43 a)

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *K-théorie multiplicative.* Note de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Soit X une variété différentiable munie d'une filtration de son complexe de De Rham. Nous lui associons ici une « K-théorie multiplicative » $\mathscr{K}(X)$, réceptacle de classes caractéristiques primaires et secondaires de fibrés vectoriels munis de structures géométriques attachées à la filtration. Plus généralement, nous définissons un espace $\mathscr{K}_X$ dont les groupes d'homotopie $\mathscr{K}_n(X)$ [avec $\mathscr{K}_0(X) \approx \mathscr{K}(X)$] sont reliés aux groupes de K-théorie algébrique et topologique de Grothendieck, Atiyah-Hirzebruch et Quillen.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — Multiplicative K-theory.

Let X be a differential manifold with a filtration of its De Rham complex. We associate to it a "multiplicative K-theory" $\mathscr{K}(X)$ which is a target for primary and secondary characteristic classes for vector bundles with geometric structures linked to the filtration. More generally, we define a space $\mathscr{K}_X$ which homotopy groups $\mathscr{K}_n(X)$ [with $\mathscr{K}_0(X) \approx \mathscr{K}(X)$] are related to the algebraic and topological K-theory groups of Grothendieck, Atiyah-Hirzebruch and Quillen.

I. Définition de la K-théorie multiplicative. — Soit X une variété différentiable ayant un nombre fini de composantes connexes et soit $F^r = F^r(\Omega^*(X))$ une filtration décroissante de son complexe de De Rham. On suppose ici que les formes différentielles sont à coefficients réels ou complexes, que $d(F^r) \subset F^r$ et enfin que $F^0 = \Omega^*(X)$. Soit maintenant E un fibré vectoriel de base X défini par des fonctions de transition

$$g_{ji}: \quad U_i \cap U_j \to GL_n(k) \qquad (k = \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C}),$$

(U_i) étant un recouvrement ouvert trivialisant de E. Rappelons qu'une connexion D sur E est définie par des matrices Γ_i de formes différentielles sur U_i telles que :

$$\Gamma_i = g_{ji}^{-1} \Gamma_j g_{ji} + g_{ji}^{-1} dg_{ji} \quad \text{sur } U_i \cap U_j$$

que sa courbure est définie par les matrices $R_i = d\Gamma_i + \Gamma_i^2$ et qu'on a :

$$R_i = g_{ji}^{-1} R_j g_{ji}.$$

Le caractère de Chern $Ch_r(E, D)$ de E muni de la connexion D est défini localement par $(1/r!)\,\mathrm{Trace}(R_i^r)$ avec les conventions de [5].

En outre, si D^0 et D^1 sont deux connexions sur E, $Ch_r(D^1) - Ch_r(D^0)$ est la différentielle d'une forme *canonique* $\theta_r(D^0, D^1)$ définie par :

$$\theta_r(D^0, D^1) = \int_{t=0}^{1} Ch_r(D^t),$$

où $D^t = (1-t)\,D^0 + t\,D^1$.

Définition. — *Un fibré multiplicatif attaché à la filtration* F^r *est un triple* $\xi = (E, D, \omega)$ *où* E *est un fibré vectoriel,* D *une connexion sur* E *et :*

$$\omega = \sum \omega_r \qquad \textit{où} \quad \omega_r \in \Omega^{2r-1}(X)$$

telle que :

$$Ch_r(D) \equiv d\omega_r \quad \text{mod. } F^r(\Omega^{2r}(X)) + B^{2r}(X)$$

[$B^*(X)$ *désignant l'ensemble des formes différentielles exactes*].

0249-6291/86/03020321 $ 2.00 © Académie des Sciences

Deux fibrés multiplicatifs

$$\xi^0=(E^0, D^0, \omega^0) \qquad et \qquad \xi^1=(E^1, D^1, \omega^1),$$

sont dits équivalents s'il existe un isomorphisme $\alpha : E^0 \to E^1$ *tel que :*

$$\omega_r^1-\omega_r^0 \equiv \theta_r(D^0, \alpha^* D^1) \bmod. B^{2r-1}(X).$$

L'ensemble des classes d'équivalence de fibrés multiplicatifs forme un monoïde abélien pour la somme de Whitney des fibrés. On notera $\mathscr{K}(X)$ son groupe symétrisé. Si $K^{top}(X)$ désigne le groupe de Grothendieck-Atiyah-Hirzebruch construit à l'aide du monoïde des classes d'isomorphie de fibrés différentiables, on a un homomorphisme d'oubli évident u de $\mathscr{K}(X)$ vers $K^{top}(X)$.

