Rapport sur la K-théorie (1956–1997)

Max Karoubi

Université Paris 7-Denis Diderot

Le but de ce rapport est d'introduire le mathématicien profane à la "K-théorie", terminologie qui peut lui paraître énigmatique au premier abord. Comme il est expliqué de manière détaillée dans le premier paragraphe, c'est en 1956 que Grothendieck eut l'idée d'associer à une variété algébrique X un invariant très voisin de la cohomologie et qu'il nota $K(X)$, la lettre K signifiant une classe ("Klassen" en allemand) d'objets naturellement associée à X. Faute de mieux, cette terminologie a résisté à l'épreuve du temps...

En fait, comme M. Jourdain pratiquait de la prose sans le savoir, on peut prétendre que tout mathématicien utilise la K-théorie. De manière purement algébrique, si M est un *monoïde* abélien, on sait lui associer un *groupe* abélien $S(M)$ de manière naturelle: c'est le quotient de $M \times M$ par la relation d'équivalence qui identifie le couple (x, y) au couple (x', y') s'il existe z tel que $x + y' + z = x' + y + z$ [penser à la classe du couple (x, y) comme la "différence" $x - y$ dans ce groupe]. Si M est le monoïde des entiers naturels $\mathbb{N}$ par exemple, $S(M)$ est le groupe des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

Une des raisons du succès de la K-théorie est que ce processus de "symétrisation" se rencontre dans plusieurs domaines des mathématiques et que le groupe $S(M)$ est susceptible d'être un invariant assez fin dans des situations très diverses.

Dans l'exemple des entiers naturels, il convient de noter que M s'identifie aussi à l'ensemble des k-espaces vectoriels de dimension finie, pris à isomorphisme près, k étant un corps quelconque. La structure de monoïde est alors induite par la somme directe des espaces vectoriels. On peut donc voir la "K-théorie" comme une généralisation de la notion de dimension d'un espace vectoriel. Notons cependant que la symétrisation dépend du choix du monoïde M. Si par exemple M est le monoïde de *tous* les espaces vectoriels de dimension dénombrable, on a $x + \infty = \infty$, où ∞ désigne la classe d'un espace vectoriel de dimension infinie; d'où $x = 0$ dans $S(M)$. Puisque tout élément de $S(M)$ s'écrit sous la forme $x - y$, on a $S(M) = 0$.

Remplaçons maintenant le corps k par un anneau A unitaire quelconque (non nécessairement commutatif). L'analogue d'un k-espace vectoriel est un A-module E (à droite pour fixer les idées). La finitude de la dimension est alors remplacée par l'hypothèse suivante: E est un facteur direct de A^n pour un certain n[1]. Si M désigne l'ensemble des classes d'isomorphie de tels modules, on désigne par $K(A)$ le groupe symétrisé de M: c'est la "K-théorie algébrique"[2] de l'anneau A.

La simplicité de cette définition peut faire illusion: dans des exemples courants, il est souvent difficile de "calculer" le monoïde M. Le groupe $K(A) = S(M)$ se révèle en général plus accessible, ce qui est conforme à la philosophie générale d'un mathématicien:

[1] Un tel module est dit projectif de type fini.

[2] Une K-théorie "topologique" sera définie plus loin dans un autre contexte.

mieux vaut travailler avec un groupe qu'avec un monoïde, où la soustraction n'est pas permise...

Voici quelques exemples d'anneaux A dont la K-théorie $K(A)$ se révèle intéressante:

a) A est l'anneau des entiers algébriques d'un corps de nombres[3]. On démontre alors que $K(A) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ est un groupe fini: $\mathcal{T}$ est le groupe des classes d'idéaux de A, introduit par Kummer au siècle dernier [M]. Ce résultat laisse entrevoir des applications du sujet à la théorie des nombres.

b) $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$, où I représente l'idéal des fonctions algébriques qui s'annulent sur une variété complexe algébrique affine X; $K(A)$ est alors essentiellement le groupe $K(X)$ de Grothendieck[4]. D'après un théorème bien connu de Serre, on peut remplacer dans cette définition le monoïde M par celui des classes d'isomorphie de fibrés algébriques sur X.

Malgré les nombreux théorèmes sur le sujet démontrés à l'heure actuelle, il n'existe pas de méthode générale pour calculer $K(X)$ en général. Par contre, de nombreux morphismes de $K(X)$ vers des théories mieux connues peuvent être définis: groupes de Chow, homologie cyclique (§7), K-théorie topologique et K-théorie relative (§2 et 7), cohomologie de Deligne-Beilinson, cohomologie motivique, etc.

c) A est une C^*-algèbre, par exemple l'adhérence d'une limite inductive d'algèbres de matrices complexes (désignée dans la littérature comme AF-algèbre). On montre dans le §4 que le K-groupe d'une AF-algèbre, muni de l'ordre défini par le cône formé des images de A-modules, classifie ces C^*-algèbres à isomorphisme près (cf. [C1] p. 91).

d) Supposons que A soit l'algèbre des fonctions continues[5] sur un espace compact X. Swan a alors démontré l'analogue topologique du théorème de Serre cité en b): M peut être remplacé par le monoïde des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels (topologiques) sur X. Notons le groupe obtenu par $K^{\mathrm{top}}(X)$. Il existe alors un "caractère de Chern"

$$Ch : K^{\mathrm{top}}(X) \longrightarrow H^{\mathrm{pair}}(X; \mathbb{Q})$$

où $H^{\mathrm{pair}}(X; \mathbb{Q})$ désigne le produit des groupes de cohomologie de degrés pairs de X. Ce caractère de Chern induit un isomorphisme entre $K(X) \otimes \mathbb{Q}$ et $H^{\mathrm{pair}}(X; \mathbb{Q})$[6]. De nombreuses applications de cette "K-théorie topologique" sont citées dans les paragraphes 2 et 3.

e) Pour toutes les applications en vue, il est important de pouvoir "dériver" le foncteur K en des foncteurs K_n (K s'identifiant alors à K_0), comme il est classique en topologie algébrique[7]. Ceci est clair pour la K-théorie topologique vue plus haut en comparaison avec la cohomologie (quel est l'analogue de la cohomologie en degrés impairs?).

[3] Par exemple, $A = \mathbb{Z}[x]/(1 + x + \cdots x^{p-1})$, où p est un nombre premier.

[4] Les premières lettres de l'alphabet sont réservées aux anneaux, les dernières aux espaces...

[5] Si X est une variété différentiable, on peut aussi bien considérer l'algèbre des fonctions C^∞ sur X: la K-théorie obtenue sera la même.

[6] Du moins, si X est un CW complexe fini, par exemple une variété compacte. Ce résultat montre que le groupe $K^{\mathrm{top}}(X)$ est loin d'être trivial en général.

[7] Conformément à la tradition, nous emploierons indifféremment la notation K^{-n} ou K_n.

La dérivation du foncteur K_0, due essentiellement à D. Quillen, se fait en réalité dans un contexte beaucoup plus général au §5, où la topologie algébrique joue un rôle essentiel.

Sans prétendre à l'exhaustivité, nous reprenons maintenant en détail les considérations esquissées plus haut. Nous prions le lecteur de nous excuser de nombreuses redites avec les notions décrites dans cette introduction.

1 Les premières définitions de la K-théorie

La K-théorie a été introduite par Grothendieck dans la formulation et la preuve du théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique pour des variétés projectives non singulières de dimension arbitraire: à une telle variété X, Grothendieck associe un groupe de "K-théorie algébrique", noté ici $K^{\mathrm{alg}}(X)$, défini à partir de faisceaux algébriques cohérents sur X: cf. [BS].

