

Topologie/Topology

Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires

Max KAROUBI

Résumé — Dans cette Note, nous utilisons la théorie des formes différentielles non commutatives ([2], [3]) pour définir la cohomologie avec des coefficients arbitraires. Cette cohomologie est aussi celle d'une filtration par le « poids » du complexe de De Rham non commutatif.

Non-commutative differential forms and cohomology with arbitrary coefficients

Abstract — In this Note, we use the theory of non-commutative differential forms ([2], [3]) to define the cohomology with arbitrary coefficients. It is also the cohomology of the "weight" filtration of the non-commutative De Rham complex.

1. FORMES DIFFÉRENTIELLES NON COMMUTATIVES. — Soit k un anneau commutatif unitaire et soit A une k -algèbre (unitaire, mais non nécessairement commutative). On pose

$$\Omega^0(A) = A, \quad \Omega^1(A) = \text{Ker}(A \otimes_k A \xrightarrow{m} A),$$

où m désigne la multiplication, $\Omega^n(A) = \Omega^1(A) \otimes \dots \otimes \Omega^1(A)$ [produit tensoriel de n copies du A -bimodule $\Omega^1(A)$]. Pour la contraction des tenseurs, $\Omega^*(A) = \bigoplus_n \Omega^n(A)$

est une k -algèbre. Définissons un k -homomorphisme $d: \Omega^0(A) \rightarrow \Omega^1(A)$ par la formule $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$. L'application $(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto a_0 \cdot da_1 \dots da_n$ induit alors un isomorphisme du produit tensoriel de k -modules $A \otimes A/k \dots \otimes A/k$ (n facteurs A/k) sur $\Omega^n(A)$. Soit $d: \Omega^n(A) \rightarrow \Omega^{n+1}(A)$ la différentielle déduite de cet isomorphisme et définie par la formule

$$d(a_0 \cdot da_1 \dots da_n) = 1 \cdot da_0 \cdot da_1 \dots da_n.$$

THÉORÈME ET DÉFINITION. — L'algèbre $\Omega^*(A)$, munie de l'opérateur d défini ci-dessus, est une algèbre différentielle graduée. Ses éléments sont les « formes différentielles non commutatives » sur A .

2. COHOMOLOGIE À COEFFICIENTS ARBITRAIRES. — Soit A_* l'algèbre simpliciale commutative que voici : pour tout entier s , on pose $A_s = k[x_0, x_1, \dots, x_s]/(x_0 + x_1 + \dots + x_s - 1)$, les morphismes face et dégénérescence étant induits par les transformations $x_i \mapsto 0$ et $x_i \mapsto x_i + x_{i+1}$ respectivement ([1], [4]). Le foncteur $[s] \mapsto \Omega^*(A_s)$, où $[s] = \{0, 1, \dots, s\}$, définit une algèbre différentielle graduée simpliciale. Elle est notée Ω^* . Si X est un ensemble simplicial, l'ensemble $\Omega^*(X) = \text{Mor}(X, \Omega^*)$ des morphismes de X dans Ω^* est donc une algèbre différentielle graduée.

Par ailleurs, l'algèbre quotient \bar{A}_s de A_s par l'idéal associé aux relations $(x_i)^2 = x_i$ et $x_i x_j = 0$ si $i \neq j$, s'identifie au k -module des fonctions sur $[s]$ à valeurs dans k . De même, $\Omega^*(\bar{A}_s)$ s'identifie à l'algèbre des cochaînes « semi-normalisées » sur $[s]$. Plus précisément, $\Omega^q(\bar{A}_s)$ est le k -module des fonctions λ sur $[s]^{q+1}$ de la forme $\lambda(i_0, \dots, i_q)$, où $i_\alpha \in [s]$, égales à 0 si $i_\alpha = i_{\alpha+1}$ pour un α . Le foncteur $[s] \mapsto \Omega^*(\bar{A}_s)$ définit donc une autre algèbre différentielle graduée simpliciale notée $\bar{\Omega}^*$. Si X est un ensemble simplicial, $\text{Mor}(X, \bar{\Omega}^*)$

Note présentée par Alain CONNES.

est aussi noté $\bar{\Omega}^*(X)$. Les considérations ci-dessus nous permettent de définir ainsi des homomorphismes d'algèbres différentielles graduées

$$\Omega^*(X) \rightarrow \bar{\Omega}^*(X) \rightarrow C^*(X),$$

où $C^*(X)$ est l'algèbre des cochaînes usuelles sur l'ensemble simplicial X .

THÉORÈME. — *Les homomorphismes précédents induisent des isomorphismes en cohomologie. Ainsi, $H^n(\Omega^*(X)) \cong H^n(\bar{\Omega}^*(X)) \cong H^n(C^*(X)) = H^n(X; k)$ pour tout anneau de coefficients k .*

Remarques. — 1. En fait, ce théorème ne dépend que de la structure additive de k par une extension évidente des définitions. Il est donc valable pour tout groupe abélien k .