THÉORÈME. — *On a une suite exacte :*

$$K_1^{top}(X) \xrightarrow{\sigma_1} \bigoplus_r H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) \xrightarrow{\partial} \mathscr{K}(X) \xrightarrow{u} K^{top}(X) \xrightarrow{\sigma} \bigoplus_r H^{2r}(\Omega^*(X)/F^r).$$

Dans cette suite exacte, σ est induit par le caractère de Chern usuel, $K_1^{top}(X)$ est le groupe formé des classes d'homotopie d'applications différentiables de X dans $GL(k)$. Si $\alpha : X \to GL(k)$, $\sigma_1(\alpha)$ est la classe de la forme différentielle $c_r \operatorname{Trace}(\alpha^{-1} d\alpha)^{2r-1}$ où c_r est la constante rationnelle $(r-1)!/(2r-1)!$

II. DÉFINITION DES CLASSES CARACTÉRISTIQUES. — Dans ce paragraphe on suppose que la filtration satisfait à la condition supplémentaire $F^r F^s \subset F^{r+s}$. Un fibré vectoriel est alors dit attaché à la filtration s'il est défini par des fonctions de transition g_{ji} dont les différentielles dg_{ji} ont leurs coefficients dans F^1. Si E et E′ sont deux tels fibrés, un morphisme $\alpha : E \to E'$ est défini par des matrices (α_i) telles que $g'_{ji}\alpha_i=\alpha_j g_{ji}$ avec des notations évidentes et $d\alpha_i \in F^1$. On vérifie aisément qu'on a bien défini ainsi une sous-catégorie $\mathscr{C}$ de la catégorie des fibrés vectoriels.

Exemples. — Si $F^r=0$ pour $r>0$, la catégorie $\mathscr{C}$ est équivalente à celle des fibrés plats. Plus généralement, si F^r est la filtration associée à un feuilletage, $\mathscr{C}$ est équivalente à la catégorie des fibrés feuilletés.

Si X est une variété analytique et si F^r est la filtration de Hodge, $\mathscr{C}$ est équivalente à la catégorie des fibrés analytiques.

Si E est un objet de $\mathscr{C}$, une connexion D sur E sera dite compatible avec la filtration si la matrice Γ_i de la connexion appartient à F^1. Tout fibré attaché à la filtration peut être muni d'une telle connexion : il suffit de poser

$$\Gamma_i=\Sigma\, \lambda_j(x)\, g_{ji}^{-1}\, dg_{ji},$$

où (λ_j) est une partition de l'unité associée au recouvrement (U_j). On remarquera que le triple $\xi=(E, D, 0)$ définit un fibré multiplicatif en général.

THÉORÈME. — *La classe* [E] *de* ξ *dans le groupe* $\mathscr{K}(X)$ *est indépendante du choix de la connexion* D *attachée à la filtration. Si*

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

est une suite exacte dans $\mathscr{C}$, *on a la relation* $[E]=[E']+[E'']$.

III. STRUCTURE MULTIPLICATIVE DE LA K-THÉORIE MULTIPLICATIVE. — Supposons toujours que $F^r F^s \subset F^{r+s}$ et considérons deux fibrés multiplicatifs :

$$\xi=(E, D, \omega) \qquad et \qquad \xi'=(E', D', \omega').$$

Posons :

$$\operatorname{Ch} D=d\omega+\alpha \qquad et \qquad \operatorname{Ch} D'=d\omega'+\alpha'$$

où α et α' appartiennent à la filtration. On définit leur produit tensoriel $\xi''=\xi \otimes \xi'$

comme le fibré multiplicatif (E'', D'', ω'') avec :

$$E''=E\otimes E', \qquad D''=D\otimes 1+1\otimes D', \qquad \omega''=\omega\wedge d\omega'+\alpha\wedge\omega'+\omega\wedge\alpha'.$$

THÉORÈME. — *Le produit tensoriel des fibrés multiplicatifs induit une structure d'anneau commutatif sur le groupe* $\mathscr{K}(X)$.

