44

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 311, Série I, p. 1-3, 1990

Algèbre/*Algebra*

Homologie cyclique d'algèbres de groupes

Max KAROUBI et Orlando E. VILLAMAYOR

Résumé — Nous calculons dans cette Note l'homologie cyclique de la k-algèbre d'un groupe discret G, soit $\mathrm{HC}_*(k[\mathrm{G}])$, k étant un anneau commutatif quelconque, en termes d'invariants plus classiques et calculables (par exemple si G est abélien). Si $\mathbf{Q}\subset k$, nous retrouvons un résultat classique de D. Burghéléa. Si G est fini d'ordre premier, nous retrouvons un résultat du second auteur, G. Cortinas et J. Guccione.

Cyclic homology of group algebras

Abstract — *In this Note we compute the cyclic homology of the k-algebra of a discrete group* G, *i. e.* $\mathrm{HC}_*(k[\mathrm{G}])$, *where k is an arbitrary commutative ring, in terms of more classical and more computable invariants (for instance if* G *is abelian). If* $\mathbf{Q}\subset k$, *we recover a classical result of D. Burghéléa. If* G *is finite of prime order, we recover a result of the second author, G. Cortinas and J. Guccione.*

1. DÉCOMPOSITION DE L'HOMOLOGIE CYCLIQUE DE $k[\mathrm{G}]$ SUIVANT LES CLASSES DE CONJUGAISON D'ÉLÉMENTS DE G. — 1.1. Pour un espace connexe X, on désigne par $\Lambda\mathrm{X}$ l'espace des lacets libres sur X (c'est-à-dire l'espace des applications continues de S^1 dans X). Des points base sur S^1 et sur X étant choisis, on a la fibration de Serre classique (F), ainsi que la suite exacte associée:

$$(\mathrm{F}) \qquad \Omega\mathrm{X}\to\Lambda\mathrm{X}\to\mathrm{X}$$

$$\pi_1(\Omega\mathrm{X})\to\pi_1(\Lambda\mathrm{X})\to\pi_1(\mathrm{X})\to\pi_0(\Omega\mathrm{X})\to\pi_0(\Lambda\mathrm{X})\to 0.$$

Plus précisément, $\pi_1(\mathrm{X})$ opère sur $\mathrm{G}=\pi_0(\Omega\mathrm{X})\approx\pi_1(\mathrm{X})$ par automorphismes intérieurs, ce qui montre que $\pi_0(\Lambda\mathrm{X})$ s'identifie à l'ensemble des classes de conjugaison $\langle u\rangle$ d'éléments u de G. La fibration (F) peut donc se décomposer en fibrations

$$(\mathrm{F}^u) \qquad \Omega^{\langle u\rangle}(\mathrm{X})\to\Lambda^{\langle u\rangle}(\mathrm{X})\to\mathrm{X}$$

avec $\pi_0(\Lambda^{\langle u\rangle}(\mathrm{X}))=0$, $\Omega^{\langle u\rangle}(\mathrm{X})$ désignant l'espace des lacets pointés de S^1 dans X conjugués à u dans $\pi_1(\mathrm{X})$. En particulier, l'ensemble $\pi_0(\Lambda^{\langle u\rangle}(\mathrm{X}))$ est isomorphe à C_u, classe de conjugaison de u et $\pi_i(\Omega^{\langle u\rangle}(\mathrm{X}))\approx\pi_i(\Omega\mathrm{X})\approx\pi_{i+1}(\mathrm{X})$ pour $i>0$ (l'isomorphisme étant défini par la translation par u).

1.2. Si X est l'espace classifiant d'un groupe discret G, on a $\pi_2(\mathrm{X})=0$ et $\pi_1(\Lambda^{\langle u\rangle}(\mathrm{X}))$ s'identifie ainsi au centralisateur $\mathrm{Z}(u)$ de l'élément u (ce groupe étant indépendant de u dans sa classe de conjugaison). Il en résulte que $\Lambda^{\langle u\rangle}(\mathrm{X})$ n'a qu'un seul groupe d'homotopie non nul, à savoir $\pi_1(\Lambda^{\langle u\rangle}(\mathrm{X}))\approx\mathrm{Z}(u)$ et que $\Lambda^{\langle u\rangle}(\mathrm{BG})$ a le type d'homotopie de $\Lambda^{\langle u\rangle}(\mathrm{BZ}(u))$.

