

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *K*-théorie multiplicative et homologie cyclique.
Note de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Nous définissons en géométrie différentielle non commutative [1] l'analogue $\mathcal{K}_r(A)$ (pour une algèbre topologique localement convexe A) de la *K*-théorie multiplicative introduite dans une Note précédente [8]. L'homomorphisme $K_r(A) \rightarrow K_r^{top}(A)$ de la *K*-théorie algébrique de Quillen vers la *K*-théorie topologique se factorise à travers $\mathcal{K}_r(A)$.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — Multiplicative *K*-theory and cyclic homology.

In non commutative differential geometry [1] we define a group $\mathcal{K}_r(A)$ (for any locally convex algebra A) which is analogous to the multiplicative *K*-theory introduced in a previous Note [8]. The homomorphism $K_r(A) \rightarrow K_r^{top}(A)$ from the algebraic *K*-theory of Quillen to topological *K*-theory can be factorised through $\mathcal{K}_r(A)$.

I. UNE DÉFINITION DE L'HOMOLOGIE CYCLIQUE EN TERMES DE FORMES DIFFÉRENTIELLES NON COMMUTATIVES. — Considérons d'abord une *k*-algèbre A , k étant un anneau commutatif quelconque tel que k soit facteur direct dans A (en tant que k -module) et tel que $k \supset \mathbb{Q}$. Soit $\Omega_*(A)$ l'algèbre graduée universelle des formes différentielles non commutatives sur A ([1], [4], [6]). En particulier, $\Omega_n(A)$ s'identifie à $A \otimes A/k \otimes \dots \otimes A/k$ (n facteurs A/k), ses éléments s'écrivant formellement comme combinaison linéaire de « formes différentielles non commutatives » $a_0 da_1 \dots da_n$ avec la règle de calcul $d(xy) = x \cdot dy + dx \cdot y$. Soit $\check{\Omega}_*(A)$ le quotient de $\Omega_*(A)$ par le k -module $[\Omega_*(A), \Omega_*(A)]$ engendré par les commutateurs gradués. L'homologie de Hochschild $H_*(A, A)$ peut s'identifier à l'homologie du complexe

$$\dots \rightarrow \Omega_{n+1}(A) \rightarrow \Omega_n(A) \xrightarrow{b} \Omega_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

où $b(\omega \cdot dx) = (-1)^n(x\omega - \omega x)$, avec $x \in A = \Omega_0(A)$ et $\omega \in \Omega_{n-1}(A)$. Définissons $\check{\Omega}_n(A) = \bar{\Omega}_n(A)$ si $n \geq 1$ et $\check{\Omega}_0(A) = \Omega_0(A)/k$.

THÉORÈME. — L'homomorphisme canonique $H_n(A, A) \rightarrow \bar{\Omega}_n(A)$ est injectif. Pour $n \geq 1$, l'homologie en degré $n-1$ du complexe

$$0 \rightarrow \check{\Omega}_0(A) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \check{\Omega}_{n-1}(A) \xrightarrow{d} \bar{\Omega}_n(A)/H_n(A, A)$$

est isomorphe à l'homologie cyclique réduite ([1], [9]) $\overline{HC}_{n-1}(A)$.

Remarque bibliographique. — Ce théorème est l'analogie en homologie cyclique d'un théorème d'A. Connes en cohomologie cyclique (comparer avec [1], théorème 33). L'intérêt du complexe $(\check{\Omega}_*(A), d)$ en *K*-théorie algébrique (notamment pour la définition du caractère de Chern) a été montré indépendamment dans [4].