Afin de mieux formaliser le produit ci-dessus, considérons le groupe intermédiaire $\Gamma(X)$ suivant : il est formé des couples (u, ω) où u est une somme de formes différentielles fermées de degrés pairs sur X et ω une somme de formes de degrés impairs définie mod. $B^*(X)$ telles que $u\equiv d\omega$ mod. la filtration. On peut alors définir un « cup-produit » sur $\Gamma(X)$ par la formule :

$$(u, \omega)\, u\, (u', \omega')=(u\wedge u', \omega\wedge d\omega'+\omega\wedge\alpha'+\alpha\wedge\omega').$$

On peut aussi y définir des « opérations d'Adams » ψ^k en posant :

$$\psi^k(u, \omega)=(k^n u, k^n\omega),$$

si u est de degré $2n-1$: ces opérations vérifient les relations usuelles

$$\psi^k(x+y)=\psi^k(x)+\psi^k(y), \qquad \psi^k(xy)=\psi^k(x)\,\psi^k(y)$$

et :

$$\psi^k(\psi^l(x))=\psi^{kl}(x).$$

Par des considérations purement algébriques, on en déduit une structure de λ-anneau sur le groupe $\Gamma(X)$, donc sur $\mathscr{K}(X)$, l'homomorphisme canonique $\mathscr{K}(X)\to K^{top}(X)$ étant un homomorphisme de λ-anneaux.

IV. ESPACE CLASSIFIANT DE LA K-THÉORIE MULTIPLICATIVE ET LES GROUPES $\mathscr{K}_n(X)$. — Dans ce paragraphe, on suppose que $F^r\Omega^*(X)$ est un sous-espace fermé de $\Omega^*(X)$ (donc Fréchet nucléaire), ce qui est le cas des exemples cités dans le paragraphe II.

Si Δ^s désigne le s-simplexe standard, on munit $\Omega^*(\Delta^s\times X)=\Omega^*(\Delta^s)\,\hat{\otimes}\,\Omega^*(X)$ de la filtration (notée encore F^r) définie par $\Omega^*(\Delta^s)\,\hat{\otimes}\,F^r\Omega^*(X)$. On définit $\Omega^*(\Delta^s\times X;\, F^r)$ comme le quotient de $\Omega^*(\Delta^s\times X)$ par cette filtration (ce quotient s'explicite aisément sans le recours du produit tensoriel topologique pour les exemples cités plus haut).

Enfin, on définit des groupes abéliens simpliciaux $\tilde{Z}^n_X$ et Z^n_X par les formules :

$$s\mapsto Z^n(\Delta^s\times X) \qquad \text{et} \qquad s\mapsto Z^n(\Delta^s\times X;\, F^r),$$

où les Z^n désignent les cocycles de degrés n des complexes en question.

Si on considère de même les groupes abéliens simpliciaux $\tilde{\Omega}^n_X$ et Ω^n_X définis respectivement par :

$$s\mapsto \Omega^n(\Delta^s\times X) \qquad \text{et} \qquad s\mapsto \Omega^n(\Delta^s\times X;\, F^r),$$

on peut définir des fibrations de Kan :

$$\tilde{\Omega}^{n-1}_X \xrightarrow{d} \tilde{Z}^n_X \qquad \text{et} \qquad \Omega^{n-1}_X \xrightarrow{d} Z^n_X,$$

d'espaces totaux contractiles (*cf.* [2]). Soit maintenant G_X le groupe topologique formé des applications différentiables de X dans $GL(k)$. L'espace classifiant BG_X peut être vu comme la réalisation géométrique du classifiant du groupe simplicial $s\mapsto C^\infty(\Delta^s\times X, GL(k))$. En appliquant la technique des fibrés simpliciaux repérés décrite dans [6], on peut réaliser le caractère de Chern comme une application simpliciale $BG_X\to\Pi\,\tilde{Z}^{2r}_X$. On note γ l'application composée de la précédente avec l'application canonique $\Pi\, \tilde{Z}_X^{2r} \to \Pi\, Z_X^{2r}$ et $\mathscr{K}_X$ le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{K}_X & \longrightarrow & \Pi\, \Omega_X^{2r-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z}_X \times BG_X & \xrightarrow{\gamma} & \Pi\, Z_X^{2r} \end{array}$$

où $\mathbf{Z}_X$ désigne l'ensemble discret des applications localement constantes de X dans $\mathbf{Z}$.

