Pergamon

Topology Vol. 34. No. 3. pp. 699–715. 1995

0040-9383 95 \$9.50 + 0.00

0040-9383(94)00043-3

FORMES DIFFERENTIELLES NON COMMUTATIVES ET OPERATIONS DE STEENROD

MAX KAROUBI

(*Received* 14 *March* 1994)

UN des buts de cet article, qui est la suite d'un travail précédent [6], est de montrer que les opérations de Steenrod s'introduisent de manière simple et naturelle dans le cadre des formes différentielles non commutatives. La vérification de leurs propriétés y est alors plus aisée que dans celui usuel des cochaînes (comparer avec [10] chapitre VII par exemple) et sans le formalisme des théories cohomologiques généralisées [8].

En outre, la méthode utilisée ici conduit à une définition axiomatique "constructive" de ces opérations. Pour un anneau commutatif *quelconque* R, elle repose sur le choix de modèles d'espaces d'Eilenberg–Mac Lane $K(R, n)$ sur lesquels le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère (les formes différentielles non commutatives constituant le modèle le plus simple). Quelques propriétés simples de ces $\mathfrak{S}_n$-espaces, "contrôlant" la non-commutativité du cup-produit, permettent de caractériser les opérations de Steenrod. C'est la présentation que nous avons finalement adoptée dans la Section 1, les formes différentielles non commutatives étant introduites dans la Section 2 seulement.

D'autres modèles d'espaces d'Eilenberg–Mac Lane où le groupe symétrique opère sont obtenus en considérant des variantes du produit symétrique infini de la sphére S^n (cf. [3]). En effet, par permutation des coordonnées, $\mathfrak{S}_n$ opére naturellement sur $\mathbf{R}^n$ et sur S^n, compactifiée d'Alexandrof de $\mathbf{R}^n$, donc sur son produit symétrique infini $\approx K(\mathbf{Z}, n)$. La caractérisation axiomatique précédente permet de définir les opérations en cohomologie mod. p grâce à la réduction mod p de ce produit symétrique infini: d'une part les "carrés" de Steenrod Sq^i (pour $p = 2$), d'autre part les opérations désignées usuellement par P^i (pour p impair). Pour R quelconque $\neq \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/p$, il convient de remplacer le produit symétrique infini par le R-module libre engendré par un modèle simplicial de la sphère S^n. Cependant, comme nous le verrons dans un prochain article [7], le produit symétrique infini peut être interprété comme une version topologique de la théorie des formes différentielles non commutatives.

Comme il est bien connu, les opérations de Steenrod peuvent être aussi définies grâce a la cohomologie équivariante [10]. Ce point de vue est repris ici, mais dans un esprit sensiblement différent. Pour tout entier n et tout espace X, nous mettons en évidence l'existence d'un complexe naturel de "formes différentielles" sur lequel le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère (Section 3). Cette structure supplémentaire de "formes avec symétries" semble constituer un bon modèle algébrique du type d'homotopie de X, puisque c'est elle qui détermine essentiellement la structure multiplicative de la cohomologie ainsi que les opérations cohomologiques.

Une remarque s'impose sur la nécessité d'un tel article, compte tenu de l'abondante littérature existant déjà sur le sujet (cf. notamment l'excellente référence [8] et celles mentionnées à la fin). Il nous a semblé qu'une présentation élémentaire, sans formalisme excessif, pouvait être utile. Comme il a été dit plus haut, il est aussi à espérer que l'introduction de ces "formes différentielles non commutatives avec symétries" puisse conduire à une meilleure compréhension du type d'homotopie "entier" des espaces (le type d'homotopie rationnel étant déterminé par le modèle minimal de Sullivan).

Dans un travail ultérieur, nous donnerons une définition équivalente des opérations de Steenrod en termes de "produit cyclique" d'espaces: ce point de vue nouveau permet d'étendre cette définition en homotopie stable.

Remerciements. Il me convient de remercier A. Dold et P. May qui ont fourni de nombreuses références bibliographiques. Elles figurent à la fin de cet article.

Les notations suivantes sont fréquemment utilisées: si G est un groupe discret et si X est un G-espace, on note X_{hG} l'espace de Borel associé, soit $EG \times_G X$, EG désignant le G-fibré principal universel sur BG; X_{hG} est le "quotient homotopique" de X par G. On note de même X^{hG} l'espace des "points fixes homotopiques", c'est-à-dire l'espace $\mathcal{S}(\xi)$ des sections du fibré $\xi = EG \times_G X$ sur BG. Les notations X_G et X^G désignent respectivement l'espace quotient X/G et l'espace des points fixes de X par l'action de G. On a évidemment des applications $X_{hG} \to X_G$ et $X^G \to X^{hG}$ qui ne sont pas des équivalences d'homotopie en général (noter cependant que la première est une équivalence d'homotopie si G opère librement sur X).

1. DÉFINITION AXIOMATIQUE "CONSTRUCTIVE" DES OPÉRATIONS DE STEENROD

1.1. Dans ce paragraphe nous nous proposons de définir les opérations de Steenrod de manière "constructive" en partant d'espaces d'Eilenberg–Mac Lane *munis d'actions appropriées de groupes symétriques.* Plusieurs constructions de ces espaces sont possibles, d'un point de vue simplicial ou topologique. Le lecteur curieux pourra se reporter tout de suite à la Section 2 pour des descriptions explicites.

De manière précise, soit R un anneau commutatif qui sera fixé dans tout ce paragraphe et soit $K(R, n)$ un espace d'Eilenberg–Mac Lane: tous ses groupes d'homotopie sont nuls, sauf le n ième qui est isomorphe à R. Pour simplifier les notations et s'il n'y a pas de risque de confusion, on notera simplement Z^n cet espace d'Eilenberg–Mac Lane. On suppose alors les données suivantes:

- une structure de R-module topologique sur Z^n (R étant muni de la topologie discrète).
- une action[†] du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur Z^n.

Ces données doivent satisfaire aux axiomes suivants:

(a) Le cup-produit en cohomologie est induit par des accouplements R-bilinéaires

$$\phi_{m,n}: Z^m \wedge Z^n \to Z^{m+n}$$

qui sont associatifs en un sens évident et qui sont équivariants pour l'action du sous-groupe $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ de $\mathfrak{S}_{m+n}$. En particulier, la "puissance p ième"

$$U^p: Z^q \to Z^q \wedge \cdots \wedge Z^q \to Z^{pq}$$

[†] Toutes les applications considérées dans cet article sont continues, sauf mention explicite du contraire. Tous les espaces ont le type d'homotopie de CW-complexes.

(où la première application est la diagonale) est équivariante pour l'action du groupe $\mathfrak{S}_p$, opèrant trivialement sur Z^q et via l'inclusion de $\mathfrak{S}_p$ dans $\mathfrak{S}_{pq}$ sur Z^{pq}. On posera souvent $\omega^{\otimes p} = U^p(\omega)$.

(b) Si $\omega_m \in Z^m$ et $\theta_n \in Z^n$, on a $\phi_{m,n}(\omega_m, \theta_n) = \sigma^*(\phi_{n,m}(\theta_n, \omega_m))$, où σ^* est l'automorphisme de Z^{m+n} associé à la permutation de $\{1, 2, \ldots, n+m\}$, échangeant les n premiers et m derniers objets (en les conservant dans le même ordre).

(c) L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur Z^n est homotopiquement équivalente (dans la catégorie des R-modules topologiques) à celle induite par la signature des permutations: il existe donc une suite de modèles équivariants de $K(R,n)$, soient X_r, $r = 1, \ldots, 2s$, et des équivalences d'homotopie équivariantes $X_1 \to X_2 \leftarrow X_3 \to \cdots \to X_{2s}$, où X_1 est le modèle donné et où $\mathfrak{S}_n$ opère sur X_{2s} via la signature des permutations. En particulier, si G est un sous-groupe du groupe alterné A_n ou si $2 = 0$ dans R, l'espace de Borel associé $EG \times_G K(R,n)$, (où EG est le G-fibré principal universel sur $BG = K(G,1)$) a le type d'homotopie *fibré* de $BG \times K(R,n)$.

