

Formes différentielles non commutatives et opérations de Steenrod

Max KAROUBI

Résumé – Dans cette Note, nous utilisons la théorie des formes différentielles non commutatives ([2], [4], [5]) pour définir les opérations de Steenrod en Topologie algébrique [6] au niveau des espaces classifiants en cohomologie. Nous en décrivons les propriétés essentielles et donnons une interprétation en termes des produits symétriques infinis introduits par Dold et Thom [3].

Non-commutative differential forms and Steenrod operations

Abstract – In this Note, we apply the theory of non-commutative differential forms ([2], [4], [5]) in order to define the Steenrod operations in Algebraic Topology [6] on the level of classifying spaces in cohomology. We describe their main properties and give an interpretation of them in terms of infinite symmetric products, as introduced by Dold and Thom [3].

1. OPÉRATIONS DE STEENROD. – Soit p un nombre entier quelconque. L'application qui, à une forme différentielle non commutative ω de degré q sur la k -algèbre A (cf. [5]), associe la forme différentielle $\omega^{\otimes p} = \omega \cdot \omega \cdot \dots \cdot \omega$ (produit de p facteurs ω) induit une application

$$\Omega^q(A) \rightarrow \Omega^{pq}(A)$$

Si on remplace A par l'algèbre $(^1)$ simpliciale $[s] \mapsto A_s$ considérée dans la Note précédente [5], cette application est compatible avec les structures simpliciales. Elle induit une application « puissance p -ième entre les espaces d'Eilenberg-Mac Lane associés (avec les définitions et notations de [5]) :

$$P: Z^q \rightarrow Z^{pq}$$

Celle-ci est équivariante pour l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_p opérant trivialement sur Z^q et opérant sur Z^{pq} comme il a été explicité dans la Note [5], via l'inclusion évidente de \mathfrak{S}_p dans \mathfrak{S}_{pq} .

Soit maintenant π un sous-groupe de \mathfrak{S}_p et soit $E\pi \rightarrow B\pi$ le fibré principal universel de groupe π . L'application P induit alors un morphisme P_* entre les fibrés de Borel associés :

$$\begin{array}{ccc} B\pi \times Z^q = E\pi \times_{\pi} Z^q & \rightarrow & E\pi \times_{\pi} Z^{pq} \\ & \searrow & \swarrow \\ & B\pi & \end{array}$$

Dans les trois exemples suivants : π inclus dans le groupe alterné; q pair; ou $2=0$ dans k , l'espace $E\pi \times_{\pi} Z^{pq}$ a le type d'homotopie de $B\pi \times Z^{pq}$, car π opère de manière « homotopiquement triviale » sur Z^{pq} (cf. la fin du paragraphe 3 de [5]). En général, P_* induit une application $P_{**}: Z^q \rightarrow \mathcal{S}(\xi)$, où $\mathcal{S}(\xi)$ désigne l'espace des sections de la fibration $E\pi \times_{\pi} Z^{pq} \rightarrow B\pi$. En effet, à la forme fermée ω on peut associer la section $u \mapsto (\tilde{u}, \omega^{\otimes p})$, où $u \in B\pi$ et où \tilde{u} est un élément de $E\pi$ se projetant en u . Puisque $\omega^{\otimes p}$ est une forme invariante par l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_p , la classe du couple $(\tilde{u}, \omega^{\otimes p})$ dans $E\pi \times_{\pi} Z^{pq}$ est indépendante du choix de \tilde{u} .

Note présentée par Alain CONNES.