Quelques années plus tard, Atiyah et Hirzebruch [AH] construisent un analogue topologique pour tout espace compact X, noté ici $K^{\mathrm{top}}(X)$, dont voici la définition. Soit M l'ensemble des classes d'isomorphie de k-fibrés vectoriels sur X ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). C'est un monoïde abélien pour la somme de Whitney des fibrés[8]. La "K-théorie topologique" $K^{\mathrm{top}}(X)$ est simplement le "groupe symétrisé" de M, c'est-à-dire le quotient de $M \times M$ par la relation d'équivalence qui identifie le couple (x, y) au couple (x', y') s'il existe z tel que $x + y' + z = x' + y + z$. La K-théorie des fibrés complexes (resp. réels) est spécifiquement notée $K^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C}}(X)$ (resp. $K^{\mathrm{top}}_{\mathbb{R}}(X)$).

Pour construire de manière plus algébrique $K^{\mathrm{top}}(X)$, considérons l'anneau $A = C(X)$ des fonctions continues sur X à valeurs dans k; Serre et Swan ont démontré que la catégorie des k-fibrés vectoriels est alors équivalente à celle des A-modules projectifs de type fini (c'est-à-dire facteurs directs de A^n, $n = 1, 2 \ldots$), catégorie notée ici $\mathcal{P}(A)$. Dans cette équivalence, la somme de Whitney des fibrés correspond à la somme directe des modules, ce qui permet de remplacer les fibrés vectoriels par les objets de $\mathcal{P}(A)$ dans la définition de la K-théorie. Il convient de remarquer que si X est une variété différentiable, la K-théorie peut être aussi définie grâce à la catégorie des fibrés vectoriels différentiables, elle-même équivalente à celle des modules projectifs de type fini sur l'anneau $C^\infty(X)$ des fonctions de classe C^∞ sur X. Par abus d'écriture, on note de manière générale $K(A)$ (ou $K_0(A)$)[9] le "groupe de Grothendieck" de la catégorie $\mathcal{P}(A)$. Nous avons donc $K^{\mathrm{top}}(X) = K_0(A)$, avec $A = C(X)$ (ou $C^\infty(X)$ si X est une variété compacte)[10].

Une application continue $X \longrightarrow Y$ induit, par le foncteur image réciproque des fibrés vectoriels, un homomorphisme en sens inverse $f^* : K^{\mathrm{top}}(Y) \longrightarrow K^{\mathrm{top}}(X)$. En particulier, si Y est un point, il est trivial que $K^{\mathrm{top}}(Y) \cong \mathbb{Z}$ et que $K^{\mathrm{top}}(X)$ s'écrit comme

[8]Si E et F sont deux fibrés vectoriels sur X, leur "somme de Whitney" G est simplement le produit fibré $E \times_X F$: la fibre G_x est la somme directe $E_x \oplus F_x$ des fibres de E et F au point x.

[9]Des groupes $K_n(A)$ sont définis plus loin.

[10]Par abus d'écriture, on note par la même lettre la K-théorie des anneaux comme celle des espaces. Pour éviter toute confusion, les premières lettres de l'alphabet $A, B \ldots$ sont réservées aux anneaux et les dernières $P, T, X \ldots$ aux espaces.

une somme directe $\mathbb{Z} \oplus \tilde{K}^{\text{top}}(X)$, où $\tilde{K}^{\text{top}}(X)$, la K-théorie réduite de X, désigne le conoyau de f^* (si X est non vide).

Les théorèmes de périodicité de Bott [Bott] permettent de calculer les groupes $\tilde{K}^{\text{top}}(X)$ si l'espace X est une sphère. En effet, les groupes d'homotopie de $GL_i(\mathbb{C})$ (resp. $GL_i(\mathbb{R})$) sont périodiques de période 2 (resp. 8) si i est assez grand. Plus précisément, on a les isomorphismes suivants:

$$\pi_{r-2}(GL_i(\mathbb{C})) \cong \pi_r(GL_i(\mathbb{C})) \text{ si } i > 2r \text{ [groupes notés } \pi_r(GL(\mathbb{C}))] \text{ et}$$

$$\pi_{r-8}(GL_i(\mathbb{R})) \cong \pi_r(GL_i(\mathbb{R})) \text{ si } i > r+1 \text{ [groupes notés } \pi_r(GL(\mathbb{R}))].$$

Par ailleurs, il est facile de montrer que $\tilde{K}_{\mathbb{C}}^{\text{top}}(S^n) \cong \pi_{n-1}(GL(\mathbb{C}))$ et $\tilde{K}_{\mathbb{R}}^{\text{top}}(S^n) \cong \pi_{n-1}(GL(\mathbb{R}))$, ce qui implique les isomorphismes de périodicité suivants:

$$\tilde{K}_{\mathbb{C}}^{\text{top}}(S^n) \cong \tilde{K}_{\mathbb{C}}^{\text{top}}(S^{n+2}) \text{ et } \tilde{K}_{\mathbb{R}}^{\text{top}}(S^n) \cong \tilde{K}_{\mathbb{R}}^{\text{top}}(S^{n+8}).$$

Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ les premiers groupes sont $\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, \ldots$ dans le cas complexe et $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2, 0, \mathbb{Z}, 0, 0, 0, \mathbb{Z}, \ldots$ dans le cas réel.

2 Les théories cohomologiques d'Atiyah et Hirzebruch

Dans ce paragraphe, notons simplement $K(X)$ le groupe $K^{\text{top}}(X)$; Atiyah et Hirzebruch introduisent alors des "foncteurs dérivés" de la K-théorie, notés $K^{-n}(X)$, qu'il est plus commode de définir dans la catégorie des espaces localement compacts. Le groupe $K(X) = K^0(X)$ est alors défini comme $\tilde{K}(X^+)$, X^+ désignant le compactifié d'Alexandrov de X (si X est compact, on retrouve bien la définition précédente). Posons

$$K^{-n}(X) = K^0(X \times \mathbb{R}^n).$$

Une version plus générale de la périodicité de Bott (cf. le §1) peut être formulée ainsi:

$$K_{\mathbb{C}}^{-n}(X) \cong K_{\mathbb{C}}^{-n-2}(X) \quad \text{et} \quad K_{\mathbb{R}}^{-n}(X) \cong K_{\mathbb{R}}^{-n-8}(X).$$

Cette périodicité s'interprète de manière plus élégante grâce à l'algèbre de Clifford C^n de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de la forme quadratique standard $\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2$. Le groupe $K^n(X)$ (dans le cas réel aussi bien que complexe et pour $n \in \mathbb{Z}$) peut être défini à partir de la catégorie des k-fibrés en modules *gradués* sur l'algèbre de Clifford C^n: la périodicité de Bott est alors une conséquence de la périodicité (stable) des algèbres de Clifford en tant qu'algèbres $\mathbb{Z}/2$ graduées:

$$C^{n+8} \cong M_{16}(C^n) \text{ et } C^{n+2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(C^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

où $M_r(\Lambda)$ désigne en général l'algèbre des matrices $r \times r$ à coefficients dans Λ (cf. [K1] [Wo]).

En effet, cette périodicité des algèbres de Clifford, permet de définir deux "théories cohomologiques générales" $n \mapsto K^n(X)$ ($K = K_{\mathbb{R}}$ ou $K_{\mathbb{C}}$) pour $n \in \mathbb{Z}$, sur la catégorie des espaces compacts pointés (ou, ce qui revient au même, sur la catégorie des espaces localement compacts): si X est compact non vide, on pose $\tilde{K}^n(X) = \mathrm{Coker}(K^n(P) \longrightarrow K^n(X))$ où P est un point. À une "suite" d'espaces compacts pointés

$$Y \longrightarrow X \longrightarrow X/Y$$

est associée une suite exacte de cohomologie:

$$\to \tilde{K}^{n-1}(X/Y) \to \tilde{K}^{n-1}(X) \to \tilde{K}^{n-1}(Y) \to \tilde{K}^n(X/Y) \to \tilde{K}^n(X) \to \tilde{K}^n(Y) \to$$

qui se réduit en fait à une suite exacte à six termes dans le cas complexe, à 24 termes dans le cas réel.