1.2. Considérons maintenant un sous-groupe π quelconque du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$ et désignons par

$$\xi = E\pi \times_\pi Z^{pq}$$

l'espace de Borel associé, vu comme fibré sur $B\pi$, π opérant sur Z^{pq} via l'inclusion évidente de $\mathfrak{S}_p$ dans $\mathfrak{S}_{pq}$. L'application $U^p: Z^p \to Z^{pq}$ définie en 1.1 ("puissance p ième") induit alors l'application fibrée suivante:

$$\psi^p: B\pi \times Z^q = E\pi \times_\pi Z^q \to E\pi \times_\pi Z^{pq}$$

avec $\psi^p(x, \omega) = (x, \omega^{\otimes p})$, aussi bien qu'une application $\tilde{\psi}^p$ de Z^q dans l'espace des sections $\mathcal{S}(\xi)$ du fibré ξ. Cette dernière associe au point ω de Z^q la section $x \mapsto (\tilde{x}, \omega^{\otimes p})$, $\tilde{x}$ étant un relevé quelconque de x dans $E\pi$.

1.3. Si q est pair par exemple, les fibrés de Borel sont homotopiquement triviaux car l'action de π sur Z^{pq} est homotopiquement triviale (cf. l'axiome (c) en 1.1). Dans ce cas, ψ^p s'interprète simplement comme une application

$$B\pi \times Z^q \to B\pi \times Z^{pq},$$

bien définie à homotopie près, compatible avec la projection sur $B\pi$, c'est-à-dire comme une application de $B\pi \times Z^q$ dans Z^{pq}. Si q est impair et si π est inclus dans le groupe alterné (ou si $2 = 0$ dans R), ψ^p s'interprête de la même manière.

1.4. De manière plus générale, l'espace des applications de X dans $\mathcal{S}(\xi)$ s'identifie à $H^{pq}(B\pi \times X;\ R_\varepsilon)$, R_ε désignant le système de coefficients locaux sur $B\pi \times X$ induit par l'homomorphisme composé $\pi_1(B\pi \times X) \to \pi_1(B\pi) \xrightarrow{\sigma} R^*$, où σ est la signature si q est impair et est égal à 1 si q est pair (cf. l'axiome (c) en 1.1 de nouveau). Pour tout espace X, ψ^p induit donc une application

$$H^q(X; R) \cong [X, Z^q] \to H^{pq}(B\pi \times X;\ R_\varepsilon)$$

qui n'est *pas* additive en général. En particulier, soit R le corps fini $\mathbf{Z}/p$ et soit $\pi = C_p$ le groupe cyclique d'ordre p (p premier). Comme nous l'avons vu plus haut, le système de coefficients locaux R_ε est alors trivial. D'après la formule de Künneth, nous avons en outre l'isomorphisme suivant:

$$H^{pq}(B\pi \times X) \cong \bigoplus_r\, [H^r(B\pi) \otimes H^{pq-r}(X)] \cong \bigoplus_r\, H^{pq-r}(X)$$

(les cohomologies étant prises à coefficients dans R et le dernier isomorphisme dépendant du choix[†] des générateurs x_r de $H^r(B\pi) \cong R$). Ainsi, pour tout r, l'application précédente induit une opération cohomologique $D_r: H^q(X) \to H^n(X)$ avec $n = pq - r$. Nous proposons de démontrer le théorème suivant:

THEOREME 1.5. *Posons $n = pq - r$. Si $p = 2$, D_r coïncide avec le carré de Steenrod Sq^{n-q}. Si p est impair, D_r est triviale, sauf si $n \geq q$ et dans les cas suivants:*

q pair et $n = pq - 2i(p-1)$ ou $pq - 2i(p-1) + 1$.

q impair et $n = pq - (2i+1)(p-1)$ ou $pq - (2i+1)(p-1) + 1$.

Quelle que soit la parité de q, l'opération cohomologique obtenue pour $n - q$ pair[‡], soit:

$$Q^i: H^q(X; \mathbf{Z}/p) \to H^{q+2i(p-1)}(X; \mathbf{Z}/p),$$

est l'opération cohomologique P^i de Steenrod multipliée par le facteur de normalisation $(-1)^r(m!)^q$, où $m = (p-1)/2$ et $r = m \cdot i + m \cdot (q^2 - q)/2$.

Avant de démontrer ce théorème (1.14 et 1.15), nous allons établir quelques propriétés générales de l'application ψ^p qui seront utiles pour la suite.

1.6. Les espaces $E_1^q = E\pi \times_\pi Z^q$ et $E_2^q = E\pi \times_\pi Z^{pq}$ sont fibrés sur $B\pi$ et, lorsqu'on fait varier q, des produits sur les fibres peuvent être définis. De manière plus précise, le cup-produit sur les espaces d'Eilenberg–Mac Lane induit des applications

$$Z^{q_1} \times Z^{q_2} \to Z^{q_1+q_2} \quad \text{et} \quad Z^{pq_1} \times Z^{pq_2} \to Z^{p(q_1+q_2)}$$

qui sont équivariantes pour l'action des groupes symétriques en un sens évident. Elles permettent de définir des "produits"

$$E_i^{q_1} \times_{B\pi} E_i^{q_2} \to E_i^{q_1+q_2}$$

pour $i = 1, 2$. On note génériquement $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ de tels produits.

PROPOSITION[§] 1.7. *Soient $x_1 \in E_1^{q_1}$ et $x_2 \in E_1^{q_2}$. Les applications*

$$(x_1, x_2) \mapsto \psi^p(x_1) \cdot \psi^p(x_2)$$

et

$$(x_1, x_2) \mapsto (-1)^{q_1 q_2 (p(p-1)/2)} \psi^p(x_1 \cdot x_2)$$

sont homotopes.

Démonstration. Si ω_1 et ω_2 sont des éléments de Z^{q_1} *et* Z^{q_2} respectivement, $(\omega_1)^p \cdot (\omega_2)^p$ et $(\omega_1 \cdot \omega_2)^p$ se correspondent par l'automorphisme de $Z^{p(q_1+q_2)}$ défini formellement par la permutation suivante des facteurs:

$$(\omega_1 \omega_1 \cdots \omega_1)(\omega_2 \omega_2 \cdots \omega_2) \mapsto (\omega_1 \omega_2) \cdots (\omega_1 \omega_2).$$

[†] Si p est impair, l'algèbre de cohomologie $H^*(B\pi)$ est le produit tensoriel d'une algèbre de polynômes $k[x]$ par une algèbre extérieure $\Lambda(y)$ avec $\deg(x) = 2$ et $\deg(y) = 1$. On a $\beta(y) = x$, où β désigne le Bockstein. Si on choisit $x_1 = y \in H^1(B\pi) = \mathrm{Hom}(\pi, \pi)$ égal à l'application identique de π, $x_{2n} = x^n$ et $x_{2n+1} = yx^n$, les générateurs x_r de $H^r(B\pi)$ sont bien déterminés. Si $p = 2$, l'algèbre de cohomologie $H^*(B\pi)$ est une algèbre de polynômes $k[y]$ avec y de degré 1; on choisit alors $x_r = (y)^r$.

[‡] On détermine de même l'opération cohomologique pour $n - p$ impair à l'aide du Théorème 2.9 démontré plus loin (cf. [10, p. 107] pour la méthode).

[§] Comparer avec [10, p. 102 (Lemme 2.6)].

Sa signature étant $(-1)^{q_1 q_2 (p(p-1)/2)}$, le résultat s'en déduit par application de la propriété (c) de 1.1. □

PROPOSITION 1.8. *Soit π un sous-groupe quelconque de $\mathfrak{S}_{p_1} \times \mathfrak{S}_{p_2}$. L'application composée évidente*[†]

$$\psi^{p_2} \circ \psi^{p_1} : E\pi \times_\pi Z^q \to E\pi \times_\pi Z^{p_1 q} \to E\pi \times_\pi Z^{p_2 p_1 q}$$

est alors homotope à $\psi^{p_1 p_2}$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des définitions. □

1.9. Nous allons maintenant nous restreindre au cas du groupe cyclique $\pi = C_p$ (noté simplement C par la suite), considéré comme sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$. Nous choisirons aussi $R = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p premier. Puisque l'espace $EC \times_C Z^{pq}$ s'identifie à $BC \times Z^{pq}$ pour toute valeur de p, nous avons ainsi défini une application:

$$BC \times Z^q \to Z^{pq}.$$

Pour mieux l'analyser, il nous faut distinguer deux cas suivant la parité de p. En effet, la structure de la cohomologie de BC a une allure différente dans les deux cas (cf. †p. 702). Nous étudierons d'abord le cas où p est impair. Celui où $p = 2$ (qui est beaucoup plus simple techniquement) sera commenté en 1.15.