2. Si $\mathbf{Q} \subset k$, posons $\hat{\Omega}^*(X) = \text{Mor}(X, \hat{\Omega}^*)$, où $\hat{\Omega}^*$ est l'algèbre différentielle graduée simpliciale commutative engendrée par les formes différentielles usuelles sur la k -algèbre commutative

$$k[x_0, x_1, \dots, x_s]/(x_0 + x_1 + \dots + x_s - 1).$$

D'après Sullivan [1], $H^n(\hat{\Omega}^*(X)) \cong H^n(X; k)$, l'isomorphisme étant induit par l'intégration sur les simplexes (qui introduit des dénominateurs rationnels). Nous avons donc les isomorphismes suivants (dont la composition est l'identité) :

$$H^n(X; k) \xleftarrow{\cong} H^n(\bar{\Omega}^*(X)) \xleftarrow{\cong} H^n(\Omega^*(X)) \xrightarrow{\cong} H^n(\hat{\Omega}^*(X)) \cong H^n(X; k),$$

le troisième isomorphisme étant induit par le morphisme canonique $\Omega^* \rightarrow \hat{\Omega}^*$.

3. Le théorème s'applique notamment dans les deux situations géométriques suivantes :

a) A un espace topologique M , on associe son « complexe singulier » X qui est un ensemble simplicial : X_s est l'ensemble des applications continues de Δ_s dans M , Δ_s désignant le s -simplexe standard ⁽¹⁾ dans \mathbf{R}^{s+1} .

b) Soit M une variété différentiable et soit $\mathcal{U} = (U_i)$, $i \in I$, un recouvrement ouvert. On associe à \mathcal{U} l'ensemble simplicial X suivant (le « nerf » de \mathcal{U}) :

$$X_s = \{ (i_0, \dots, i_s) \mid U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_s} \neq \emptyset \}$$

Enfin, on suppose \mathcal{U} choisi en sorte que l'intersection d'un nombre quelconque d'ouverts soit vide ou contractile.

Dans les deux situations géométriques précédentes, la cohomologie (simpliciale) de X calcule la cohomologie usuelle de l'espace M (à coefficients dans le groupe abélien k).

3. DESCRIPTION SIMPLICIALE DES ESPACES D'EILENBERG-MAC LANE. — En suivant [1], introduisons les groupes abéliens simpliciaux Z^n et \bar{Z}^n définis par $[s] \mapsto Z^n(A_s)$ et $[s] \mapsto Z^n(\bar{A}_s)$ respectivement, où Z^n désigne en général le k -module des formes différentielles fermées de degré n du complexe Ω^* ou $\bar{\Omega}^*$.

THÉORÈME. — *Les groupes abéliens simpliciaux Z^n et \bar{Z}^n sont des modèles de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(k, n)$: tous leurs groupes d'homotopie sont nuls, sauf π_n qui est isomorphe à k . En particulier, si X est un ensemble simplicial, $H^n(X; k)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'homotopie d'applications simpliciales de X dans Z^n ou \bar{Z}^n .*

Un lemme analogue à celui de Poincaré permet de montrer que le complexe de De Rham non commutatif

$$0 \rightarrow k \rightarrow \Omega^0(A) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^n(A) \rightarrow \Omega^{n+1}(A) \rightarrow \dots$$

est acyclique pour toute k -algèbre augmentée A . Par conséquent, tout élément de $Z^n(A)$ est une forme exacte (si $n > 0$) et s'écrit comme combinaison linéaire de formes différentielles du type

$$\omega = df_1 \cdot df_2 \cdot \dots \cdot df_n$$

Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n opère sur $Z^n(A)$ en permutant les df_i (plus précisément, $Z^n(A) \cong A/k \otimes A/k \otimes \dots \otimes A/k$, la permutation des facteurs A/k du produit tensoriel définissant l'action). Cette opération du groupe symétrique sur $Z^n(A)$ est « homotope » à celle induite par la signature des permutations dans un sens que nous allons expliciter. Introduisons tout d'abord l'algèbre des formes différentielles « étendues » $T^*(A)$, où $T^n(A) = A \otimes \dots \otimes A$ (produit tensoriel de $n+1$ copies du k -module A). Le produit de $(a_0 \otimes \dots \otimes a_n)$ et $(b_0 \otimes \dots \otimes b_m)$ est l'élément de $T^{n+m}(A)$ égal à

$$a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \otimes a_n b_0 \otimes \dots \otimes b_m$$