Supposons maintenant que $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et que A soit une *k*-algèbre topologique localement convexe. En remplaçant les produits tensoriels précédents par les produits tensoriels projectifs au sens de Grothendieck [3], on peut définir le complexe de De Rham topologique universel $\Omega_*^{top}(A)$ par la formule $\Omega_n^{top}(A) = A \hat{\otimes} A/k \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} A/k$. De même, $\bar{\Omega}_*^{top}(A)$ sera défini comme le quotient de $\Omega_*^{top}(A)$ par l'adhérence de $[\Omega_*^{top}(A), \Omega_*^{top}(A)]$. Dans ce cas, l'image de $d: \bar{\Omega}_*^{top}(A) \rightarrow \bar{\Omega}_*^{top}(A)$ est fermée. Le théorème précédent s'étend au cadre topologique en un sens évident : l'homologie de Hochschild topologique $H_n^{top}(A, A)$ (quotient de $\text{Ker } b$ par l'adhérence de $\text{Im } b$) est un sous-espace vectoriel de

$\bar{\Omega}_n^{\text{top}}(A)$; l'homologie en degré $n - 1$ du complexe

$$0 \rightarrow \check{\Omega}_0^{\text{top}}(A) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \check{\Omega}_{n-1}^{\text{top}}(A) \rightarrow \bar{\Omega}_n^{\text{top}}(A)/H_n^{\text{top}}(A, A)$$

est isomorphe à l'homologie cyclique réduite topologique $\overline{HC}_{n-1}^{\text{top}}(A)$ si $n \geq 1$ (avec $\check{\Omega}_n^{\text{top}} = \bar{\Omega}_n^{\text{top}}$ si $n \geq 1$ et $\check{\Omega}_0^{\text{top}} = \bar{\Omega}_0^{\text{top}}/k$).

A partir de maintenant, toutes les homologies considérées : cyclique, de Hochschild, etc. seront supposées topologiques séparées.

Pour alléger les notations, on écrira désormais $HC_n(A)$, $\Omega_n(A)$, etc. au lieu de $HC_n^{\text{top}}(A)$, $\Omega_n^{\text{top}}(A)$, etc.

II. DÉFINITION DES GROUPES DE K-THÉORIE MULTIPLICATIVE $\mathcal{K}_r(A)$. — Pour toute k -algèbre topologique localement convexe A , on peut définir les groupes de K-théorie topologique $K_r^{\text{top}}(A)$ comme les groupes d'homotopie $\pi_r(K_0(A) \times BGL(A_*))$ où A_* est l'anneau simplicial défini par $A_n = C^\infty(\Delta^n) \hat{\otimes} A$. Plus généralement, si X est un ensemble simplicial, le groupe $K_A^{\text{top}}(X)$ est l'ensemble des classes d'homotopie d'applications simpliciales de X dans l'espace de Kan $K_0(A) \times BGL(A_*)$; si $|X|$ est fini, c'est aussi le groupe de Grothendieck de la catégorie des fibrés repérés sur X [7] de fibre un A -module projectif de type fini. Si A est une algèbre de Banach, on retrouve les définitions usuelles [5]. En particulier, $K_r^{\text{top}}(A) \approx K_{r+2}^{\text{top}}(A)$ si $k = \mathbb{C}$ et $K_r^{\text{top}}(A) \approx K_{r+8}^{\text{top}}(A)$ si $k = \mathbb{R}$ (périodicité de Bott). A partir de maintenant, X désignera un ensemble simplicial tel que $|X|$ soit fini.

Considérons le complexe $\Omega_A^*(X) = \Omega^*(X; \check{\Omega}_*(A))$ déjà introduit dans [4] et [7] et constitué des formes différentielles C^∞ sur X (au sens de Sullivan) à valeurs dans $\check{\Omega}_*(A)$. Définissons une filtration sur ce complexe en posant $F^n(\Omega_A^*(X)) = \Omega^*(X; F^n(\check{\Omega}_*(A)))$ où $F^n(\check{\Omega}_*(A))$ est le sous-complexe suivant de $\check{\Omega}_*(A)$:

$$0 \rightarrow \dots \rightarrow H_n(A, A) \rightarrow \check{\Omega}_{n+1}(A) \rightarrow \check{\Omega}_{n+2}(A) \rightarrow \dots$$

$H_n(A, A)$ étant placé en degré n ($n \geq 1$). En suivant [8], on définira un « A -fibré multiplicatif d'ordre r » sur X comme un triple (E, D, ω) où E est un A -fibré repéré sur X de fibre un A -module projectif de type fini, D une A -connexion sur E ([4], [7]) et $\omega \in \Omega_A^{2r-1}(X)$ telle que $d\omega \equiv \text{Ch}_r(D) \text{ mod. } F^r = F^r(\check{\Omega}_A^*(X))$ (cf. [1], [4] et [7] pour la définition explicite du caractère de Chern Ch_r dans le contexte non commutatif).