Soit donc x une classe de cohomologie de degré q représentée par

$$f : X \to Z^q = K(R, q).$$

En faisant le produit de f par l'application identique de BC, on en déduit une application de $BC \times X$ dans $BC \times K(R,q)$ qui, composée avec l'application $BC \times K(R,q) \to K(R,pq)$ définie plus haut, définit une classe de cohomologie $P(x) \in H^{pq}(BC \times X)$. En fait, d'après 1.4, $P(x)$ s'écrit $\sum x_r \cdot D_r(x)$ avec $D_r(x) \in H^{pq-r}(X)$, les x_r étant les générateurs choisis de $H^r(BC)$ (cf. †p. 702).

LEMME[‡] 1.10. *Les applications D_r sont nulles, sauf éventuellement pour $r \leq (p-1)\, q$ et dans les cas suivants*:

q pair et $r = 2i(p-1)$ ou $2i(p-1)-1$.

q impair et $r = (2i+1)(p-1)$ ou $(2i+1)(p-1)-1$.

Démonstration. Tout d'abord, la condition $r \leq (p-1)q$ est nécessaire pour la non trivialité de D_r car toute application entre espaces d'Eilenberg–Mac Lane

$$K(C,q) \to K(C,n)$$

est homotopiquement triviale si $n < q$. D'autre part, d'après sa construction, $P(x)$ est la restriction à $H^{pq}(BC \times X)$ d'une classe de cohomologie $Q(x) \in H^{pq}(B\mathfrak{S}_p \times X;\, \varepsilon)$, où ε est le système de coefficients locaux $\mathbf{Z}/p$ induit par la signature $\mathfrak{S}_p \to \mathbf{Z}/2 \to R^*$. Ainsi $P(x)$ appartient en fait à $\tilde{H}^*(BC) \otimes H^*(X)$, où $\tilde{H}^*(BC) = \mathrm{Im}(H^*(B\mathfrak{S}_p;\, \varepsilon) \to H^*(BC_p))$.

Considérons maintenant le cas où q est pair, le système local étant alors trivial. Il est bien connu que les automorphismes intérieurs induisent l'identité sur la cohomologie d'un

---

† Ici π est considéré comme sous-groupe de $\mathfrak{S}_{p_1 p_2}$ par les permutations simultanées de "paquets" de p_1 termes dans $p_1 p_2$, ainsi que par les permutations des paquets entre eux: ceci correspond au produit tensoriel des représentations correspondantes.

‡ Comparer avec [10, p. 104 (Lemme 3.5)].

groupe. En particulier, soit f_θ la permutation $u \mapsto \theta \cdot u$ sur l'ensemble $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ avec θ premier à p. Identifions le groupe cyclique C au groupe engendré par la permutation $u \mapsto u + 1$. Lorsque θ varie, les automorphismes intérieurs par les f_θ laissent fixe le sous-groupe C et induisent toutes les translations. Ainsi $\tilde{H}^{2s}(BC)$ est engendré par t_s si et seulement si $\theta^s t_s = t_s$ pour tout θ, c'est-à-dire si $s \equiv 0 \bmod (p-1)$. De même, $\tilde{H}^{2s-1}(BC)$ est engendré par $\lambda \cdot t_{s-1}$ si et seulement si $\theta^s \lambda t_{s-1} = \lambda t_{s-1}$, c'est-à-dire si $s \equiv 0(p-1)$. Ainsi, les seuls homomorphismes D_r éventuellement non nuls correspondent aux cas $r = 2s = 2i(p-1)$ ou $r = 2s - 1 = 2i(p-1) - 1$.

Dans le cas où q est impair, le système local n'est pas trivial et l'argument précédent doit être légèrement modifié. En effet, la permutation $u \mapsto \theta \cdot u$ induit l'identité ou l'opposé de l'identité suivant sa signature. Il est bien connu que cette signature est le symbole[†] de Legendre (θ/p). Pour r pair $= 2s$, nous avons donc $(\theta)^s = (\theta/p)$ pour tout θ, soit $s = ((p-1)/2)) \bmod (p-1)$, soit $r = p - 1 + 2i(p-1) = (2i+1)(p-1)$. Pour r impair $= 2s - 1$, nous devons avoir $(\theta)^s = (\theta/p)$ pour tout θ, soit $s = ((p-1)/2) \bmod (p-1)$, ou encore $r = p - 2 + 2i(p-1) = (2i+1)(p-1) - 1$. □

LEMME[‡] 1.11. *Les applications D_r sont des homomorphismes de groupes.*

Démonstration. Il suffit de suivre la démonstration classique [10]. Si u et v appartiennent à Z^q, le p-produit tensoriel de $(u + v)$ est $u^{\otimes p} + v^{\otimes p}$ + une somme de monômes que le groupe cyclique C permute librement. La correspondence $(u, v) \mapsto \phi(u, v) = (u + v)^{\otimes p} - (u^{\otimes p} + v^{\otimes p})$ définit ainsi une application

$$BC \times Z^q \times Z^q \to EC \times_C Z^{pq}$$

qui se factorise par $BC \times Z^{pq}$ par une application "norme" $Z^{pq} \to Z^{pq}$. Si ϕ est ainsi interprétée comme une application de $BC \times Z^q \times Z^q$ dans Z^{pq}, elle est constante sur le facteur BC, ce qui montre bien que $D_r(u + v) = D_r(u) + D_r(v)$, sauf peut-être pour $r = 0$. Dans ce cas, $D_0 = 0$ pour q impair et $D_0(u + v) = (u + v)^p \equiv u^p + v^p = D_0(u) + D_0(v) \bmod p$ pour q pair. □

1.12. En suivant la méthode développée par Steenrod et Epstein [10], nous allons maintenant étudier l'homomorphisme $D_{(p-1)q}: Z^q \to Z^q$. D'après la théorie générale des espaces d'Eilenberg–Mac Lane, nous savons que $D_{(p-1)q}$ est la multiplication par un nombre $a_q \in \mathbf{Z}/p$. D'après la Proposition 1.7 (utilisée q fois), $a_q = (-1)^r (a_1)^q$ avec $r = p(p-1)q(q-1)/4$. Il reste donc à déterminer a_1, ce qui est le point clé de la théorie.

THEOREME 1.13. *$a_1 = m!$ avec $m = (p-1)/2$.*

Démonstration. Elle est nettement plus simple que celle de Steenrod–Epstein (comparer avec [10, pp. 108–111]), compte tenu de nos définitions. Il s'agit de calculer essentiellement l'homomorphisme composé

$$\begin{aligned} R &\cong H^{p+1}(BC \times S^1, BC) \cong H^{p+1}(EC \times_C K(R,1), BC) \leftarrow H^{p+1}(EC \times_C K(R,p), BC) \\ &\cong H^{p+1}(BC \times K(R,p), BC) \cong R, \end{aligned}$$

[†] C'est-à-dire 1 si θ est un carré mod p, -1 sinon.

[‡] Comparer avec [10, p. 105 (Lemme 4.2)].

où $R = \mathbf{Z}/p$. L'application diagonale $S^1 \to S^1 \wedge \cdots \wedge S^1 \cong S^p$ définit

$$\theta : BC \times S^1 \cong EC \times_C S^1 \to EC \times_C S^p.$$

On doit donc montrer que θ induit l'isomorphisme approprié sur les classes fondamentales de dimension $p + 1$. Ici $S^p = S^1 \wedge \cdots \wedge S^1$ est muni de l'action du groupe cyclique permutant les facteurs S^1: cette action est celle induite par la permutation des coordonnées sur $\mathbf{R}^p$, dont S^p est le compactifié d'Alexandrof.