Définition et théorème. — *Posons* $\mathscr{K}_n(X) = \pi_n(\mathscr{K}_X)$. *Alors,* $\mathscr{K}(X) \approx \mathscr{K}_0(X)$ *et on a la suite exacte :*

$$K_{n+1}^{\mathrm{top}}(X) \to \bigoplus_r H^{2r-1-n}(\Omega^*(X)/F^r) \to \mathscr{K}_n(X) \to K_n^{\mathrm{top}}(X) \to \bigoplus_r H^{2r-n}(\Omega^*(X)/F^r).$$

Par une technique analogue, on définit un espace simplicial $\mathbf{H}_X^{2r}$ comme le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_X^{2r} & \longrightarrow & \Omega_X^{2r-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\mathbf{Z}, 2r)_X & \to & Z_X^{2r} \end{array}$$

où $K(\mathbf{Z}, 2r)_X$ désigne l'ensemble des applications de X dans l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbf{Z}, 2r)$ (ici on suppose $k = \mathbf{C}$ pour fixer les idées et la deuxième flèche horizontale du diagramme précédent est induite par l'inclusion de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$ définie par $\lambda \mapsto (2i\pi)^r \lambda$). Les groupes $\pi_n(\mathbf{H}_X^{2r})$ seront appelés *groupes de cohomologie multiplicative* de X et notés $\mathbf{H}_n^{2r}(X)$: ils s'insèrent dans des suites exactes

$$H^{2r-1-n}(X;\mathbf{Z}) \to H^{2r-n-1}(\Omega^*(X)/F^r) \to \mathbf{H}_n^{2r}(X) \to H^{2r-n}(X;\mathbf{Z}) \to H^{2r-n}(\Omega^*(X)/F^r).$$

Par des méthodes homotopiques, on peut en déduire des « classes de Chern » naturelles $\check{c}_r : \mathscr{K}_n(X) \to \mathbf{H}_n^{2r}(X)$, rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{K}_n(X) & \xrightarrow{\check{c}_r} & \mathbf{H}_n^{2r}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_n^{\mathrm{top}}(X) & \xrightarrow{c_r} & H^{2r-n}(X;\mathbf{Z}) \end{array}$$

où les c_r désignent les classes de Chern usuelles. Il serait intéressant de comparer ces classes de Chern $\check{c}_r$ à celles de Beilinson [1] et à celles de Chern-Cheeger-Simons ([3], [4]) dont elles devraient être sans doute une commune généralisation. La K-théorie multiplicative « algébrique » ou « analytique » sera explicitée dans une Note ultérieure.

Reçue le 26 décembre 1985.

Références bibliographiques

[1] A. A. Beilinson, Régulateurs supérieurs et valeurs des fonctions L, *Sovremenny Problemy Matematiki* 24, Moscou, Viniti, 1984, p. 184-238 (en russe).

[2] H. Cartan, *Invent. Math.*, 35, 1976, p. 261-271.

[3] J. Cheeger et J. Simons, *Differential characters and geometric invariants* (non publié).

[4] S. S. Chern et J. Simons, Characteristic forms and geometric invariants, *Annals of Math.*, 99, 1974, p. 48-69.

[5] M. Karoubi, Connexions, courbures et classes caractéristiques en K-théorie algébrique, *Canadian Math. Soc. Conference Proceedings*, 2, Part I, 1982, p. 19-27.

[6] M. Karoubi, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 557-560.

Université Paris-VII,
U.E.R. de Mathématiques, 2, *place Jussieu,* 75251 *Paris Cedex* 05.