Avec les notations de [8] on dira que deux fibrés multiplicatifs $\xi^0 = (E^0, D^0, \omega^0)$ et $\xi^1 = (E^1, D^1, \omega^1)$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme $\alpha: E^0 \rightarrow E^1$ tel que $\omega^1 - \omega^0 \equiv \Theta_r(D^0, \alpha^* D^1) \text{ mod. } B_A^{2r-1}(X) + F^r(\Omega_A^*(X))$. On désignera par $\mathcal{K}_A^{(2r)}(X)$ le groupe symétrisé du monoïde abélien formé des classes d'équivalence de fibrés multiplicatifs.

THÉORÈME. — On a la suite exacte

$$K_A^{-1 \text{ top}}(X) \rightarrow \bigoplus_{i+j=2\tau-1} H^i(X; H_j(\check{\Omega}_*(A)/F^r) \rightarrow \mathcal{K}_A^{(2r)}(X) \rightarrow K_A^{\text{top}}(X) \rightarrow \bigoplus_{i+j=2\tau} H^i(X; H_j(\check{\Omega}_*(A)/F^r)).$$

Dans cette suite exacte, $K_A^{-1 \text{ top}}(X) \approx [X, GL(A_*)]$ et les homomorphismes sont définis par des formules analogues à celles de [8].

En particulier, si X est la sphère S^r et si $B = A^+$ où A^+ désigne l'algèbre A augmentée d'un élément unité, on pose

$$\check{\mathcal{K}}_r(B) = \text{Coker}(\mathcal{K}_B^{(2r)}(\text{Point}) \rightarrow \mathcal{K}_B^{(2r)}(S^r))$$

et

$$\mathcal{K}_r(A) = \text{Coker}(\tilde{\mathcal{K}}_r(k) \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}_r(A^+)).$$

La suite exacte précédente peut alors s'écrire

$$K_{r+1}^{\text{top}}(A) \rightarrow HC_{r-1}(A) \rightarrow \mathcal{K}_r(A) \rightarrow K_r^{\text{top}}(A) \rightarrow HC_r(A)/\text{Im}(H_r(A, A)).$$

Supposons maintenant que la suite

$$H_r(A, A) \rightarrow HC_r(A) \rightarrow HC_{r-2}(A)$$

soit exacte [hypothèse notée (H_r)]. On en déduit la suite exacte

$$K_{r+1}^{\text{top}}(A) \rightarrow HC_{r-1}(A) \rightarrow \mathcal{K}_r(A) \rightarrow K_r^{\text{top}}(A) \rightarrow HC_{r-2}(A). \tag{S}$$

Remarques. — La notation $\mathcal{K}_r(A)$ est empruntée à Graeme Segal qui a défini des groupes analogues s'insérant dans des suites exactes du type (S). Cependant, j'ignore si sa définition coïncide avec celle-ci. D'autre part, l'hypothèse (H_r) est vérifiée si $A = C^\infty(M)$, M variété compacte, d'après les calculs duaux de ceux effectués dans [1], toutes les homologies considérées étant alors séparées.

III. RELATION AVEC LES GROUPES K_r DE QUILLEN.

THÉORÈME. — *L'homomorphisme $K_r(A) \rightarrow K_r^{\text{top}}(A)$ de la K-théorie algébrique de Quillen [10] vers la K-théorie topologique se factorise naturellement à travers le groupe $\mathcal{K}_r(A)$*

$$\begin{array}{ccc} K_r(A) & \rightarrow & \mathcal{K}_r(A) \\ & \searrow & \swarrow \\ & K_r^{\text{top}}(A) & \end{array}$$