Ces théories cohomologiques ont eu dans les années 60 des applications importantes en topologie algébrique, dues essentiellement à Adams, Atiyah et Hirzebruch. Ainsi, la K-théorie complexe a permis de résoudre de manière élégante le problème des sphères S^{n-1} pouvant être munies d'une structure de H-espace (c'est-à-dire de groupe topologique à homotopie près). L'entier n possible ne peut être que 1, 2, 4 ou 8, la sphère S^{n-1} correspondante étant l'ensemble des éléments de norme 1 dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou dans l'algèbre (non associative) des nombres de Cayley [K1].

De même, des méthodes utilisant la K-théorie réelle permettent de déterminer le nombre maximum de champs de vecteurs tangents linéairement indépendants sur la même sphère S^{n-1}. Ce nombre s'écrit $\rho(n) - 1$ où $\rho(n) = 2^\gamma + 8\delta$, si l'entier n s'écrit sous la forme $(2\alpha - 1).2^\beta$ avec $\beta = \gamma + 4\delta$ avec $0 \leq \gamma \leq 3$ (cf. [Ad] ou [K1]). Dans ces applications, l'efficacité de la K-théorie est due à l'existence d'opérations cohomologiques associées aux puissances extérieures de fibrés vectoriels: ces opérations sont plus maniables que les opérations de Steenrod en cohomologie ordinaire [A1] [K1].

3 Les théorèmes d'intégralité et le théorème d'Atiyah-Singer

Une autre application spectaculaire de la K-théorie topologique liée à l'analyse est le théorème de Riemann-Roch pour les variétés *différentiables* (version de Grothendieck), ainsi que les théorèmes d'intégralité de certaines classes caractéristiques qui en découlent. Quelques définitions préliminaires sont nécessaires.

A un fibré V complexe de classe totale de Chern $c(V) = 1 + c_1(V) + c_2(V) + \cdots$, on associe sa "classe de Todd" $\tau(V) = 1 + \tau_1(V) + \tau_2(V) + \cdots$ par le procédé formel suivant. Le produit

$$\tau(V) = \prod \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}}$$

s'exprime en termes des fonctions élémentaires σ_i des indéterminées x_i, fonctions qu'on remplace ensuite par les classes de Chern $c_i = c_i(V)$. De même, le caractère de Chern

$Ch(V)$ est obtenu en remplaçant $\frac{x_i}{1-e^{-x_i}}$ par la fonction exponentielle $\exp(x_i)$ et le produit $\prod$ par la somme $\sum$. Nous avons ainsi les formules suivantes: $Ch_0(V) = \text{rang}(V)$, $Ch_1(V) = c_1$, $Ch_2(V) = 1/2((c_1)^2 - 2c_2)$, $\tau_0(V) = 1$, $\tau_1(V) = 1/2c_1$, $\tau_2(V) = 1/12((c_1)^2 + c_2)$, $\tau_3(V) = 1/24(c_1 \cdot c_2)$, etc. La définition de ces classes $\tau(V)$ et $Ch(V)$ s'étend à la K-théorie: on écrit formellement

$$\tau(V - W) = \tau(V)/\tau(W), Ch(V - W) = Ch(V) - Ch(W), \text{ etc.}$$

pour $V - W \in K(X)$.

Soit maintenant X une variété compacte orientée de dimension paire telle que son fibré tangent $V = TX$ soit muni d'une structure complexe. Un théorème d'Atiyah et Hirzebruch [AH] exprime alors le produit $\tau(V).Ch(V)$, évalué sur la classe fondamentale de X, comme un nombre entier. Ce résultat, malgré ses apparences, est en fait un théorème de K-théorie dans l'esprit de Grothendieck [BS]. En effet, on peut définir un "morphisme de Gysin"

$$f_*^K : K(X) \longrightarrow K(Y)$$

associé à une application continue propre $f : X \longrightarrow Y$ entre deux variétés, si le fibré "relatif" $\nu_f = TX - f^*(TY)$ est muni d'une structure complexe. Il vérifie les mêmes propriétés formelles que le morphisme de Gysin en cohomologie ordinaire

$$f_*^H : H^{\text{pair}}(X) \longrightarrow H^{\text{pair}}(Y).$$

Cependant, le diagramme évident

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{C}}(X) & \xrightarrow{f_*^K} & K_{\mathbb{C}}(Y) \\ {\scriptstyle Ch}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ch} \\ H^{\text{pair}}(X) & \xrightarrow{f_*^H} & H^{\text{pair}}(Y) \end{array}$$

n'est pas commutatif en général. Sa non commutativité est mesurée précisément par la classe de Todd $\tau(\nu_f)$ du fibré relatif ν_f, élément clé de la "formule de Riemann-Roch":

$$Ch(f_*^K(x)) = f_*^H(\tau(\nu_f) \cdot Ch(x)).$$

Il est facile d'en déduire le théorème d'intégralité mentionné plus haut (pour Y réduit à un point!).

Ce résultat d'intégralité pour les classes caractéristiques est lié au théorème d'Atiyah-Singer dont une formulation simplifiée est la suivante. Soit X une variété compacte (spinorielle pour simplifier), soient E et F deux fibrés différentiables sur X et $D : \Gamma(X; E) \longrightarrow \Gamma(X; F)$ un opérateur différentiel elliptique de degré r et de symbole principal σ. Ce symbole est vu comme un morphisme de $\pi^*(E)$ vers $\pi^*(F)$, où $\pi : T^*X \longrightarrow X$ est la projection canonique du fibré cotangent T^*X sur X. L'ellipticité de D garantit que σ est un isomorphisme en dehors de la section nulle; σ définit donc un élément de $K_{\mathbb{C}}(T^*X)$ – qui est isomorphe à $K_{\mathbb{C}}(X)$ par "l'isomorphisme de Thom"

[K1]. Le morphisme de Gysin précédent (appliqué à la projection de X sur un point P) lui associe un nombre *entier* par l'homomorphisme

$$K_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow K_{\mathbb{C}}(P) = \mathbb{Z}.$$

D'après le théorème d'Atiyah-Singer, cet entier est précisément l'indice de l'opérateur différentiel D. Historiquement [AS1], le théorème était écrit en termes de classes caractéristiques associées au fibré vectoriel T^*X. Cependant, la formulation cohomologique se déduit de celle en K-théorie, grâce au théorème d'intégralité énoncé plus haut convenablement généralisé: cf. [AS2] et [K1].

4 K-théorie des algèbres de Banach et KK-théorie de Kasparov

La "K-théorie topologique" précédente a été généralisée aux k-algèbres de Banach (éventuellement sans élément unité) et plus précisément aux C^*-algèbres qui généralisent les espaces compacts du point de vue de la "géométrie non commutative" [C1]. Posons d'abord

$$K_0(A) = \operatorname{Coker}(K(k) \longrightarrow K(\tilde{A}))$$

où $\tilde{A}$ désigne la k-algèbre A adjointe d'un élément unité (en particulier $\tilde{A} = A \times k$ additivement). Nous définissons ensuite le groupe $K_n^{\mathrm{top}}(A)$ (noté aussi $K^{-n}(A)$) comme étant $K_0(A(\mathbb{R}^n))$, où $A(\mathbb{R}^n)$ désigne l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans A tendant vers 0 à l'infini. Dans ce contexte, les théorèmes de périodicité de Bott s'expriment ainsi

$$K_n^{\mathrm{top}}(A) \cong K_{n+\alpha}^{\mathrm{top}}(A)$$

avec $\alpha = 2$ si $k = \mathbb{C}$ (resp. $\alpha = 8$ si $k = \mathbb{R}$). Nous pouvons aussi considérer le groupe linéaire "infini" $GL(A) = \varinjlim GL_r(A)$, les groupes linéaires "finis" $GL_r(A)$ étant inclus les uns dans les autres (en bordant par des 1 sur la diagonale et par 0 ailleurs). Avec ces notations, $K_n^{\mathrm{top}}(A) \cong \pi_n(BGL(A)) \cong \pi_{n-1}(GL(A))$ pour $n > 0$, ce qui permet d'exprimer la périodicité de Bott en termes des groupes d'homotopie du groupe linéaire infini $GL(A)$ (muni de la topologie limite inductive) [Wo] [K1].