Soit L le fibré en droites *complexes* canonique sur l'espace BC. Le fibré réel (resp. complexe) trivial de rang 1 sera noté 1 (resp. T). Alors $EC \times_C S^p$ peut s'interpréter comme le fibré en sphères $S(V)$ du fibré vectoriel

$$V = 1 \oplus L \oplus L^2 \oplus \cdots \oplus L^{(p-1)/2}.$$

De même, $BC \times S^1 = EC \times_C S^1$ est le fibré en sphères $S(T)$. Ecrivons maintenant les suites exactes de cohomologie associées aux paires $(B(W), S(W))$, avec $W = V$ ou $T, B(W)$ désignant le fibré en boules de W:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{p+1}(B(V)) & \to & H^{p+1}(S(V)) & \to & H^{p+2}(B(V), S(V)) & \to & H^{p+2}(B(V)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^{p+1}(B(T)) & \to & H^{p+1}(S(T)) & \to & H^{p+2}(B(T), S(T)) & \to & H^{p+2}(B(T))
\end{array}$$

Puisque les fibrés V et T ont une section non nulle, nous avons l'isomorphisme

$$H^{p+1}(S(W), X) \cong H^{p+2}(B(W), S(W)).$$

Compte tenu de l'isomorphisme de Thom, les groupes $H^{p+1}(S(V), X)$ et $H^{p+1}(S(T), X)$ sont donc isomorphes. L'homomorphisme cherché est la multiplication par la classe d'Euler de $L \oplus L^2 \oplus \cdots \oplus L^{(p-1)/2}$, soit $m!$ avec $m = (p-1)/2$. En effet, la classe d'Euler de L est l'image par l'homomorphisme de Bockstein $H^1(BC; \mathbf{Z}/p) \to H^2(BC; \mathbf{Z}/p)$ du générateur canonique du premier groupe (cf. †p. 702). Celle de $L \oplus L^2 \oplus \cdots \oplus L^{(p-1)/2}$ s'en déduit de manière évidente, grâce à la propriété de multiplicativité classique de la classe d'Euler. □

1.14. En suivant Steenrod [10, p. 112], définissons l'opération cohomologique

$$P^i : H^q(X) \to H^{q+2i(p-1)}(X)$$

par la formule

$$P^i(u) = \frac{(-1)^r}{(m!)^q} D_{(q-2i)(p-1)}(u)$$

où $m = (p-1)/2$ et $r = i \cdot m + m(q^2 - q)/2$ (noter que les signes sont les mêmes que ceux de McClure [8], mais diffèrent de ceux de Steenrod–Epstein [10, p. 112], où une erreur semble s'être glissée). Les théorèmes et propositions démontrés dans ce paragraphe (1.7, 1.10, 1.11 et 1.13 notamment), qui sont analogues à ceux de Steenrod permettent alors de montrer que les opérations additives P^i satisfont aux axiomes énoncés dans [10, p. 76], soit:

(1) $P^0 = 1$.
(2) Si $x \in H^{2r}(X)$, $P^r(x) = x^p$.
(3) Si $x \in H^q(X)$, $P^i(x) = 0$ pour $2i > q$.
(4) $P^r(xy) = \sum_i P^i(x) \cdot P^{r-i}(x)$.

Par conséquent, pour p impair, les opérations P^i définies ici sont les opérations de Steenrod, compte tenu du théorème d'unicité démontré dans [10, chapitre VIII]. Après les remarques que nous ferons en 1.15, la démonstration du Théorème 1.5 sera achevée.

1.15. Examinons sommairement les modifications à apporter au raisonnement précédent pour $p = 2$. Le schéma de construction est tout à fait semblable, $H^n(BC)$ étant un espace vectoriel de dimension un sur $\mathbf{Z}/2$ (cf. [†]p. 702). Les *carrés de Steenrod* $Sq^i(u)$ sont alors définis comme étant simplement les classes $D_{q-i}(u)$. Seul l'analogue du Théorème 1.13 pour $p = 2$ mérite un commentaire. Il faut montrer que la classe fondamentale de $H^2(BC \times S^1, BC)$ est l'image de la classe fondamentale de $H^2(EC \times_C S^2, BC)$ par l'homomorphisme déduit de l'inclusion équivariante de S^1 dans S^2. Ceci résulte du fait que la première classe de Stiefel–Whitney du fibré en droites réelles canonique sur BC n'est pas triviale.

2. MODÈLES D'ESPACES D'EILENBERG–MAC LANE SATISFAISANT AUX AXIOMES

2.1. La présentation axiomatique "constructive" des opérations de Steenrod que nous avons détaillée dans le paragraphe précédent ne sera achevée qu'après la preuve de l'existence d'espaces d'Eilenberg–Mac Lane vérifiant les propriétés énoncées en 1.1. De tels modèles ont été déjà explicités en [6] dans un cadre simplicial. Nous allons en décrire deux exemples. Le premier est la réalisation géométrique du R-module simplicial $s \mapsto Z^n(A_s)$, où A_s est l'anneau simplicial $R[x_0, \ldots, x_s]/(\sum x_i - 1)$, Z^n désignant le R-module des formes différentielles *non commutatives* fermées de degré n. Un second modèle est celui obtenu en remplaçant la R-algèbre A_s par l'algèbre $\bar{A}_s$ des fonctions sur l'ensemble $\{0, 1, \ldots, s\}$ (cf. [6, Section 2] pour les détails). Un élément de $Z^n(A_s)$ (ou de $Z^n(\bar{A}_s)$) est une combinaison linéaire de formes fermées du type $df_1 \cdots df_n$, l'action du groupe symétrique se résumant en une permutation des "différentielles" df_i. La vérification des axiomes énoncée en 1.1 est aisée à l'exception de l'axiome (c) qui résulte de [6, §2.12].

Dans les deux exemples précédents, la puissance p ième se décrit comme une application

$$U^p : Z^q(A_*) \to Z^{pq}(A_*).$$

Elle est définie en associant à une forme différentielle non commutative fermée ω sur un simplexe la forme différentielle (elle aussi fermée)

$$\omega^{\otimes p} = \omega \cdot \omega \cdot \cdots \omega$$

(p facteurs ω). Celle-ci est invariante par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$ qui opère, via l'inclusion canonique dans $\mathfrak{S}_{pq}$, en permutant les facteurs de $Z^{pq}(A_*)$ (ou $Z^{pq}(\bar{A}_*)$) par blocs. Toutes les considérations de la Section 1 se transcrivent alors telles quelles en posant $Z^n = Z^n(A_*)$ ou $Z^n(\bar{A}_*)$.

2.2. Un autre modèle pour l'espace $K(\mathbf{Z}, n)$ est le produit symétrique infini de la sphère S^n (cf. [3]). De manière plus précise, soit X un complexe simplicial[†] connexe pointé, $*$ désignant le point base. Le n ième produit symétrique de X, noté $SP^n(X)$, est le quotient de X^n par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Le *produit symétrique infini*, noté $SP^\infty(X)$, est la limite inductive des $SP^n(X)$, l'application de $SP^n(X)$ dans $SP^{n+1}(X)$ étant définie par $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_n, *)$. En fait, $SP^\infty(X)$ est un monoïde abélien pour la loi induite par la juxtaposition des suites et définie par

$$(t, u) \mapsto t * u = (t_1, u_1, t_2, u_2, \ldots, t_n, u_n, \ldots),$$

où $t = (t_i)$ et $u = (u_i)$, $i \in \mathbf{N}$, sont deux éléments de $SP^\infty(X)$.

[†] Pour la théorie de Dold–Thom, il convient de supposer que les complexes simpliciaux sont dénombrables et localement finis.

L'intérêt principal du monoïde topologique $SP^\infty(X)$ est le théorème suivant de Dold et Thom: pour $i > 0$, le groupe d'homotopie $\pi_i(SP^\infty(X))$ est naturellement isomorphe au groupe d'*homologie* entière $H_i(X; \mathbf{Z})$. En particulier, si X est la sphère S^n, $SP^\infty(S^n)$ est un modèle de l'espace d'Eilenberg–Mac Lane $K(\mathbf{Z}, n)$: les classes d'homotopie d'applications pointées d'un CW-complexe M dans $SP^\infty(S^n)$ sont en correspondance naturelle bijective avec le groupe de *cohomologie* de Čech $H^n(M)$ (pour $n > 0$). Ce résultat est à comparer avec la définition de l'ensemble de cohomotopie $\pi^n(M) = [M, S^n]$: l'application naturelle $[M, S^n] \to [M, SP^\infty(S^n)]$ induit l'homomorphisme de Hurewicz, compte tenu des identifications précédentes.