Par ailleurs, l'espace des applications de X dans $\mathcal{S}(\xi)$ s'identifie à $H^{pq}(\mathbf{B}\pi \times X; \mathbf{k})$, où \mathbf{k} désigne le système de coefficients locaux sur $\mathbf{B}\pi \times X$ induit par l'homomorphisme composé $\pi_1(\mathbf{B}\pi \times X) \rightarrow \pi_1(\mathbf{B}\pi) \xrightarrow{\sigma} k^*$, où σ est la signature si q est impair et est trivial si q est pair. Ainsi, pour tout espace X et tout anneau de coefficients k , le morphisme $P_{**} : Z^q \rightarrow \mathcal{S}(\xi)$ induit une application (qui n'est pas additive en général)

$$H^q(X; k) \cong [X, Z^q] \rightarrow H^{pq}(\mathbf{B}\pi \times X; \mathbf{k})$$

En particulier, soit k le corps fini \mathbf{Z}/p et soit π le groupe cyclique d'ordre p (p premier). Le système de coefficients locaux \mathbf{k} est alors trivial. D'après la formule de Künneth, nous avons

$$H^{pq}(\mathbf{B}\pi \times X) \cong \bigoplus_r [H^r(\mathbf{B}\pi) \otimes H^{pq-r}(X)] \cong \bigoplus_r H^{pq-r}(X)$$

(les cohomologies étant prises à coefficients dans k et le dernier isomorphisme dépendant du choix ⁽²⁾ des générateurs x_r de $H^r(\mathbf{B}\pi) \cong k$). Ainsi, pour tout r , l'application précédente induit une opération cohomologique

$$D_r : H^q(X) \rightarrow H^n(X)$$

avec $n = pq - r$.

THÉORÈME. — L'opération D_r définie ci-dessus est un homomorphisme de k -modules. Elle est triviale si $n < q$. Si $p = 2$, elle coïncide avec le carré de Steenrod Sq^{n-q} . Si p est impair, l'opération cohomologique est triviale, sauf dans les cas suivants :

- q pair, $n \geq q$ et $n = pq - 2i(p-1)$ ou $pq - 2i(p-1) + 1$
- q impair, $n \geq q$ et $n = pq - (2i+1)(p-1)$ ou $pq - (2i+1)(p-1) + 1$.

Dans ces deux cas, pour $n - q$ pair, l'opération cohomologique obtenue :

$$Q^i : H^q(X) \rightarrow H^{q+2i(p-1)}(X)$$

est l'opération P^i de Steenrod divisée par le facteur de normalisation explicité dans [6] p. 112, soit $(-1)^r (m!)^q$, où $m = (p-1)/2$ et $r = i + m(q^2 + q)/2$. Enfin, si q est pair ou p impair, on a $\beta \cdot P = 0$, où $P : H^q(X) \rightarrow H^{pq}(\mathbf{B}\pi \times X)$ est défini par $P(x) = \sum x_r \cdot D_r(x)$ et où $\beta : H^{pq}(\mathbf{B}\pi \times X) \rightarrow H^{pq+1}(\mathbf{B}\pi \times X)$ est l'homomorphisme de Bockstein (la cohomologie étant prise à coefficients dans \mathbf{Z}/p).

2. ESQUISSE DE DÉMONSTRATION. — Il suffit de vérifier les axiomes des opérations de Steenrod Sq^i ou P^i qui sont énoncés dans [6]. Dans notre contexte, cette vérification est basée sur les propriétés suivantes que vérifient les groupes abéliens simpliciaux définis à l'aide de formes différentielles non commutatives :

(a) Construction d'un modèle pointé de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(k, n)$ sur lequel le groupe symétrique \mathfrak{S}_n opère. Cette action de \mathfrak{S}_n induit la multiplication par la signature sur la cohomologie en degré n . L'action induite par le groupe alterné π (ou le groupe symétrique lui-même si $2=0$ dans k) est homotopiquement triviale dans le sens précisé au paragraphe 3 de la Note [5] : il existe une suite de modèles équivariants de $K(k, n)$, soient X_r , $r = 1, \dots, 2s$, et des applications équivariantes $X_1 \rightarrow X_2 \leftarrow X_3 \rightarrow \dots \rightarrow X_{2s}$, où X_1 est le modèle donné et où π opère trivialement sur X_{2s} . En particulier, l'espace de Borel associé $E\pi \times_{\pi} K(k, n)$ a le type d'homotopie fibré de $\mathbf{B}\pi \times K(k, n)$.

(b) Le cup-produit en cohomologie est induit par des accouplements

$$K(k, n) \wedge K(k, m) \rightarrow K(k, n+m)$$

qui sont associatifs en un sens évident et qui sont équivariants pour l'action du sous-groupe $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ de \mathfrak{S}_{n+m} .