Une façon uniforme de définir les groupes K_n^{top} est de considérer l'espace produit

$$\mathcal{K}^{\mathrm{top}}(A) = K(A) \times BGL(A)$$

où $K(A)$ est muni de la topologie discrète. Les groupes $K_n^{\mathrm{top}}(A)$ pour $n \geq 0$ sont alors les groupes d'homotopie de l'espace $\mathcal{K}^{\mathrm{top}}(A)$. Si $A = C(X)$, anneau des fonctions continues sur X, on retrouve bien entendu la définition d'Atiyah-Hirzebruch des groupes $K^{-n}(X)$.

Les groupes K_n^{top} sont des invariants assez fins de l'algèbre de Banach A, en particulier si A est une C^*-algèbre. Un exemple typique est celui où A est l'adhérence d'une limite inductive d'algèbres de matrices complexes (désignée dans la littérature comme AF-algèbre). On montre alors que $K_0(A)$, muni de l'ordre défini par le cône formé des images de A-modules, classifie ces C^*-algèbres à isomorphisme près ([C1] p. 91). Une autre application classique est la non existence de projecteurs dans la C^*-algèbre $C^*_{\text{red}}(F_n)$, où F_n est le groupe non abélien libre à n générateurs.

Cette K-théorie des C^*-algèbres a été considérablement généralisée par Kasparov [Kas], en relation avec le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer (pour les familles d'opérateurs) énoncé plus haut. Dans la théorie de Kasparov, on associe à deux C^*-algèbres A et B un groupe $KK(A, B)$ vérifiant de remarquables propriétés formelles. D'après Higson [H] par exemple, la K-théorie $KK(A, B)$, pour A et B deux C^*-algèbres séparables (non nécessairement unitaires), est caractérisée par les propriétés suivantes:

1. Invariance par homotopie (la théorie est inchangée si A ou B est remplacée par l'anneau des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans A ou B respectivement)
2. Elle est C^*-stable: $KK(A, B) \approx KK(A, \mathcal{K} \otimes B)$, où $\mathcal{K}$ désigne la C^*-algèbre des opérateurs compacts.
3. Si
$$0 \longrightarrow J \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow B \longrightarrow 0$$
est une suite exacte scindée de C^*-algèbres, nous avons $KK(A, \mathcal{E}) \approx KK(A, J) \approx KK(A, B)$.
4. Une "composition" (ou produit de Kasparov)
$$KK(A, B) \times KK(B, C) \longrightarrow KK(A, C)$$
peut être définie. La correspondance $(A, B) \mapsto KK(A, B)$ définit un foncteur de la catégorie des C^*-algèbres dans celle des groupes abéliens, foncteur qui prolonge la K-théorie usuelle dans le sens suivant. On a $KK(\mathbb{C}, A) \approx K(A)$ et tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ donne naissance à un élément de $KK(A, B)$ qui définit par le produit de Kasparov un morphisme de $K(A) = KK(\mathbb{C}, A)$ dans $KK(\mathbb{C}, B) = K(B)$ qui est l'homomorphisme usuel en K-théorie: à tout A-module M est associé le B-module $f_*(M) = B \otimes {}_A M$.

Une définition concrète de $KK(A, B)$ et de la composition a été donnée par Cuntz [Cu]. Dans cet article, $KK(A, B)$ est décrit comme l'ensemble des classes d'homotopie de $*$-homomorphismes $qA \longrightarrow \mathcal{K} \otimes B$. Ici qA est l'idéal engendré dans $A * A$ (le produit libre de A par A) par $x * 1 - 1 * x$. On peut montrer que cette définition est équivalente à celle de Kasparov et de Connes-Skandalis ([C1] p. 428–436).

La relation avec le théorème d'Atiyah-Singer est la suivante. Soit $B = \mathbb{C}$ et A l'algèbre des fonctions continues sur une variété compacte X de dimension paire. Tout opérateur différentiel elliptique D sur X définit un "module de Fredholm" sur A [At2] qui définit lui-même un élément de $KK(A, \mathbb{C})$. L'image de $1 \in K(A)$ par l'homomorphisme associé $K(A) \longrightarrow K(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ est l'indice de l'opérateur D.

Un problème encore largement ouvert est de définir un groupe $KK(A, B)$ pour des algèbres plus générales que les C^*-algèbres, jouissant de propriétés analogues, puis de faire le lien entre cette théorie et la K-théorie algébrique d'une part (§5), l'homologie cyclique d'autre part (§7).

Georges Skandalis, 1999

5 La K-théorie algébrique de Bass, Milnor et Quillen

Les considérations topologiques précédentes – par une sorte de retour aux sources – inspirèrent de nombreux algébristes dans les années 60. Ils cherchaient à définir des groupes $K_n(A)$ pour un anneau unitaire A quelconque, aussi proches que possible des groupes K_n^{top} des algèbres de Banach. Cette tâche s'est révélée simple pour le groupe $K_1(A)$, introduit par Bass [Ba], relié en fait à un groupe défini bien avant Grothendieck par J.H.C. Whitehead: $K_1(A)$ est le quotient de $G = GL(A)$ par le sous-groupe des commutateurs $G' = [G, G]$. Si nous pouvons considérer que le groupe de Grothendieck $K_0(A)$ généralise la notion de dimension d'un espace vectoriel, le "groupe de Bass" $K_1(A)$ généralise celle de déterminant d'un automorphisme. Si F est un corps commutatif par exemple, on a $K_1(F) = F^*$, le groupe multiplicatif du corps F, alors que $K_0(F) \approx \mathbb{Z}$.

L'étape suivante fut accomplie par Milnor qui réussit à définir un groupe $K_2(A)$ ainsi qu'un "cup-produit"

$$K_1(A) \times K_1(A) \longrightarrow K_2(A).$$

Ce groupe $K_2(A)$ se révéla par la suite égal au groupe d'homologie $H_2(G'; \mathbb{Z})$ avec les notations précédentes (tous les groupes considérés dans ce paragraphe sont munis de la *topologie discrète*). L'intérêt principal de ce groupe est sa relation avec la notion de symbole en théorie des nombres: pour un corps F, un symbole à valeurs dans un groupe abélien M est une fonction bilinéaire

$$s : F^* \times F^* \longrightarrow M$$

qui vérifie l'équation supplémentaire $s(x, 1 - x) = 1$ (le groupe M étant noté multiplicativement). Un théorème profond de Matsumoto [M] décrit le cup-produit $K_1(F) \times K_1(F) \longrightarrow K_2(F)$ comme le "symbole universel". En d'autres termes, $K_2(F)$ est le quotient du produit tensoriel $F^* \otimes_{\mathbb{Z}} F^*$ par le sous-groupe engendré par les relations $x \otimes (1-x) = 0$ pour tout $x \in F^*$.