D'autre part, si $\phi: T \wedge U \to V$ est une application continue pointée quelconque, elle induit une "multiplication" bilinéaire sur les produits symétriques infinis associés:

$$\phi_*: SP^\infty(T) \wedge SP^\infty(U) \to SP^\infty(V)$$

grâce à la formule suivante

$$\phi_*(t, u) = (\phi(t_i, u_j)).$$

Dans cette formule t désigne la suite (t_i) et u la suite (u_j), i et $j \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ étant identifié à $\mathbf{N}$).

En particulier, écrivons la sphere S^n sous la forme du "produit" $S^1 \wedge \cdots \wedge S^1$. Alors $SP^\infty(S^n)$ est un modèle de l'espace d'Eilenberg–Mac Lane $K(\mathbf{Z}, n)$ sur lequel le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère par permutation des facteurs S^1. L'application canonique de $S^n \wedge S^m$ dans S^{n+m} induit une application $K(\mathbf{Z}, n) \wedge K(\mathbf{Z}, m) \to K(\mathbf{Z}, n + m)$ qui définit le cup-produit en cohomologie. Les axiomes (a) et (b) de 1.1 sont évidents. On vérifie (c) en définissant une application α de $SP^\infty(S^n)$ dans la réalisation géométrique du modèle de $K(\mathbf{Z}, n)$ vu en 2.1 (plus précisément le groupe topologique abélien, réalisation géométrique du groupe simplicial des formes différentielles fermées de degré n) en posant $\alpha((x_i)) = \sum \beta(x_i)$, où β est l'application composée

$$S^n = S^1 \wedge \cdots \wedge S^1 \to Z^1 \wedge \cdots \wedge Z^1 \to Z^n = K(\mathbf{Z}, n).$$

Il est clair que α est une équivalence d'homotopie équivariante qui est en outre un homomorphisme de monoïdes.

2.3. La vérification précédente montre que $SP^\infty(S^n)$ peut être utilisé comme modèle de $K(\mathbf{Z}, n)$ pour définir la puissance p ième (p étant un nombre entier quelconque)

$$B\pi \times K(\mathbf{Z}, q) \to K(\mathbf{Z}, pq),$$

où π est le groupe symétrique (si q est pair) ou le groupe alterné (q quelconque). Au niveau cohomologique, l'application précédente définit ainsi une transformation naturelle:

$$P^\natural: H^q(X; \mathbf{Z}) \to H^{pq}(B\pi \times X; \mathbf{Z}).$$

Il convient de noter cependant que ce modèle d'espace $K(\mathbf{Z}, n)$ ne satisfait pas à tous les axiomes. D'une part, il n'est défini que pour $R = \mathbf{Z}$; d'autre part $SP^\infty(S^n)$ n'est pas un groupe. Nous allons voir en 2.4 et 2.5 comment pallier à ces défauts pour construire de manière correcte l'application $P^\natural$.

2.4. Nous procédons de même en cohomologie mod p, en remarquant que le monoïde quotient $SP^\infty(S^n)/pSP^\infty(S^n)$ (en fait un groupe), que nous noterons $SP^\infty(S^n)/p$, est un modèle de l'espace d'Eilenberg–Mac Lane $K(\mathbf{Z}/p, n)$ d'après [3]. L'application ϕ_* définie plus haut induit donc une application bilinéaire

$$SP^\infty(S^n)/p \wedge SP^\infty(S^m)/p \to SP^\infty(S^{n+m})/p$$

c'est-à-dire

$$K(\mathbf{Z}/p, n) \wedge K(\mathbf{Z}/p, m) \to K(\mathbf{Z}/p, n+m)$$

qui induit le cup-produit usuel en cohomologie mod p. La vérification des axiomes peut alors être conduite de la même manière, le nombre premier 2 n'étant plus exclus si q est impair. Nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^q(X; \mathbf{Z}) & \to & H^{pq}(B\pi \times X; \mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(X; \mathbf{Z}/p) & \to & H^{pq}(B\pi \times X; \mathbf{Z}/p) \end{array}$$

si q est pair (π quelconque), ou si q est impair (π inclus dans le groupe alterné). Si p est un nombre premier, les opérations $D_r: H^q(X) \to H^n(X)$ qu'on en déduit (avec $n = pq - r$), coïncident avec celles explicitées à la Section 1.

2.5. Pour pallier aux défauts de la construction précédente (qui ne s'applique qu'aux espaces d'Eilenberg–Mac Lane $K(R, n)$ avec $R = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/p$), on peut procéder de manière topologique ou simpliciale. La méthode topologique consiste à remplacer le produit symétrique infini $SP^\infty(X)$ par son groupe symétrisé $L(X)$. Alors, Dold et Thom démontrent dans [3] que $SP^\infty(X)$ et $L(X)$ ont le même type d'homotopie. Si R est un groupe abélien de type fini, $L(X) \otimes_{\mathbf{Z}} R$ est aussi un espace dont les groupes d'homotopie sont les groupes d'homologie de X à coefficients dans R. Ainsi, si X est la sphère S^n, on peut prendre comme "modèle" de $K(R, n)$ l'espace $L(S^n) \otimes_{\mathbf{Z}} R$. Si R est un groupe abélien dénombrable, limite inductive de ses sous-groupes de type fini R_α, on peut aussi définir $K(R, n) = \varinjlim L(S^n) \otimes_{\mathbf{Z}} R_\alpha$

Il est possible de "panacher" les deux modèles (simplicial et topologique) que nous venons de décrire en 2.1, 2.4 et 2.5. Si T est un ensemble simplicial, désignons par $L(T)$ le R-module simplicial libre de base T (en complète analogie avec la définition précédente). Il est bien connu que les groupes d'homotopie de $L(T)$ sont (presque par définition) les groupes d'homologie de T. On peut donc prendre comme modèle de $K(R, n)$ le R-module simplicial libre de base les simplexes singuliers de la sphère $S^n = S^1 \wedge \cdots \wedge S^1$ (n facteurs S^1): ses groupes d'homotopie sont les groupes d'homologie réduite de S^n. L'application canonique

$$S^n \wedge S^m \to S^{n+m}$$

induit le cup-produit usuel

$$K(R, n) \wedge K(R, m) \to K(R, n+m).$$

Par ailleurs, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur $K(R, n)$, car il opère sur la sphère $S^n = S^1 \wedge \cdots \wedge S^1$. La vérification des axiomes (a), (b) et (c) énoncés en 1.1 est immédiate compte tenu de [6, §2.12].

2.6. Pour retrouver les relations d'Adem dans notre contexte (cf. [10, pp. 2 et 77] et [8, p. 260]), considérons d'abord la puissance $\Psi^{p^2}: Z^q \to Z^{p^2 q}$: elle induit une opération cohomologique, notée de même $\Psi^{p^2}: H^q(X) \to H^{p^2 q}(B\mathfrak{S}_{p^2} \times X; \mathbf{R})$ (où $\mathbf{R}$ est le système local défini en 1.4 par la signature, R étant l'anneau $\mathbf{Z}/p$). Celle-ci induit

$$\phi^{p^2}: H^q(X) \to H^{p^2 q}(BC_p \times BC_p \times X),$$

soit $\phi^{p^2}(x) = \sum t_r \cdot t_s \cdot D_{r,s}(x)$, où les $t_i = x_i$ sont les générateurs privilégiés de $H^i(BC_p)$ (cf. †p. 702), le groupe $C_p \times C_p$ étant inclus dans $\mathfrak{S}_{p^2}$ de manière évidente.

