geometry*, Part I, Prépublication I.H.E.S., 1982.

[8] A. CONNES, *Idem*, Part II, Prépublication I.H.E.S., 1983.

[9] P. DE LA HARPE et G. SKANDALIS (à paraître).

[10] J. C. HAUSMANN et D. HUSEMOLLER, *L'enseignement mathématique*, XXV, 1979, p. 53-75.

[11] M. KAROUBI, K-*Theory. An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[12] M. KAROUBI, *Canad. Math. Soc. Proc.*, 2, Part I, 1982, p. 19-27.

[13] M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 381-384.

[14] M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 557-560.

[15] G. G. KASPAROV, *Math. U.S.S.R. Izv.*, 16, 1981, p. 513-572.

[16] J.-L. LODAY et D. QUILLEN, Cyclic Homology and the Lie Algebra Homology of Matrices (à paraître).

[17] J. MILNOR, *Comm. Math. Helv.*, 58, 1983, p. 72-85.

[18] G. SEGAL et G. WILSON, Loop Groups and Equations of KdV Type (à paraître).

Institut des Hautes Études Scientifiques, 91440 *Bures-sur-Yvette;*
Université Paris-VII, U.E.R. de Mathématiques,
2, *place Jussieu*, 75251 *Paris Cedex* 05.