Finalement, Quillen donna en 1970 une définition topologique (!) des groupes $K_n(A)$ pour tout entier $n > 0$. Si $BG = BGL(A)$ désigne l'espace classifiant du groupe *discret* $G = GL(A)$, Quillen construit un espace $BG^+ = BGL(A)^+$ et une application continue

$$f : BG \longrightarrow BG^+$$

vérifiant les deux propriétés suivantes:

1. f induit un isomorphisme en homologie (pour tout système de coefficients locaux)
2. On a $\pi_1(BG^+) = G/G'$, l'application f induisant l'homomorphisme quotient $G \longrightarrow G/G'$ sur les groupes fondamentaux.

En fait, un tel espace BG^+ est unique à homotopie près [HH] et les groupes K_n sont définis par l'équation suivante

$$K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+).$$

Comme en K-théorie topologique, il est commode de considérer le produit $\mathcal{K}(A) = K(A) \times BGL(A)^+$, $K(A)$ étant muni de la topologie discrète. Nous avons alors $K_n(A) = \pi_n(\mathcal{K}(A))$ pour tout $n \geq 0$.

Si A est noethérien régulier, cette définition de $K_n(A)$ est équivalente à la définition plus algébrique suivante pour $n > 0$ [KV]. Soit

$$A_n = A[x_0, x_1, \ldots, x_n]/(x_0 + x_1 + \cdots + x_n - 1)$$

et G_n égal[11] au sous-groupe de $GL(A_n)$ formé des matrices $\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ qui sont égales à 1 si une des variables x_i est égale à 0 ($i < n$). Un homomorphisme $d_n : G_n \longrightarrow G_{n-1}$ est défini en posant simplement $x_n = 0$ (si $n < 0$, on convient que $G_n = \{1\}$). Pour $n \geq 0$, le quotient $\operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$ est alors un groupe isomorphe naturellement à $K_{n+1}(A)$ [Q].

Près de trente ans après cette définition, les groupes $K_n(A)$ restent encore très difficiles à calculer, sauf dans des exemples très particuliers. Si A est le corps fini F_q, Quillen a montré que $K_{2n}(F_q) = 0$ pour $n > 0$ et $K_{2n-1}(F_q) \approx \mathbb{Z}/(q^n - 1)\mathbb{Z}$. Dans le cas d'un corps de nombres ou de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, le calcul de la partie rationnelle de $K_n(A)$ est dû essentiellement à Borel [Bor]. Par exemple, $K_n(\mathbb{Z})$ est un groupe fini si $n \neq 1$ mod. 4 et c'est la somme directe de $\mathbb{Z}$ et d'un groupe fini si $n = 4k+1, k > 0$.

Des théorèmes généraux sur la K-théorie algébrique (localisation, dévissage, etc.) démontrés au départ pour K_0 et K_1 par Bass [Ba] furent généralisés par Quillen [Q] [Sr]. Par exemple, nous avons le "théorème fondamental" suivant:

$$K_{n-1}(A) \approx \operatorname{Coker}\{K_n(A[t]) \oplus K_n(A[t^{-1}]) \longrightarrow K_n(A[t, t^{-1}])\}.$$

Il permet une définition récurrente des $K_n(A)$ pour $n < 0$. Une définition équivalente est donnée dans [KV] à l'aide de la "suspension" d'un anneau.

[11] Noter que G_* est un groupe simplicial. On exprime simplement que $K_{n+1}(A)$ est le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de ce groupe simplicial.

La K-théorie algébrique des anneaux peut s'étendre aux schémas noethériens séparés X, grâce au formalisme catégorique développé dans [Q] (voir par exemple [Sr] pour un exposé détaillé). Ainsi, les groupes $K_n(X)$ (resp. $G_n(X)$) sont définis à partir de la "catégorie exacte" des fibrés vectoriels (resp. des faisceaux cohérents) sur X: ces groupes coïncident dans le cas régulier. A l'aide de ce formalisme, Quillen démontre par exemple la "suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen":

$$E_1^{p,q} = \oplus_{\operatorname{codim} x = p} K_{-p-q}(k(x)) \Rightarrow G_{-p-q}(X).$$

On en déduit la formule de Bloch

$$CH^p(X) = H^p(X; \mathcal{K}_{p,X}),$$

où $CH^p(X)$ est le groupe de Chow des cycles algébriques de codimension p sur X, modulo l'équivalence rationnelle et où $\mathcal{K}_{p,X}$ est le faisceau des germes $K_p(\vartheta_{x,X})$.

Dans les anneaux 70, Lichtenbaum et Quillen ont exprimé une conjecture exprimant les groupes $K_n(X)$ à partir de la cohomologie étale de X. Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas affine, X étant le spectre d'un corps F et introduisons la "K-théorie à coefficients", définie en général par $K_n(A; \mathbb{Z}/r) = \pi_n(BGL(A)^+; \mathbb{Z}/r)$ (groupes d'homotopie de $BGL(A)^+$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/r$). Ces groupes s'insèrent dans une suite exacte

$$K_n(A) \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow K_n(A; \mathbb{Z}/r) \longrightarrow K_{n-1}(A) \longrightarrow K_{n-1}(A)$$

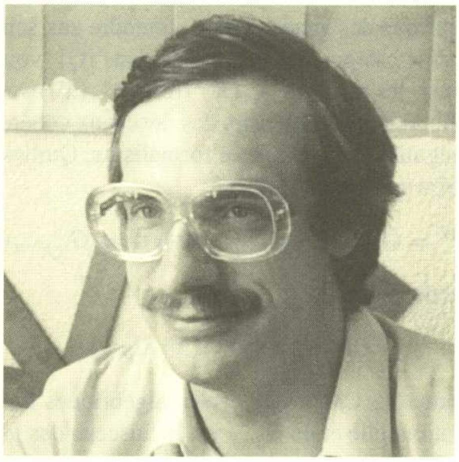
où la flèche entre deux groupes K_i est la multiplication par r. D'après Suslin [Su], les $K_n(A; \mathbb{Z}/r)$ sont périodiques de période 2 si $A = \bar{F}$ est un corps algébriquement clos et si la caractéristique de F ne divise pas r (version algébrique de la périodicité de Bott). Plus précisément, en tenant compte de l'action du groupe de Galois, on a $K_{2n}(\bar{F}; \mathbb{Z}/r) \approx \mu_r^{\otimes n}$, où μ_r est le groupe des racines $r^{\text{ièmes}}$ de l'unité dans $\bar{F}$. Dans ce cas, la conjecture de Lichtenbaum-Quillen affirme que les groupes $K_n(F; \mathbb{Z}/r)$ pour un corps F de clôture séparable $\bar{F}$ et de groupe de Galois G se calculent par une suite spectrale de type cohomologique

$$E_r^{p,q} = H^p(G; \mu_r^{\otimes q}) \Rightarrow K_{2q-p}(F; \mathbb{Z}/r)$$

(si la caractéristique de F ne divise pas r et si $n = 2q - p$ est plus grand que la r-dimension étale de F)[12]. Il convient de noter que Soulé a été un des premiers à remarquer la relation entre la K-théorie algébrique et la cohomologie étale et à construire des "classes caractéristiques" de la K-théorie vers cette cohomologie [So].

A l'heure présente, il semble que la conjecture n'ait été résolue complètement que pour $r = 2$ [Vo]. Un autre cas particulier important a été démontré il y a une quinzaine d'années par Merkurjev et Suslin: le groupe $K_2(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ est isomorphe à $H^2(G; \mu_r^{\otimes 2})$ (qui est aussi la r-torsion du groupe de Brauer de F). Ce théorème a de nombreuses applications en algèbre et en géométrie algébrique. Il implique par exemple que la r-torsion du groupe de Chow $CH^2(X)$, X variété lisse sur un corps algébriquement clos, est un groupe fini.

[12] Une explication plus complète de cette problématique peut être trouvée dans [F]. Notons que si F est un corps de nombres et si r est impair, la r-dimension étale de F est égale à 1.