LEMME† 2.7. *Nous avons la relation suivante*:

$$D_{r,s}(x) = (-1)^{rs+qp(p-1)/2} D_{s,r}(x).$$

Démonstration. Comme en 1.10, considérons d'abord le cas où q est pair. Le système local est alors trivial et $\phi^{p^2}(x)$ peut s'écrire $\sum t_r \cdot t_s \cdot D_{r,s}(x)$, en tant qu'élément de $\mathrm{Im}[H^{p^2q}(B\mathfrak{S}_{p^2} \times X) \to H^{p^2q}(BC_p \times BC_p \times X)]$, les cohomologies étant prises à coefficients dans $\mathbf{Z}/p$. L'automorphisme intérieur de $\mathfrak{S}_{p^2}$ (groupe des automorphismes de l'*ensemble* $C_p \times C_p$) induit par $(x, y) \mapsto (y, x)$ échange les deux facteurs C_p dans l'inclusion canonique de $C_p \times C_p$ dans $\mathfrak{S}_{p^2}$. Il induit donc l'identité sur l'image de l'homomorphisme précédent. Nous en déduisons la relation suivante:

$$\sum t_r \cdot t_s \cdot D_{r,s}(x) = \sum (-1)^{rs} \sum t_s \cdot t_r \cdot D_{r,s}(x) = \sum (-1)^{rs} \sum t_r \cdot t_s \cdot D_{s,r}(x)$$

d'où le lemme dans ce cas.

Si q est impair, on procède comme à la fin de 1.10 en remarquant que la permutation $(x, y) \mapsto (y, x)$ précédente est de signature $(-1)^{p(p-1)/2}$. La formule est modifiée en conséquence. □

2.8. Grâce au lemme précédent, les relations d'Adem peuvent être démontrées suivant la méthode explicitée en détail dans [10, pp. 118–122]: ces calculs assez fastidieux ne semblent pas pouvoir être évités (cf. cependant [8, p. 260]).

3. INTERPRÉTATION ALGÉBRIQUE. FORMES TOPOLOGIQUES NON COMMUTATIVES AVEC SYMÉTRIES ET COHOMOLOGIE ÉQUIVARIANTE

3.1. Commençons par décrire, pour tout ensemble simplicial X et tout entier n, un complexe de formes différentielles non commutatives en R-modules $\tilde{\Omega}^*(X)$ sur lequel le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère. Si $r \geq n$, on pose

$$\tilde{\Omega}^r(X) = \Omega^r(X) = \mathrm{Mor}(X, \Omega^r_*).$$

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère en faisant permuter les dernières "coordonnées" de Ω^n. Pour un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, son action (à droite) est ainsi décrite par la formule suivante (avec $r = m + n$):

$$\sigma(b_0 db_1 \cdots db_m \cdot da_1 \cdot da_2 \cdots da_n) = b_0 db_1 \cdots db_m \cdot da_{\sigma(1)} \cdot da_{\sigma(2)} \cdots da_{\sigma(n)}.$$

Si $r < n$, on pose

$$\tilde{\Omega}^r(X) = Z^n(\Delta_{n-r} \times X),$$

où Δ_i est le i-simplexe standard, le groupe $\mathfrak{S}_n$ opérant sur l'ensemble des formes différentielles non commutatives fermées (noté génériquement Z^n) comme il a été décrit en 2.1 et [6]. La différentielle $d: \tilde{\Omega}^r(X) \to \tilde{\Omega}^{r+1}(X)$ est la différentielle usuelle pour $r \geq n$. Pour $r < n$, elle est induite par la somme alternée des "opérateurs face". On obtient ainsi le $\mathfrak{S}_n$-complexe

$$\cdots \to Z^n(\Delta_2 \times X) \to Z^n(\Delta_1 \times X) \to \Omega^n(X) \to \Omega^{n+1}(X) \to \Omega^{n+2}(X) \to \cdots.$$

† Comparer avec [10, p. 117].

THEOREME 3.2. *Pour tout n, ce complexe est quasi-isomorphe au complexe de de Rham non commutatif* $\Omega^*(X)$.

Démonstration. Commençons par construire, par récurrence sur n, des formes différentielles non commutatives sur Δ_n, ω_n de degré n et χ_n de degré $n-1$ vérifiant les propriétés suivantes (Δ_{n-1} étant considérée comme la 0-face de Δ_n):

$$\omega_{n|\partial\Delta_n} = 0,$$

$$\omega_n = d\chi_n,$$

$$\chi_{n|\Delta_{n-1}} = \omega_{n-1},$$

la restriction de χ_n aux autres faces de Δ_n étant égale à 0. La forme différentielle ω_n doit aussi engendrer le groupe d'homotopie $\pi_n(Z^n) \approx H^n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \approx R$. Si $n = 1$, on pose $\chi_1 = x$, $\omega_1 = dx$, x étant la coordonnée locale de Δ_1. Supposons maintenant que ω_n et χ_n soient construits. Il existe alors une forme différentielle $\tilde{\omega}_{n+1}$ de degré n sur Δ_{n+1} dont les restrictions aux faces sont toutes 0, sauf la restriction à la 0-face qui est égale à ω_n (cf. [6, §2.3]). On pose alors $\chi_{n+1} = \tilde{\omega}_{n+1}$ et $\omega_{n+1} = d\chi_{n+1}$. Il est clair que le couple (χ_{n+1}, ω_{n+1}) satisfait aux conditions requises au cran $n+1$.

Définissons un morphisme

$$\varphi_{r,n} : \Omega^r(X) \to Z^n(\Delta_{n-r} \times X) \qquad (\mathscr{C})$$

par la formule

$$\varphi_{r,n}(\theta) = \omega_{n-r} \cdot \theta + (-1)^{n-r+1} \chi_{n-r} \cdot d\theta. \qquad (\mathscr{F})$$

On a la relation

$$d(\varphi_{r,n}(\theta)) = d\omega_{n-r} \cdot \theta + (-1)^{n-r} \omega_{n-r} \cdot d\theta + (-1)^{n-r+1} d\chi_{n-r} \cdot d\theta = 0$$

car $\omega_{n-r} = d\chi_{n-r}$. Par ailleurs

$$\varphi_{r+1,n}(d\theta) = \omega_{n-r} \cdot d\theta = (-1)^{n-r+1} \varphi_{r,n}(\theta)_{|\partial\Delta_{n-r}}.$$

Les $\varphi_{r,n}$ définissent donc bien un morphisme entre les deux complexes à condition de changer le signe de la différentielle sur le complexe $i \mapsto Z^n(\Delta_{n-i} \times X)$ de manière adéquate. Il faut maintenant vérifier que les $\varphi_{r,n}$ induisent un quasi-isomorphisme entre les complexes en question. En fait, les groupes de cohomologie du complexe de droite dans ($\mathscr{C}$) sont les groupes d'homotopie du groupe simplicial

$$i \mapsto Z^n(\Delta_i \times X).$$

En particulier, le i ème groupe d'homotopie est isomorphe au groupe de cohomologie $H^n(\Delta_i \times X, \partial\Delta_i \times X) \cong H^{n-i}(X)$ d'après la formule de Künneth. Cet isomorphisme est donné par le cup-produit avec le générateur de $H^i(\Delta_i, \partial\Delta_i)$, c'est-à-dire précisément ω_i. Autrement dit, $\varphi_{r,n}$ induit un isomorphisme

$$H^r(X) \cong H^{r+i}(\Delta_i \times X, \partial\Delta_i \times X),$$

ce qui est essentiellement le théorème annoncé. □

Remarque 3.3. On peut définir un morphisme en sens inverse

$$\phi_{r,n} : \Omega^n(\Delta_{n-*} \times X) \to \Omega^*(X)$$

qui induit un quasi-isomorphisme $Z^n(\Delta_{n-*}\times X)\to\Omega^*(X)$. En utilisant l'application évidente $\Omega^*(\Delta_i\times X)\to\Omega^*(\Delta_i)\otimes\Omega^*(X)$, il nous suffit pour cela de définir un "morphisme d'intégration":

$$I_s:\Omega^s(\Delta_s)\to R$$

compatible avec la "formule de Stokes", c'est-à-dire tel que

$$I_s(d\omega)=\sum_i I_{s-1}(\omega_i),$$

la somme étant étendue à toutes les faces de Δ_s. La formule adéquate pour I_s est alors la suivante:

$$I_s(f^0\cdot df^1\cdots df^s)=f^0(0)\cdot(f^1(1)-f^1(0))\cdot(f^2(2)-f^2(1))\cdots(f^s(s)-f^s(s-1)),$$

c'est-à-dire la cochaîne semi-normalisée associée à la forme différentielle non commutative $f^0\cdot df^1\cdots df^s$ appliquée à la chaîne $(0,1,\dots,s)$ (cf. [6, §2.9]).