(c) Si $\phi_{n,m}$ désigne l'accouplement précédent, si $\omega_n \in K(k, n)$ et $\theta_m \in K(k, m)$, on a $\phi_{n,m}(\omega_n, \theta_m) = \sigma^*(\phi_{m,n}(\theta_m, \omega_n))$, où σ^* est l'automorphisme de $K(k, n+m)$ associé à la permutation de $\{1, 2, \dots, n+m\}$, échangeant les n premiers et m derniers objets (en les conservant dans le même ordre).

Grâce aux axiomes (a), (b) et (c), nous pouvons construire une application « puissance p -ième » :

$$K(k, q) \rightarrow K(k, pq),$$

qui est équivariante pour l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_p , et lui appliquer la construction de Borel. L'axiome (a) permet de déterminer l'ensemble des classes d'homotopie de X dans $\mathcal{S}(\xi)$. Grâce aux axiomes (b) et (c), nous vérifions la formule de Cartan (pour $k = \mathbf{Z}/p$). Par ailleurs, il existe une application de degré un de $S^n = S^1 \wedge \dots \wedge S^1$ dans $K(k, n)$ qui est équivariante, le groupe \mathfrak{S}_n opérant sur la sphère S^n en permutant les facteurs S^1 . En outre, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S^n \wedge S^m & \rightarrow & S^{n+m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(k, n) \wedge K(k, m) & \rightarrow & K(k, n+m) \end{array}$$

Cette dernière remarque permet d'achever la normalisation des opérations D_r : il suffit de calculer la classe d'Euler d'un fibré vectoriel sur un espace lenticulaire adéquat.

3. GÉNÉRALISATION. — Cette présentation axiomatique « constructive » des opérations de Steenrod nous amène à poser la question de l'existence d'autres modèles de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(k, n)$ vérifiant les axiomes, au moins pour $k = \mathbf{Z}$ ou \mathbf{Z}/p . Un modèle possible est relié à la construction de Dold-Thom du produit symétrique infini $S^\infty(T)$ d'un CW-complexe pointé connexe T [3] : ses groupes d'homotopie sont isomorphes aux groupes d'homologie réduite de T , l'application canonique de T dans son produit symétrique infini induisant l'homomorphisme de Hurewicz. Par ailleurs $S^\infty(T)$ est un monoïde abélien de manière évidente pour la loi

$$(t, u) \mapsto t * u = (t_1, u_1, t_2, u_2, \dots, t_n, u_n, \dots),$$

où $t = (t_i)$ et $u = (u_i)$, $i \in \mathbf{N}$, sont deux éléments de $S^\infty(T)$. Enfin, si $\phi : T \wedge U \rightarrow V$ est une application continue quelconque, elle induit une « multiplication » bilinéaire sur les produits symétriques infinis associés :

$$\phi_* : S^\infty(T) \wedge S^\infty(U) \rightarrow S^\infty(V)$$

par la formule suivante

$$\phi_*(t, u) = (\phi(t_i, u_j)),$$

si t est la suite (t_i) et u la suite (u_j) , i et $j \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ étant identifié à \mathbf{N}).

En particulier, considérons le cas de la sphère $S^n = S^1 \wedge \dots \wedge S^1$. Alors $S^\infty(S^n)$ est un modèle de l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbf{Z}, n)$ sur lequel le groupe symétrique \mathfrak{S}_n opère par permutation des facteurs S^1 . L'application canonique de $S^n \wedge S^m$ dans S^{n+m} induit une application $K(\mathbf{Z}, n) \wedge K(\mathbf{Z}, m) \rightarrow K(\mathbf{Z}, n+m)$ qui définit le cup-produit en cohomologie. Les axiomes (b) et (c) sont évidents. Pour vérifier l'axiome (a), nous définissons une application α de $S^\infty(S^n)$ dans la réalisation géométrique de notre modèle simplicial de $K(\mathbf{Z}, n)$ (qui est un groupe topologique abélien) en posant

$$\alpha((x_i)) = \sum \beta(x_i),$$

où β est l'application canonique de S^n dans $K(\mathbf{Z}, n)$. Il est clair que α est une équivalence d'homotopie équivariante qui est en outre un homomorphisme de monoïdes.

