26 mars 2009

Cours de Théorie des Nombres MM020

Une application de la théorie des corps finis d'après Jean-Pierre Serre
(suite)

Michel Waldschmidt

Institut de Mathématiques de Jussieu
http ://www.math.jussieu.fr/∼miw/

Anneaux de type fini comme $\mathbf{Z}$–algèbre

Dans son texte Serre utilise l'énoncé suivant :
Si A est un anneau qui est une $\mathbf{Z}$–algèbre de type fini, alors pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A le quotient $A/\mathfrak{M}$ est un corps fini.

La référence est *Bourbaki Algèbre commutative Chapitre V § 3 n° 4.* Cette section concerne les *anneaux de Jacobson* qui sont les anneaux dans lesquels tout idéal premier est intersection d'idéaux maximaux.

Automorphismes algébriques involutifs

1. Un automorphisme σ de l'espace affine $\mathbf{A}^3$ sur $\mathbf{C}$ tel que $\sigma^2 = 1$ est donné par

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \big(x_2, x_1, x_3 + (x_1 - x_2)^3\big).$$

Les éléments (a, a, b) du plan $x_1 = x_2$ sont fixés par σ.

2. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme *impair* : $P(-X) = -P(X)$. Alors l' automorphisme

$$\sigma : (x_1, x_2) \longmapsto \big(-x_1, x_2 + P(x_1)\big).$$

de $\mathbf{A}^2$ vérifie $\sigma^2 = 1$.

3. Soit τ un automorphisme de l'espace affine $\mathbf{A}^n$ tel que $\tau^2 = 1$ et soit φ un automorphisme de $\mathbf{A}^n$. Alors $\sigma = \varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$ vérifie $\sigma^2 = 1$.

Anneaux de Jacobson

Un exemple d'anneau de Jacobson est $\mathbf{Z}$.

Plus généralement, *si A_0 est un anneau de Jacobson et A un anneau qui est une A_0–algèbre de type fini, alors A est un anneau de Jacobson.*

De plus, sous ces conditions, si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de A, alors l'image inverse $\mathfrak{M}_0$ de $\mathfrak{M}$ par le morphisme $A_0 \to A$ (qui fait de A une A_0–algèbre) est un idéal maximal de A_0, et *le corps $A/\mathfrak{M}$ est une extension finie de $A_0/\mathfrak{M}_0$.*