Remarque 3.4. On peut remplacer les formes différentielles non commutatives sur $\Delta_s\times X$ par les formes différentielles sur $K_s\times X$, où K_s est un "cube" de dimension s. Ce changement permet de définir simplement une structure multiplicative sur le R-module $\bigoplus_s Z^*(K_s\times X)$ (cf. †p. 714).

3.5. Une démonstration plus conceptuelle du Théorème 3.2 est obtenue en considérant le bicomplexe suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & \Omega^{n-2}(X\times\Delta_2) & \to & \Omega^{n-2}(X\times\Delta_1) & \to & \Omega^{n-2}(X) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & \Omega^{n-1}(X\times\Delta_2) & \to & \Omega^{n-1}(X\times\Delta_1) & \to & \Omega^{n-1}(X) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & Z^n(X\times\Delta_2) & \to & Z^n(X\times\Delta_1) & \to & Z^n(X) & \to & 0
\end{array}$$

Dans ce bicomplexe, toutes les lignes sont acycliques à l'exception éventuelle de la dernière (car les groupes d'homotopie des Ω^j sont nuls). Donc l'homologie H_r du complexe total est isomorphe à $H_r(Z^n(X\times\Delta_*))$. Par ailleurs l'homologie des colonnes ne change pas lorsqu'on remplace les $X\times\Delta_j$ par X (lemme de Poincaré), auquel cas les colonnes C_{2i} et C_{2i-1} sont isomorphes pour $i>0$ par les flèches horizontales. Donc l'homologie du complexe total est isomorphe à celle de la dernière colonne et on en déduit l'isomorphisme cherché $H^{n-r}(X)\cong H_r(Z^n(X\times\Delta_*))$.

3.6. Les opérations de Steenrod décrite dans la Section 2 avec des méthodes simpliciales. sont déduites de la puissance p ième:

$$Z^n\to Z^{pn}$$

qui est équivariante pour l'action de $\mathfrak{S}_p$ opérant trivialement sur Z^n et par permutation des blocs sur Z^{pn}. On en déduit une application

$$Z^n(X)\to Z^{pn}(X)$$

qui est aussi équivariante. Nous interprètons ici $Z^{pn}(X)$ comme un élément du complexe équivariant de R-modules vu plus haut $D_* = Z^{pn}(\Delta_* \times X)$:

$$\cdots \to Z^{pn}(\Delta_2 \times X) \to Z^{pn}(\Delta_1 \times X) \to Z^{pn}(X) \to 0 \qquad (D_*)$$

(action de $\mathfrak{S}_{pn}$, donc de $\mathfrak{S}_p \subset \mathfrak{S}_{pn}$; cf. 1.1 et 2.1; il convient de noter que $H_r(D_*)$ est isomorphe à $H^{pn-r}(X)$: cf. 3.2).

Pour un sous-groupe arbitraire π de $\mathfrak{G}_p$, la puissance p ième définit une application simpliciale équivariante (cf. 2.1):

$$Z^n \times E\pi \to Z^{pn}.$$

A tout élément ω de $Z^n(X) = \mathrm{Mor}(X, Z^n)$ on peut ainsi associer par composition des morphismes une application simpliciale équivariante

$$X \times E\pi \to Z^{pn},$$

donc de $E\pi$ dans le $R[\pi]$-module simplicial $\mathrm{Mor}(X, Z^{pn})_*$, où $\mathrm{Mor}(X, Z^{pn})_i$ est le $R[\pi]$-module $\mathrm{Mor}(\Delta_i \times X, Z^{pn})$†. D'autre part, désignons de manière générale par $\underline{Z}^m$ l'espace $K(R, m)$, où $\mathfrak{S}_m$ opère via la signature. D'après [6], il existe une équivalence d'homotopie équivariante $\underline{Z}^m \to Z^{pn}$ et l'application $X \times E\pi \to Z^{pn}$ ci-dessus est homotope parmi les applications équivariantes à une application $X \times E\pi \to \underline{Z}^{pn}$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times E\pi \arrow[r] \arrow[dr] & \underline{Z}^{pn} \arrow[d] \\ & Z^{pn} \end{tikzcd}$$

soit homotopiquement commutatif. De manière plus précise, choisissons comme modèle de $E\pi$ l'ensemble simplicial bien connu suivant ('bar-résolution'):

$$\cdots \pi \times \pi \times \pi \;\substack{\longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow}\; \pi \times \pi \;\substack{\longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow}\; \pi$$

et comme modèle de $D_* = \mathrm{Mor}(X, Z^{pn})_*$ le complexe de $R[\pi]$-modules explicité ci-dessus. Soit $\underline{D}_*$ le complexe

$$\cdots \to \underline{Z}^{pn}(\Delta_2 \times X) \to \underline{Z}^{pn}(\Delta_1 \times X) \to \underline{Z}^{pn}(X) \to 0 \quad (\underline{D}_*)$$

On déduit de ce qui précède des morphismes équivariants de $R[\pi]$-complexes

$$\begin{tikzcd} C_*(\pi) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mu"] & \mathbf{R}_* \arrow[d] \\ \underline{D}_* \arrow[r] & D_* \end{tikzcd}$$

où $C_*(\pi) = E\pi \otimes R$, soit $C_n(\pi) = R[\pi^{n+1}]$, où $\mathbf{R}_* = R$ en degré 0, 0 ailleurs et où λ est l'augmentation. Dans le diagramme précédent qui commute à homotopie près, les flèches horizontales sont des quasi-isomorphismes. Soit R_ε le système local sur $B\pi$ induit par la signature sur Z^{pn} et soit $\underline{F}_* = \underline{D}_* \otimes R_\varepsilon$; $\underline{F}_*$ est donc le sous-complexe des formes invariantes

† Il convient de rappeler ici l'équivalence des catégories des complexes de chaînes et des groupes abéliens simpliciaux (Dold). Grâce à cette équivalence, on peut identifier le $k[\pi]$-module simplicial $\mathrm{Mor}(X, Z^{pn})_*$ au complexe (D_*) ci-dessus (à homotopie près).

par l'action du groupe $\mathfrak{S}_{pn}$ tordue par la signature. Du diagramme précédent, on déduit un $R(\pi)$-homomorphisme $\mu' : C_*(\pi) \otimes R_\varepsilon \to \underline{F}_*$ bien défini à homotopie près, donc une classe d'homologie en degré 0 du complexe $\mathrm{Hom}_{R[\pi]}(C_*(\pi) \otimes R_\varepsilon, \underline{F}_*)$. Puisque cette homologie est précisément le groupe de cohomologie $H^{pn}(B\pi \times X; R_\varepsilon)$, on retrouve bien de manière algébrique les résultats de 1.4. La discussion précédente se résume ainsi par le théorème suivant:

THEORME 3.7. *Soit ω une forme différentielle non commutative fermée appartenant au R-module $Z^n(X)$. Alors, l'homomorphisme de complexes associé*

$$\mu : C_*(\pi) \otimes R_\varepsilon \to \underline{F}_*$$

défini plus haut à homotopie près, où $\underline{F}_*$ est le complexe

$$\cdots \to \underline{Z}^{pn}(\Delta_2 \times X) \to \underline{Z}^{pn}(\Delta_1 \times X) \to \underline{Z}^{pn}(X) \to 0$$

avec action de π triviale, définit un élément de $H_0(\mathrm{Hom}(C_*(\pi) \otimes R_\varepsilon, \underline{F}_*)) \cong H^{pn}(B\pi \times X; R_\varepsilon)$. Celui-ci coïncide avec l'image de la classe de ω par l'homomorphisme

$$H^n(X) \to H^{pn}(B\pi \times X; R_\varepsilon)$$

défini en 1.4.