Alexander Merkurjev, 1993

Les plus grands progrès théoriques vers la solution de cette conjecture (pour un schéma quelconque) ont été effectués par Thomason [Th] qui démontra l'existence d'une suite spectrale, qui converge vers une K-théorie de type "topologique" (dans le sens de la topologie étale). Nous renvoyons le lecteur à [Be] et [F] pour l'énoncé des "conjectures de Beilinson" liant les ordres des K-groupes ou des groupes de cohomologie étale à l'ordre des pôles ou des zéros de certaines fonctions L.

6 Autres "visions" de la K-théorie algébrique

Si la conjecture de Lichtenbaum-Quillen est une interprétation de la périodicité de Bott en K-théorie algébrique par un argument de "descente", d'autres groupes "classiques" que le groupe linéaire $GL(A)$ permettent d'en donner une autre interprétation. De manière précise, si A est un anneau muni d'une antiinvolution $a \mapsto \bar{a}$ (avec 2 inversible dans A pour simplifier), le groupe de Grothendieck en "K-théorie hermitienne", noté ${}_{\varepsilon}L(A)$ avec $\varepsilon = \pm 1$, classifie stablement les A-modules projectifs de type fini munis de formes ε-hermitiennes φ non dégénérées.

Désignons par ${}_{\varepsilon}O_{r,r}(A)$ le groupe des automorphismes de $A^r \oplus A^r$ muni de la forme ε-hermitienne hyperbolique standard définie par $\varphi((x, y), (x', y')) = \bar{x}y' + \varepsilon\bar{y}x'$. Le groupe orthogonal infini ${}_{\varepsilon}O(A)$ est la limite inductive des ${}_{\varepsilon}O_{r,r}(A)$ et on peut appliquer à son espace classifiant $B_{\varepsilon}O(A)$ la construction $+$ de Quillen. Si nous posons ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}(A) = {}_{\varepsilon}L(A) \times B_{\varepsilon}O(A)^+$, on en déduit des groupes de *K-théorie hermitienne* ${}_{\varepsilon}L_n(A) = \pi_n({}_{\varepsilon}\mathcal{L}(A))$, généralisant le groupe ${}_{\varepsilon}L(A) = {}_{\varepsilon}L_0(A)$. On a des applications continues évidentes

$$\mathcal{K}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{L}(A) \quad \text{et} \quad {}_{\varepsilon}\mathcal{L}(A) \longrightarrow \mathcal{K}(A)$$

induites par les foncteurs hyperbolique et oubli respectivement. Les fibres homotopiques correspondantes sont notées ${}_{\varepsilon}\mathcal{U}(A)$ et ${}_{\varepsilon}\mathcal{V}(A)$. Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne [K4] exprime que l'espace ${}_{\varepsilon}\mathcal{V}(A)$ a le type d'homotopie de l'espace des lacets de ${}_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A)$. Pour montrer que ce théorème est l'analogue des théorèmes de périodicité de Bott (aussi bien dans le cas réel que complexe), il suffit de choisir pour A les corps $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ avec toutes les involutions possibles et de remplacer $BO(A)^+$ par $BO(A)^{\text{top}}$. Nous retrouvons alors une formulation unique pour sept des dix équivalences d'homotopie de Bott[13], les trois autres, plus triviales, étant écrites en italiques: $O \approx \Omega(\mathbb{Z} \times BO)$, O/U $\approx \Omega$(O), U/Sp $\approx \Omega$(O/U), $\mathbb{Z}\times$ BSp $\approx \Omega$(U/Sp), $Sp \approx \Omega(\mathbb{Z} \times BSp)$, Sp/U $\approx \Omega$(Sp), U/0 $\approx \Omega$(Sp/U), $U \approx \Omega(\mathbb{Z} \times BU)$, $\mathbb{Z}\times$ BU $\approx \Omega$(U).

De ces équivalences, on déduit que $\mathbb{Z} \times BO$ (resp. $\mathbb{Z} \times BU$) a le type d'homotopie de son huitième (resp. deuxième) espace de lacets itéré. Dans le cas discret aussi bien que topologique, les "groupes de Witt" généralisés ${}_{\varepsilon}W_n(A) = \operatorname{Coker}[K_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(A)]$ sont périodiques de période 4 modulo la 2-torsion. Ces groupes de Witt sont utilisés dans les problèmes de chirurgie sur les variétés non simplement connexes [Br] [Wall], sujet très vaste que nous n'avons pas abordé ici (cf. [SLN] N° 343 par exemple).

Il existe bien d'autres applications de la K-théorie algébrique à la topologie. La plus attractive à l'heure actuelle est la théorie développée par Waldhausen. A un espace X, Waldhausen associe un espace $A(X)$ par l'identité

$$A(X) = BGL(Q(\Omega X'))^+$$

où X' est l'espace X auquel avec un point en dehors et où le symbole $^+$ désigne la construction plus de Quillen ($Q(\Omega X')$ est un anneau "à homotopie près" et on trouve une définition ad-hoc de GL dans ce cas). Si X est non vide, il est clair que $A(X)$ se scinde en A(Point) $\times \tilde{A}(X)$. Par ailleurs, soit $\Lambda(X)$ l'espace des lacets libres sur X sur lequel le groupe S^1 opère naturellement et soit $B(X)$ l'espace défini par l'équation

$$B(X) = Q\Sigma(ES^1 \times_{S^1} \Lambda(X)).$$

Il est clair qu'on a de même un scindage de $B(X)$ en B(Point) $\times \tilde{B}(X)$. Il a été démontré dans [BF] que les espaces $\tilde{A}(X)$ et $\tilde{B}(X)$ ont le même type d'homotopie rationnel si X est simplement connexe. L'espace $A(X)$ est donc accessible par les méthodes de l'homologie cyclique (cf. le §7).

L'espace $A(X)$ est intéressant pour sa relation avec l'espace $P(X)$ des pseudo-isotopies d'une variété différentiable X qui est défini par l'identité

$$P(X) = DIFF(X \times I, \partial X \times I \cup X \times \{0\})$$

ainsi qu'avec l'espace des pseudo-isotopies stables $\mathcal{P}(X) = \varinjlim_{k} P(X \times I^k)$. Le théorème fondamental de Waldhausen est alors le suivant: on a une équivalence d'homotopie entre $A(X)$ et $B^2\mathcal{P}(X) \times Q(X')$, où $B^2\mathcal{P}(X)$ est un "double délaçage" de l'espace $\mathcal{P}(X)$. K. Igusa a traduit ce théorème en termes de groupes d'homotopie de $P(X)$ et de l'espace des difféomorphismes de X (cf. [L2] par exemple).

[13] qui impliquent bien sûr la périodicité des groupes d'homotopie des groupes classiques dans le rang stable.