Soit $b_i: T^n(A) \rightarrow T^{n-1}(A)$ l'homomorphisme de k -modules induit par la « contraction » des composantes $(i, i+1)$ du produit tensoriel. Le A -bimodule $\Omega^n(A)$ s'identifie alors à l'intersection des noyaux des b_i . On désigne par $\Lambda^n(A)$ le sous k -module de $T^n(A)$ formé des tenseurs antisymétriques (pour l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_{n+1}) et « semi-normalisés » (c'est-à-dire appartenant au noyau de tous les homomorphismes b_i) : nous avons ainsi des inclusions de k -modules $\Lambda^n(A) \subset \Omega^n(A) \subset T^n(A)$. Par ailleurs, soit $D: T^*(A) \rightarrow T^{*+1}(A)$ l'homomorphisme de k -modules défini par la formule suivante

$$D(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i a_0 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n$$

Alors $D^2=0$, D est une dérivation et laisse stable $\Lambda^*(A)$ et $\Omega^*(A)$. Elle induit la différentielle précédente d sur $\Omega^*(A)$.

En particulier, désignons par $Z\bar{\Lambda}^n$ le groupe abélien simplicial $[s] \mapsto Z\Lambda^n(\bar{A}_s)$, où $Z\Lambda^n(\bar{A}_s) = \text{Ker}[D: \Lambda^n(\bar{A}_s) \rightarrow \Lambda^{n+1}(\bar{A}_s)]$. L'application canonique $Z\bar{\Lambda}^n \rightarrow \bar{Z}^n$ est alors une équivalence d'homotopie équivariante, le groupe symétrique \mathfrak{S}_n opérant par la signature sur $Z\bar{\Lambda}^n$ et par l'action précisée plus haut sur \bar{Z}^n .

Cette action du groupe symétrique sera exploitée dans une Note suivante pour une définition plus conceptuelle des opérations de Steenrod au niveau des espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

4. FILTRATION PAR LE POIDS. — Un élément f de

$$A_s = k[x_0, x_1, \dots, x_s]/(x_0 + x_1 + \dots + x_s - 1)$$

est de poids $\leq r$ s'il existe un polynôme de degré $\leq r$ ayant comme classe f . Plus généralement, une forme différentielle non commutative ω est dite de poids $\leq r$ si elle s'écrit comme combinaison linéaire de formes du type $f^0 \cdot df^1 \cdot \dots \cdot df^n$, où les f^i ont des poids dont la « somme » est $\leq r$. On note $\Omega_{(r)}^*$ le k -module des formes différentielles de poids $\leq r$. Il est clair que $\Omega_{(r)}^*$ est un sous-complexe du complexe de De Rham non commutatif.

THÉORÈME. — Pour tout ensemble simplicial X , et en degrés $\leq r$, le morphisme canonique $\Omega_{(r)}^* \rightarrow \Omega^*$ induit un isomorphisme entre la cohomologie du complexe $\Omega_{(r)}^*(X) = \text{Mor}(X, \Omega_{(r)}^*)$ et celle du complexe $\Omega^*(X) = \text{Mor}(X, \Omega^*)$, soit $H^*(X; k)$.

En remplaçant Ω^* par $\Omega_{(r)}^*$, nous définissons (par l'intégration usuelle sur les simplexes) un morphisme de complexes

$$\Omega_{(r)}^* \rightarrow C_{(r)}^*$$

où $C_{(r)}^*$ désigne le k -module des cochaînes usuelles tensorisé par $\mathbf{Z}[1/r!]$. Ce morphisme se factorise bien entendu par le k -module des formes différentielles *commutatives* de poids $\leq r$, où la même factorielle est inversée. Par ailleurs, il est bien connu que le k -module des formes différentielles commutatives de poids $\leq r$ forme un complexe, dont la cohomologie en degré $n \leq r$ est isomorphe à $H^n(X; k)$ si $r!$ est inversible dans k . Dans cette échelle, la cohomologie des formes différentielles non commutatives de poids $\leq r$ coïncide donc avec celle des formes différentielles commutatives (cohomologie « tame »).

(¹) Les coordonnées (t_i) d'un point courant de Δ_s vérifient donc les relations $t_i \geq 0$ et $\sum t_i = 1$, $i = 0, 1, \dots, s$.

Note remise le 26 novembre 1992, acceptée le 27 novembre 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] H. CARTAN, Théories cohomologiques, *Invent. Math.*, 35, 1976, p. 261-271.
- [2] A. CONNES, Non commutative differential geometry, *Publ. Math. IHES*, n° 62, 1985, p. 257-360.
- [3] M. KAROUBI, *Homologie cyclique et K-théorie*, Astérisque, 149, 1987, Société Mathématique de France.
- [4] P. MAY, *Simplicial objects in Algebraic Topology*, D. Van Nostrand Company, 1967.

UFR de Mathématiques-URA n° 212 du CNRS,
Université Paris-VII, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

e. mail : karoubi @ mathp7.jussieu.fr