3.8. En conclusion, le résultat final ainsi décrit en 3.7 peut faire abstraction des considérations simpliciales de la Section 2. En effet, tout repose sur des morphismes équivariants de complexes ($\mathbf{R}_*$ concentré en degré 0 avec $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}$) associés à une forme fermée ω de degré n sur X:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}_* \arrow[r] & Z^{pn}(\Delta_* \times X) \\ C_*(\pi) \arrow[u] \arrow[r] & \underline{Z}^{pn}(\Delta_* \times X) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif à homotopie près et les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes. En considérant les complexes d'homomorphismes associés, convenablement tordus par la signature, on en déduit les opérations de Steenrod (avec la normalisation explicitée en 1.5 pour $R = \mathbf{Z}/p$). Les calculs précédents n'ont fait que vérifier la compatibilité de ces opérations avec celles introduites dans la Section 1.

3.9. Ce qui précède peut être transcrit dans le cadre topologique décrit dans [7] (cf. aussi 2.2–2.5). Il convient de remplacer Δ_n par la boule B^n, $\partial\Delta_n$ par la sphère S^{n-1}. Le $\mathbf{Z}$-module des "formes topologiques non commutatives" (FTNC) de degré r sur le CW-complexe pointé M s'identifie alors à l'ensemble des application continues pointées de M dans $L(B^{r+1})$. En copiant ce qui a été fait au début de 3.2, on construit par récurrence sur n des FTNC ω_n et χ_n sur B^n, de degré n et $n-1$ respectivement, vérifiant les conditions suivantes: $\omega_{n|S^{n-1}} = 0, \omega_n = d\chi_n, \chi_{n|B_{n-1}} = \omega_{n-1}$, la restriction devant ici être interprétée comme l'image réciproque de χ_n par l'application composée $B^{n-1} \to S^{n-1} \to B^n$. La non trivialité de ces formes est assurée par la propriété suivante: l'application de S^n dans $L(S^n)$ induite par ω_n est de degré 1. Voici les premiers pas de ce raisonnement par récurrence (tout à fait analogue à celui explicité en 3.2): χ_1 est l'inclusion canonique de B^1 dans $L(B^1)$, ω_1 est l'application composée $B^1 \to L(B^1) \to L(B^2)$; χ_2 est une extension quelconque de ω_1 à B^2 et $\omega_2 = d\chi_2$ est l'application composée $B^2 \to L(B^2) \to L(B^3)$, etc. En remplaçant la construction $L(M)$ de

Dold–Thom (2.3) par $L(M) \otimes_{\mathbf{Z}} R$, où R est un anneau qui est en outre un groupe abélien de type fini, on raisonne de même pour les FTNC à coefficients dans R.

Grâce à cette interprétation topologique, le morphisme

$$\varphi_{r,n} : \Omega^r(M) \to Z^n(B^{n-r} \times M)$$

peut être aussi défini par la formule $(\mathscr{F})$ de 3.2, M étant maintenant un CW-complexe, l'espace des "cocycles" $Z^n(N)$ s'interprétant de manière générale comme l'ensemble $\mathrm{Mor}(N, L(S^n))$ formé des applications continues pointées de N dans $L(S^n)$.

3.10. Les considérations de 3.6–3.8 se transcrivent également dans le cadre topologique. Plus précisément, $Z^m(\Delta_n \times X)$ est remplacé par $\mathrm{Mor}(B^n \times M, L(S^m))$† et, pour $m \geq n$, on pose

$$\Omega^n_{(m)}(M) = Z^m(B^{m-n} \times M) = \mathrm{Mor}(B^{m-n} \times M, L(S^m)).$$

Cet espace de formes topologiques non commutatives sera désigné comme celui des "*formes de degré n et de symétrie m*". Cette terminologie est justifiée par l'action naturelle du produit des groupes symétriques $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{m-n}$ sur $\Omega^n_{(m)}(M)$. L'action de $\mathfrak{S}_m$ est "homotopiquement équivalente" à celle définie par la signature. D'autre part, puisque $B^n \times B^m$ est naturellement homéomorphe à B^{n+m} (ce qui est un avantage par rapport à la situation simpliciale; cf. aussi 3.4), il est clair qu'on peut définir un cup-produit

$$\Omega^n_{(m)}(M) \times \Omega^n_{(m)}(N) \to \Omega^{n+q}_{(m+p)}(M \wedge N)$$

qui vérifie les mêmes propriétés formelles que celles décrites dans les axiomes énoncés en 1.1 (équivariance et contrôle de la non-commutativité‡). En particulier, le cup-produit par la forme χ_1 vue en 3.3 permet d'inclure $\Omega^n_{(m)}(M)$ dans $\Omega^n_{(m+1)}(M)$ de manière équivariante.

On voit ainsi que la donnée de ces formes "avec symétries" (analogues algébriques des considérations topologiques de 1.1) permet de construire aussi les opérations de Steenrod (avec $R = \mathbf{Z}/p$). Pour cela, il suffit de considérer un diagramme analogue à celui décrit en 3.8:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_* & \longrightarrow & \Omega^{pn-*}_{(pn)}(M) \\ \uparrow & & \uparrow \\ C_*(\pi) & \longrightarrow & \underline{\Omega}^{pn-*}_{(pn)}(M) \end{array}$$

REFERENCES

1. H. Cartan: Théories cohomologiques, *Invent. Math.* **35** (1976), 261–271.
2. A. Connes: Non commutative differential geometry, *Publ. Math. IHES* **62** (1985), 257–360.
3. A. Dold et R. Thom: Quasifaserungen und unendliche symmetrische produkte, *Ann. Math.* **67** (1958), 239–281. Voir aussi: une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinis, *C.R. Acad. Sci. Paris* **242** (1956), 1680–1682.
4. B. Gray: *Homotopy theory*, Academic Press, New York (1975).

---

† Notons que B^n est interprété ici comme $(B^1)^n$ avec $B^1 = [0, 1]$; $\mathrm{Mor}(B^n \times M, L(S^n))$ est formé des applications continues f de $B^n \times M$ dans $L(S^n)$ telles que $f(b, m) = 0$ si l'une des coordonnées de $b \in B^n$ est egale a 0. Le bord de f est la somme des $(-1)^{i-1} f_i$, où f_i est l'application de $B^{n-1} \times M$ dans $L(S^n)$ obtenue en faisant la i ième coordonnées de b égale à 1.

‡ C'est l'action de $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{m-n}$ qui contrôle la non-commutativité du produit des formes.

5. M. KAROUBI: *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **316** (1993), 833–836; *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **316** (1993), 917–920 (résumé de [6]).
6. M. KAROUBI: Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires (soumis pour publication); cf. aussi [5].
7. M. KAROUBI: Formes topologiques non commutatives, à paraître aux *Annals Scientifiques de l'ENS*.
8. J.E. MCCLURE: *Power operations in H^d_∞ ring theories*, Springer Lecture Notes **1176** (1986).
9. P. MAY: *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand Reinhold, New York (1967).
10. N. STEENROD et D. EPSTEIN: *Cohomology operations*, Annals of Math. Studies, **50**, Princeton University Press, Princeton, NJ (1962).

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

Il existe bien sûr d'autres méthodes pour définir les opérations de Steenrod. Voici une liste de quelques références qui m'ont été communiquées par Dold et May (en supplément de [8] et [10] mentionnées plus haut). On y trouvera de nombreuses similitudes avec les développements de cet article. Il ne semble pas cependant que l'action de groupes symétriques sur les espaces d'Eilenberg–Mac Lane y soit exploitée de manière systématique.

D. PUPPE: *Ann. Math.* **70** (1959), 379–394.
E. SPANIER: *Ann. Math.* **69** (1959), 142–197.
A. DOLD: *Ann. Math.* **73** (1961), 258–294.
NAKAMURA: (i) *Sci. papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo* **9** (1959), 1–16; (ii) *Japan J. Math.* **33** (1963), 93–145.
D. EPSTEIN: *Invent. Math.* **1** (1966), 152–208.
T. TOM DIECK: *Math. Zeitschtr.* **107** (1968), 380–401.
P. MAY: A general approach to Steenrod operations, Springer Lecture Notes 168 (1970), pp. 153–231.

Université Paris 7
UFR de Mathématiques
Equipe Théories Géometriques
2 Place Jussieu
Case Postale 7012
75251 Paris Cedex 05
France