7 Homologie cyclique. Comparaison entre les K-théories algébrique et topologique

Au début des années 80, une nouvelle théorie homologique sur la catégorie des anneaux fut découverte simultanément par Connes [C1] et Tsygan [Ts] et baptisée homologie cyclique (ou encore "K-théorie additive", par analogie avec les définitions de la K-théorie usuelle). Une théorie voisine – "l'homologie de de Rham non commutative" – fut introduite à la même époque par l'auteur de ces notes [K3]. La définition actuelle de l'homologie cyclique (d'après Connes, Loday et Quillen) est la suivante. Considérons le bicomplexe $C_{p,q}(A)$ (p et $q \geq 0$) défini par $C_{p,q}(A) = A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$ ($q+1$ facteurs). La première différentielle $b : C_{p,q}(A) \longrightarrow C_{p,q-1}(A)$ est l'opérateur "bord de Hochschild", soit

$$b(a_0, \ldots, a_q) = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i (a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_q) + (-1)^q (a_q a_0, a_1, \ldots, a_{q-1}).$$

La seconde différentielle $\partial : C_{p,q}(A) \longrightarrow C_{p-1,q}(A)$ est égale à $1-t$ si p est pair et à $-N$ si p est impair. Ici, l'opérateur $t : C_{p,q}(A) \longrightarrow C_{p,q}(A)$ est défini par $t(a_0, \ldots, a_q) = (-1)^q (a_q, a_0, \ldots, a_{q-1})$ et l'opérateur N est égal à la somme $1+t+\cdots+t^q$ sur $C_{p,q}(A)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
C_{0,2} & \longleftarrow & C_{1,2} & \longleftarrow & C_{1,2} & \longleftarrow & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
C_{0,1} & \longleftarrow & C_{1,1} & \longleftarrow & C_{1,1} & \longleftarrow & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
C_{0,0} & \longleftarrow & C_{1,0} & \longleftarrow & C_{1,0} & \longleftarrow &
\end{array}$$

L'homologie cyclique $HC_*(A)$ est alors l'homologie du complexe simple $C_*(A)$ associé à ce bicomplexe. La terminologie de "K-théorie additive" donnée aussi à l'homologie cyclique se justifie pour la raison suivante: l'homologie à coefficients rationnels $H_*(gl(A))$ de l'algèbre de Lie $gl(A)$ est une algèbre symétrique $S(HC_{*-1}(A))$ de base l'homologie cyclique décalée d'un cran (théorème de Loday-Quillen-Tsygan; cf: [LQ]).

Cette théorie admet deux variantes intéressantes: l'homologie cyclique périodique $HC_*^{\text{per}}(A)$, obtenue en étendant le bicomplexe sur la gauche (le complexe simple $n \mapsto C_n^{\text{per}}(A)$ étant alors défini par le *produit* des $C_{p,q}$ pour $p + q = n$). La deuxième variante est notée $HC_*^-(A)$: c'est l'homologie du noyau de l'homomorphisme de restriction $C_*^{\text{per}}(A) \longrightarrow C_{*-2}(A)$. Toutes ces variantes, ainsi que l'homologie de Hochschild sont reliées par un diagramme de suites exactes, dû essentiellement à Connes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
HC_n^-(A) & \longrightarrow & HC_n^{\mathrm{per}}(A) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A) & \longrightarrow & HC_{n-1}^-(A) & \longrightarrow \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
HH_n(A) & \xrightarrow{I} & HC_n(A) & \xrightarrow{S} & HC_{n-2}(A) & \xrightarrow{B} & HH_{n-1}(A) & \xrightarrow{I}
\end{array}$$

Si A est une algèbre de Fréchet, des groupes d'homologie cyclique et de Hochschild *topologiques* peuvent être de même définis en remplaçant le produit tensoriel usuel $\otimes$ par le produit tensoriel topologique projectif $\otimes_\pi$ de Grothendieck [Gro]. Ils sont notés $HC_*^{\mathrm{top}}(A)$, $HH_*^{\mathrm{top}}(A)$, etc. Ces groupes d'homologie sont l'analogue non commutatif de la cohomologie de de Rham. Ainsi, dans le cas important où $A = C^\infty(X)$, X variété compacte, Connes démontre l'isomorphisme important suivant:

$$HC_n^{\mathrm{top}}(A) \cong \Omega^n(X)/B^n(X) \oplus H^{n-2}(X) \oplus H^{n-4}(X) \oplus \cdots$$

où les H^* sont les espaces vectoriels de cohomologie de de Rham. Dans le cadre algébrique, si A est par exemple l'anneau des fonctions algébriques sur une variété non singulière sur un corps algébriquement clos, on a une formule analogue, la cohomologie de de Rham étant alors calculée à partir des formes différentielles de Kähler [LQ].

Comme en géométrie différentielle classique, des variantes du "caractère de Chern" relient la K-théorie et l'homologie cyclique (cf. [C1], [CK], [K2], [HJ], etc.). Ce sont les flèches verticales dans le diagramme commutatif suivant[14]:

$$\begin{array}{ccccccc}
K_n^{\mathrm{rel}}(A) & \longrightarrow & K_n(A) & \longrightarrow & K_n^{\mathrm{top}}(A) & \longrightarrow & K_{n-1}^{\mathrm{rel}}(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
HC_{n-1}(A) & \longrightarrow & HC_n^-(A) & \longrightarrow & HC_n^{\mathrm{per}}(A) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A)
\end{array}$$

où $K_n^{\mathrm{rel}}(A)$ désigne le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de la fibre homotopique de l'application naturelle

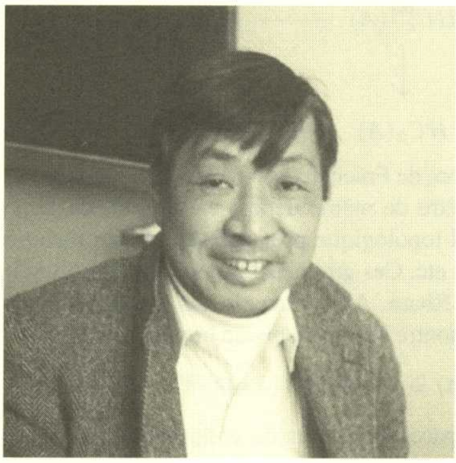
$$\mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathcal{K}^{\mathrm{top}}(A).$$

Examinons le diagramme précédent dans le cas où A est le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Dans cet exemple, seuls ne sont pas triviaux les première et troisième flèches verticales. La troisième est classique, compte tenu de la périodicité de Bott: pour n pair, c'est l'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ à une normalisation près. La première est plus subtile: elle donne naissance au "régulateur de Borel" défini sur la K-théorie algébrique de $\mathbb{C}$ et est à valeurs réelles (utiliser la conjugaison complexe dans $\mathbb{C}$). Si F est un corps de nombres, les différents $r_1 + r_2$ plongements possibles dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ permettent d'injecter la partie libre de $K_n(F)$ dans un espace euclidien de dimension r_1 (pour $n = 4k-1$) ou $r_1 + r_2$ (pour $n = 4k+1$, $k > 1$).

Mentionnons dans le même esprit un résultat remarquable de Suslin et Wodzicki [SW]: si A est une C^*-algèbre stable[15], la flèche $K_n(A) \longrightarrow K_n^{\mathrm{top}}(A)$ est un isomor-

[14]Cf. [CK] et un article de l'auteur à paraître: K-théorie multiplicative (AMS, The Fields Institute publications, 1997).

[15]par exemple l'algèbre de Banach des fonctions continues d'un espace compact X dans l'algèbre des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert.



Wu-chung Hsiang, 1986

phisme. Ce résultat permet de construire une catégorie très large d'anneaux pour lesquels on sait calculer la K-théorie algébrique en raison de la périodicité en K-théorie topologique. Un autre exemple extrême est celui de l'anneau des fonctions C^∞ sur une variété. Le caractère de Chern "classique"

$$K_n^{\mathrm{top}}(A) \otimes {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} \longrightarrow HC_n^{\mathrm{per}}(A)$$

est alors un isomorphisme.

Pour terminer ce paragraphe, nous devons souligner l'existence (dans le cas discret) d'un autre type d'homologie cyclique "topologique" $THC_n^-(A)$, due à Bökstedt, Hsiang et Madsen [BHM], très différente de celle mentionnée ici. Cette homologie cyclique est surtout intéressante pour les anneaux A qui sont "p-complets" i.e. $A \approx \varprojlim_r A/p^r A$, par exemple l'anneau des entiers p-adiques. Une bonne partie de la K-théorie algébrique de A est alors détectée par un "caractère de Chern topologique"

$$K_n(A) \longrightarrow THC_n^-(A).$$

Ces classes caractéristiques se généralisent dans le cadre de la K-théorie algébrique de Waldhausen et ont donc des implications topologiques importantes.