La vérification précédente montre que $S^\infty(S^n)$ peut être utilisé comme modèle de $K(\mathbf{Z}, n)$ pour définir une application puissance p -ième (pour tout nombre entier p)

$$B\pi \times K(\mathbf{Z}, q) \rightarrow K(\mathbf{Z}, pq),$$

où π est le groupe symétrique (si q est pair) ou le groupe alterné (q quelconque). Au niveau cohomologique, l'application précédente définit ainsi une transformation naturelle

$$P: H^q(X; \mathbf{Z}) \rightarrow H^{pq}(B\pi \times X; \mathbf{Z})$$

Nous pouvons procéder de même en cohomologie mod. p , en remarquant que le groupe quotient $S^\infty(S^n)/pS^\infty(S^n)$ est un modèle de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbf{Z}/p, n)$ d'après [3]. L'application ϕ_* définie plus haut induit donc une application bilinéaire

$$S^\infty(S^n)/pS^\infty(S^n) \wedge S^\infty(S^m)/pS^\infty(S^m) \rightarrow S^\infty(S^{n+m})/pS^\infty(S^{n+m})$$

c'est-à-dire

$$K(\mathbf{Z}/p, n) \wedge K(\mathbf{Z}/p, m) \rightarrow K(\mathbf{Z}/p, n+m)$$

qui induit le cup-produit usuel en cohomologie mod. p . La vérification des axiomes peut alors être conduite de la même manière, sauf que le nombre premier $p=2$ n'est plus exclu si q est impair. Nous avons enfin un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^q(X; \mathbf{Z}) & \rightarrow & H^{pq}(B\pi \times X; \mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(X; \mathbf{Z}/p) & \rightarrow & H^{pq}(B\pi \times X; \mathbf{Z}/p) \end{array}$$

si q est pair (π quelconque), ou si q est impair (π inclus dans le groupe alterné). Si p est un nombre premier, les opérations $D_r: H^q(X) \rightarrow H^n(X)$ qu'on en déduit pour $n=pq-r$, coïncident avec celles définies dans le théorème du paragraphe 1.

⁽¹⁾ Le même raisonnement s'applique à l'algèbre simpliciale $[s] \mapsto \bar{A}_s$ considérée également dans [5].

⁽²⁾ Si p est impair, l'algèbre de cohomologie $H^*(B\pi)$ est le produit tensoriel d'une algèbre de polynômes $k[x]$ par une algèbre extérieure $\Lambda(y)$ avec $\deg(x)=2$ et $\deg(y)=1$. On a $\beta(y)=x$, où β désigne le Bockstein. Si on choisit $x_1=y \in H^1(B\pi) = \text{Hom}(\pi, \pi)$ égal à l'application identique de π , $x_{2n}=x^n$ et $x_{2n+1}=y \cdot x^n$, les générateurs x_r de $H^r(B\pi)$ sont bien déterminés. Si $p=2$, l'algèbre de cohomologie $H^*(B\pi)$ est une algèbre de polynômes $k[y]$ avec y de degré 1; on choisit alors $x_r=(y)^r$.

Note remise le 26 novembre 1992, acceptée le 27 novembre 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] H. CARTAN, Théories cohomologiques, *Invent. Math.*, 35, 1976, p. 261-271.
- [2] A. CONNES, Non commutative differential geometry, *Publ. Math. IHES*, n° 62, 1985, p. 257-360.
- [3] A. DOLD et R. THOM, Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinis, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 242, 1956, p. 1680-1682.
- [4] M. KAROUBI, *Homologie cyclique et K-théorie*, Astérisque, 149, 1987, Société Mathématique de France.
- [5] M. KAROUBI, Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 316, série I, 1993, p. 833-836.
- [6] N. STEENROD et D. EPSTEIN, *Cohomology operations*, Ann. of Math. Studies, n° 50, Princeton University Press, 1962.