THÉORÈME. — *On a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} K_{r+1}^{\text{top}}(A) & \rightarrow & K_r^{\text{rel}}(A) & \rightarrow & K_r(A) & \rightarrow & K_r^{\text{top}}(A) & \rightarrow & K_{r-1}^{\text{rel}}(A) \\ \parallel & & \downarrow \text{Ch}_r^{\text{rel}} & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ K_{r+1}^{\text{top}}(A) & \rightarrow & HC_{r-1}(A) & \rightarrow & \mathcal{K}_r(A) & \rightarrow & K_r^{\text{top}}(A) & \rightarrow & HC_{r-2}(A) \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ HC_{r+1}(A) & \rightarrow & HC_{r-1}(A) & \rightarrow & H_r(A, A) & \rightarrow & HC_r(A) & \rightarrow & HC_{r-2}(A) \end{array}$$

où le « caractère de Chern relatif » Ch_r^{rel} est défini dans [2] et où la dernière suite (peut-être non exacte) est définie dans [1].

Exemple. — Soit X une variété C^∞ et soit A l'algèbre des fonctions C^∞ sur X. Alors le groupe $\mathcal{K}_r(A)$ est isomorphe au groupe noté $\mathcal{K}_r(X)$ d'une Note précédente [8] où la filtration sur $\Omega^*(X)$ est la filtration « bête » définie par

$$F^r(\Omega^n(X)) = \Omega^n(X) \quad \text{si } r \leq n \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{sinon}$$

(ceci est une terminologie admise par les spécialistes de théorie de Hodge). Si on considère plus particulièrement le cas où $X = S^1$ et $k = \mathbb{C}$, l'homomorphisme $K_2(C^\infty(S^1)) \rightarrow \mathcal{K}_2(C^\infty(S^1)) \approx \mathbb{C}^*$ est associé à l'extension centrale de $SL(C^\infty(S^1))$ par \mathbb{C}^* d'après [2].

Remarque. — La définition de la K-théorie multiplicative (ainsi que celle de l'homologie cyclique) peut être généralisée à une filtration quelconque d'une algèbre différentielle graduée topologique $\Omega_*(A)$ telle que $\Omega_0(A) = A$ (l'image dans $\bar{\Omega}_*(A)$ étant fermée). Ainsi, dans l'exemple précédent il est plus naturel de considérer le complexe

$$\Omega_i(A) = \Omega^i(X) \oplus \Omega^{i-2}(X) \oplus \Omega^{i-4}(X) \oplus \dots$$

avec la filtration déduite de la filtration « bête ». Ceci évite le recours aux produits tensoriels topologiques comme il a été montré pour la situation duale dans [1]. L'analogie avec une Note précédente [8] est ainsi plus transparente, notamment pour la filtration de Hodge (cas d'une variété analytique complexe) et la filtration associée à un feuilletage.

Reçue le 24 février 1986, acceptée le 30 juin 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. CONNES, *Non commutative differential geometry*, Parts I, II, Prépublication I.H.E.S., 1983.
- [2] A. CONNES et M. KAROUBI, Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm, *Comptes rendus*, 299, série I, 1984, p. 963-968.
- [3] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the American Math. Society, 16, 1955.
- [4] M. KAROUBI, Connexions, courbures et classes caractéristiques en K-théorie algébrique, *Canadian Math. Soc. Conference Proceedings*, 2, Part I, 1982, p. 19-27.
- [5] M. KAROUBI, *K-theory, An introduction*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
- [6] M. KAROUBI, Homologie cyclique des groupes et des algèbres, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 381-384.
- [7] M. KAROUBI, Homologie cyclique et régulateurs en K-théorie algébrique, 297, série I, 1983, p. 557-560.
- [8] M. KAROUBI, K-théorie multiplicative, *Comptes rendus*, 302, série I, 1986, p. 321-324.
- [9] J. L. LODAY et D. QUILLEN, Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices, *Comment. Math. Helvetici*, 59, 1984, p. 565-591.
- [10] D. QUILLEN, Higher algebraic K-theory, *Springer Lecture Notes in Math.*, 341, 1973, p. 85-147.

*Laboratoire associé au C.N.R.S., n° 212,
Université de Paris-VII, U.E.R. de Mathématiques, 2, place Jussieu, 75251 Paris.*