D'après D. Burghéléa [1], l'homologie cyclique de $k[\mathrm{G}]$ en tant que k-algèbre (notée $\mathrm{HC}_*(k[\mathrm{G}])$) est canoniquement isomorphe à l'homologie à coefficients dans k de l'espace $\mathrm{Y}=\mathrm{ES}^1\times_{\mathrm{S}^1}\Lambda\mathrm{BG}$, qui est réunion disjointe des espaces

$$\mathrm{Y}^{\langle u\rangle}=\mathrm{ES}^1\times_{\mathrm{S}^1}\Lambda^{\langle u\rangle}\mathrm{BG}\sim\mathrm{ES}^1\times_{\mathrm{S}^1}\Lambda^{\langle u\rangle}\mathrm{BZ}(u).$$

Ainsi $\mathrm{HC}_*(k[\mathrm{G}])$ est isomorphe à la somme directe des groupes d'homologie $\mathrm{H}_*(\mathrm{Y}^{\langle u\rangle})$ pour toute classe de conjugaison $\langle u\rangle$ (les homologies étant à coefficients dans k).

Note présentée par Alain CONNES.

0764-4442/90/03110001 $ 2.00 © Académie des Sciences

1.3. Pour simplifier les notations, posons $\Gamma = Z(u)$ et interprétons S^1 comme l'espace classifiant de $\mathbf{Z}$. Le groupe $S^1 = B\mathbf{Z}$ opère sur $B\Gamma$ grâce à l'homomorphisme de groupes

$$\mathbf{Z} \times \Gamma \to \Gamma$$

défini par $(n, \gamma) \to u^n \gamma$ (d'où $B\mathbf{Z} \times B\Gamma \xrightarrow{\theta} B\Gamma$). On posera simplement $z.m = \theta(z, m)$. L'action de $S^1 = B\mathbf{Z}$ sur $\Lambda B\Gamma = \mathrm{Hom}(B\mathbf{Z}, B\Gamma)$ peut alors s'écrire $(z, f) \mapsto g$, avec $g(x) = f(x+z)$ si on interprète $B\mathbf{Z}$ comme un groupe abélien additif.

1.4. Lemme. — *L'application* $BG \to \Lambda^{\langle u \rangle} BG$ *qui associe à un élément* m *de* BG *le lacet libre* $z \mapsto z.m$ *est une équivalence d'homotopie. En outre, cette application est équivariante pour les actions de* $S^1 = B\mathbf{Z}$ *précisées plus haut.*

Démonstration. — Cette application est inverse à droite de l'application d'évaluation $\Lambda^{\langle u \rangle} BG \to BG$ qui est une équivalence d'homotopie. Puisque $(x+y).m = x.(y.m)$, cette application est équivariante.

1.5. Corollaire. — *On a une équivalence d'homotopie*

$$Y^{\langle u \rangle} \sim ES^1 \times_{S^1} BZ(u)$$

où $S^1 = B\mathbf{Z}$ *opère sur* $BZ(u)$ *via l'accouplement* $\mathbf{Z} \times Z(u) \to Z(u)$ (*d'où l'autre accouplement* $B\mathbf{Z} \times BZ(u) \to BZ(u)$ *défini plus haut : comparer avec* [3], prop. 4.8).

2. Calcul de la partie de l'homologie cyclique de $k[G]$ correspondant à une classe de conjugaison. — 2.1. D'après le corollaire précédent, $HC_*(k[G])$ est isomorphe à la somme directe des groupes d'homologie des espaces $ES^1 \times_{S^1} BZ(u)$, $\langle u \rangle$ parcourant l'ensemble des classes de conjugaison de G. Ayant déjà choisi $B\mathbf{Z}$ comme modèle de S^1, on peut maintenant choisir $B\mathbf{R}$ comme modèle de ES^1 car $B\mathbf{R}$ est contractile et que $B\mathbf{Z}$ opère librement sur $B\mathbf{R}$.

2.2. Théorème. — *L'espace*

$$ES^1 \times_{S^1} BZ(u) \sim B\mathbf{R} \times_{B\mathbf{Z}} BZ(u)$$

a le type d'homotopie de l'espace classifiant du groupe topologique $\mathbf{R} \times_{\mathbf{Z}} Z(u)$.

Démonstration. — Cet espace classifiant est la réalisation géométrique de l'espace simplicial dont les n-simplexes sont les suites $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, g_0, \ldots, g_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $g_i \in Z(u)$, modulo la relation d'équivalence engendrée par

$$(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, g_0, \ldots, g_n) \sim (\lambda_0 t_0, \ldots, \lambda_n t_n, t_0^{-1} g_0, \ldots, t_n^{-1} g_n), \qquad t_i \in \mathbf{Z}$$

et

$$(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, g_0, \ldots, g_n) \sim (\lambda_0 \mu, \ldots, \lambda_0 \mu, g_0 g, \ldots, g_n g), \qquad \mu \in \mathbf{R}, \quad g \in Z(u)$$

(On écrit multiplicativement les lois de groupe sur $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{R}$ pour se conformer aux notations traditionnelles dans les espaces classifiants.) L'espace de ces n-simplexes est homéomorphe à l'espace des n-simplexes de l'espace simplicial $B\mathbf{R} \times_{B\mathbf{Z}} BZ(u)$, d'où le résultat. Le théorème suivant en est une conséquence immédiate.