8 Conclusion

Malgré leur diversité, les méthodes utilisées en K-théorie ont souvent eu une source commune: mieux comprendre le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck [BS]. Les méthodes analytiques développées ensuite par Atiyah-Singer, puis la K-théorie des C^*-algèbres peuvent laisser penser à un mouvement centrifuge. En fait, la profonde unité de la K-théorie est bien illustrée dans un article récent de Nest et Tsygan qui ont trouvé une formulation commune à la théorie de Grothendieck et à celle d'Atiyah-Singer, via la déformation quantique de l'algèbre des fonctions sur une variété symplectique. Nous renvoyons le lecteur à [NT] pour les développements récents et prometteurs sur ce sujet.

Références

Livres

[At1] Atiyah M.-F.: *K-theory*. Benjamin (1967).

[Ba] Bass H.: *Algebraic K-theory*. Benjamin (1968).

[Bla] Blackladar: *K-theory of operator algebras*. Springer (1986).

[C1] Connes A.: *Noncommutative Geometry*. Academic Press (1994).

[F] Friedlander E. et Weibel C.: *School on Algebraic K-theory and applications*. An overview of the subject. ICTP Trieste (1997).

[K1] Karoubi M.: *K-theory, an introduction*. Grundlehren der math. Wissen. **226**, Springer (1978).

[K2] Karoubi M.: Homologie cyclique et K-théorie. *Astérisque* **149** (1987).

[L1] Loday J.-L.: *Cyclic homology*. Grundlehren der math. Wissen. **301**, Springer (1992).

[M] Milnor J.: *Introduction to Algebraic K-theory*. Ann. of Math. Studies **197**. Princeton, NJ. Princeton University Press (1974).

[R] Rosenberg J.: *Algebraic K-theory and its applications*. Graduate Texts N^{o} **147**, Springer (1994).

[Sr] Srinivas V.: *Algebraic K-theory*. Birkhäuser (1996).

[SLN] *Springer Lecture Notes* N^{os} 341, 342 and 343 (1973).

Articles

[Ad] Adams J.-F.: Vector fields on the sphere. *Ann. of Math.* **75**, 603–632 (1962).

[At2] Atiyah M.-F.: Global theory of elliptic operators. *Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and related topics*, p. 21–30. Univ. of Tokyo Press (1970).

[AH1] Atiyah M.-F. et Hirzebruch F.: Vector bundles and homogeneous spaces. *Proc. Symposium in Pure Math., Amer. Math. Soc.* **3**, 7–38 (1961).

[AH2] Atiyah M.-F. et Hirzebruch F.: Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.* **65**, 276–281 (1959).

[AS1] Atiyah M.-F. et Singer I.M.: The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.* **69**, 422–433 (1963).

[AS2] Atiyah M.-F. et Singer I.M.: The index of elliptic operators. *Ann. of Math.* **87**, 484–530, 564–604 (1968), **93**, 119–138 (1971).

[Be] Beilinson A.A.: Higher regulators and values of L-functions. *J. Soviet. Math.* **30**, 2036–2070 (1985).

[BHM] Bokstedt M., Hsiang W.-C. et Madsen I.: The cyclotomic trace and algebraic K-theory of spaces. *Invent. Math.* **111**, 465–540 (1993).

[Bor] Borel A.: Stable real cohomology of arithmetic groups. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **7**, 235–272 (1974).

[BS] Borel A. et Serre J.-P.: Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck). *Bull. Soc. Math. France* **86**, 97–136 (1958).

[Bott] Bott R.: The stable homotopy of the classical groups. *Ann. of Math.* **70**, 313–337 (1959).

[Br] Browder W.: *Surgery on simply connected manifolds*. Ergebnisse der Mathematik, Springer (1970).

[Bu] Burghelea D.: Cyclic homology and the algebraic K-theory of spaces I. *Contemporary Mathematics* **55**, 89–115 (1986).

[BF] Burghelea D. et Fiedorowicz Z.: Cyclic homology and the algebraic K-theory of spaces II. *Topology* **25**, 303–317 (1986).

[C2] Connes A.: Non commutative differential geometry. *Publ. Institut Hautes Etudes Scientifiques* N° **62**, 257–360 (1985).

[CK] Connes A. et Karoubi M.: Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm. *K-theory* **2**, 431–463 (1988).

[Cu] Cuntz J.: A new look at KK-theory. *K-theory* **1**, 31–51 (1987).

[HH] Hausmann J.-C. et Husemoller D.: Acyclic maps. *Enseign. Math.* **XXV**, 53–75 (1979).

[H] Higson N.: A characterization of KK-theory. *Pacific J. Math.* **126**, 253–276 (1987).

[HJ] Hood C., Jones J.D.S.: Some algebraic properties of cyclic homology groups. *K-theory* **1**, 361–384 (1987).

[Gra] Grayson D.: *Higher Algebraic K-theory* II (after Daniel Quillen). Lecture Notes in Math. **551** (1976).

[Gro] Grothendieck A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. *Mem. Amer. Math. Soc.* **16** (1955).

[K3] Karoubi M.: Quatre Notes sur l'homologie cyclique. *C. R. Acad. Sci. Paris* **297**, 381–384, 447–450, 513–516 et 557–560 (1983).

[K4] Karoubi M.: Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne. *Ann. of Math.* **112**, 259–282 (1980).

[KV] Karoubi M. et Villamayor O.: Foncteurs K^n en algèbre et en topologie, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **269**, p. 416 (1969).

[Kas] Kasparov G.: The operator K-functor and extension of C^*-algebras. *Izv. Akad. Nauk. SSSR*, Ser. Math. **44**, 571–636 (1980).

[L2] Loday J.-L.: Homotopie des espaces de concordance. *Séminaire Bourbaki* N° **516** (1977/78).

[LQ] Loday J.-L. et Quillen D.: Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices. *Comm. Math. Helv.* **59**, 565–591 (1984).

[MS] Merkurjev A.S. et Suslin A.A.: K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism. *Math. USSR Izv.* **21**, 307–440 (1983).

[NT] Nest R. et Tsygan B.: Algebraic Index Theorem. *Comm. Math. Phys.* **172**, 223–262 (1995).

[Q] Quillen D.: Higher Algebraic K-theory, *Higher K-theories*. Lecture Notes in Math. **341**, 85–147. Berlin-Heidelberg-New York: Springer (1973).

[So] Soule C.: K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres. *Invent. Math.* **55**, 251–295 (1979).

[Su] Suslin A.: On the K-theory of local fields. *J. Pure and Appl. Algebra* **34**, 301–318 (1984).

[SW] Suslin A. et Wodzicki M.: Excision in Algebraic K-theory. *Ann. of Math.* **136**, 51–122 (1992).

[Th] Thomason R.: Algebraic K-theory and etale cohomology. *Ann. Sci. Ec. Norm. Supér.* **13**, 437–552 (1985).

[Ts] Tsygan B.L.: The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology. *Russian Math. Survey* **38** N° 2, 198–199 (1983).

[Vo] Voevodsky V. (à paraître).

[Wald] Waldhausen W.: Algebraic K-theory of topological spaces I. *Proc. Symp. Pure Math.* **32** AMS, 35–60 (1978), II Springer Lecture Notes in Math. **1051**, 173–196 (1984).

[Wall] Wall C.T.C.: *Surgery on compact manifolds*. Academic Press (1967).

[Wo] Wood R.: Banach algebras and Bott periodicity. *Topology* **4**, 371–389 (1966).

UFR de Mathématiques
Université Paris VII Denis Diderot
2 Place Jussieu
F-75251 Paris Cedex