2.3. Théorème. — *On a un isomorphisme naturel*

$$HC_*(k[G]) \approx \bigotimes_{\langle u \rangle} H_*(B(\mathbf{R} \times_{\mathbf{Z}} Z(u)),$$

$\langle u \rangle$ *parcourant l'ensemble des classes de conjugaison de* G, $Z(u)$ *désignant le centralisateur de* u *et* $\mathbf{Z}$ *opérant sur* $Z(u)$ *par* $(n, \gamma) \mapsto u^n \gamma$.

2.4. *Remarque.* — Si u est d'ordre infini, on a une équivalence d'homotopie

$$B(\mathbf{R} \times_{\mathbf{Z}} Z(u)) \sim B(Z(u)/C(u)),$$

$C(u)$ désignant en général le groupe cyclique engendré par u. En effet, il suffit d'appliquer le foncteur « espace classifiant B » à la suite exacte suivante de groupes topologiques

$$1 \to \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times_{\mathbf{Z}} Z(u) \to Z(u)/C(u) \to 1.$$

Puisque $B\mathbf{R}$ est contractile, le résultat s'en déduit (et est déjà connu; *cf.* [1]).

2.5. *Remarque.* — Si u est d'ordre fini n, on a un homéomorphisme

$$B(\mathbf{R} \times_{\mathbf{Z}} Z(u)) \approx B(S^1 \times_{\mathbf{Z}/n} Z(u)).$$

En effet, les groupes topologiques $\mathbf{R} \times_{\mathbf{Z}} Z(u)$ et $S^1 \times_{\mathbf{Z}/n} Z(u)$ *sont isomorphes.*

2.6. THÉORÈME. — *Soit u un élément de G d'ordre fini n. Soient $C(u)$ le groupe cyclique engendré par u et $Z(u)$ le centralisateur de u. Supposons que l'homomorphisme $C(u) \to S^1$ se prolonge à $Z(u)$. Alors les espaces*

$$B(S^1 \times_{\mathbf{Z}/n} Z(u)) \quad et \quad BS^1 \times B(Z(u)/C(u))$$

sont homéomorphes. En particulier, leur homologie en degré m est isomorphe à la somme directe suivante de groupes d'homologie (où on pose $\bar{Z}(u) = Z(u)/C(u)$) :

$$H_m(\bar{Z}(u)) \oplus H_{m-2}(\bar{Z}(u)) \oplus H_{m-4}(\bar{Z}(u)) \oplus \ldots$$

Démonstration. — Désignons par $\varepsilon : Z(u) \to S^1$ le prolongement supposé. Un isomorphisme de groupes topologiques

$$S^1 \times_{\mathbf{Z}/n} Z(u) \to \bar{S}^1 \times_{\mathbf{Z}/n} Z(u) \approx S^1 \times Z(u)/C(u)$$

(où $\bar{S}^1$ désigne S^1 muni de l'action triviale de $\mathbf{Z}/n$) peut être défini par la formule

$$(z, \lambda) \mapsto (z\,\varepsilon(\lambda), \lambda).$$

D'après la terminologie de D. Burghéléa, un élément u est dit *elliptique* (resp. *hyperbolique*) s'il est d'ordre fini (resp. infini). Appelons C_e (resp. C_h) l'ensemble des classes de conjugaison correspondant à des éléments u elliptiques (resp. hyperboliques). Le théorème suivant se déduit alors de 2.4 et de ce qui précède :

2.7. THÉORÈME. — *Soit G un groupe abélien quelconque. L'homologie cyclique $HC_n(k[G])$ se décompose alors en une somme directe $\oplus M_u$, $u \in G$, avec*

$$M_u = H_n(Z(u)/C(u)) \quad si \quad u \in C_h$$

$$M_u = H_n(Z(u)/C(u)) \oplus H_{n-2}(Z(u/C(u)) \oplus H_{n-4}(Z(u)/C(u)) \oplus \ldots \quad si \quad u \in C_e.$$

Note remise le 23 mars 1990, acceptée le 27 mars 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] D. BURGHELEA, The cyclic homology of the group ring, *Comment. Math. Helv.*, 60, 1985, p. 354-365.

[2] G. CORTINAS, J. GUCCIONE et O. E. VILLAMAYOR, Cyclic Homology of $k[\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}]$ (à paraître).

[3] J.-L. LODAY, Homologie diédrale et quaternionique, *Advances in Math.*, 66, 1987, p. 119-148.

M. K. : *U.F.R. de Mathématiques, U.R.A. n° 212, Université Paris-VII, 2, place Jussieu,* 75251 *Paris Cedex* 05 ;

O. E. V. : *Instituto Argentino de Matematica, Viamonte* 1636, 1055 *Buenos-Aires, Argentine.*