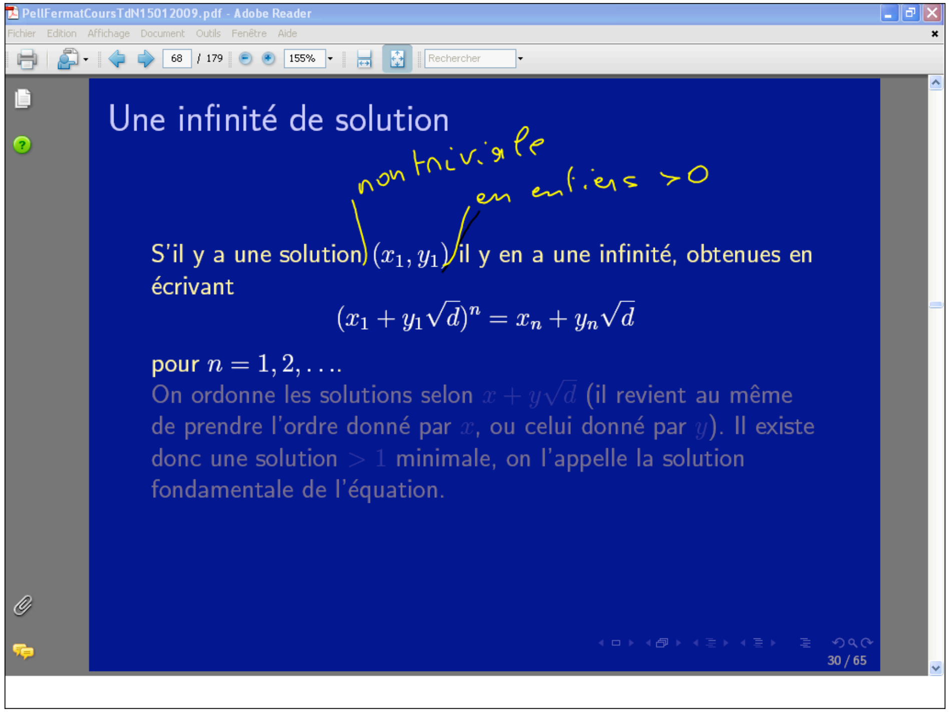


Groupes abéliens de type fini.

Groupe abélien = $\mathbb{Z}$-module.

$\parallel$

A

$$\mathbb{Z} \times A \longrightarrow A$$

$$(n, \alpha) \longmapsto n\alpha$$

$$n\alpha = \begin{cases} \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{n} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -|n|\alpha & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Déf.

$\mathbb{Z}$-module de type fini.

A

$\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A$

tq A = $\mathbb{Z}$-module engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$

$$= \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m \,;\ k_i \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \mathbb{Z}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z}\alpha_m$$

Théorème de structure des $\mathbb{Z}$-modules de type fini

A un $\mathbb{Z}$-module de type fini

$A \underset{\text{isom.}}{\simeq} T \times \mathbb{Z}^r$. T groupe abélien fini

r entier ≥ 0

r = rang de A

Sous-groupe de torsion $A_{tors} \simeq T$

$= \{$éléments d'ordre fini$\}$.

$x^2 - dy^2 = \pm 1 \qquad (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$

Groupe abélien G sous-ensemble de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

(x_1, y_1)
(x_2, y_2)

$(x_1+\sqrt{d}y_1)(x_2+\sqrt{d}\,y_2) = x_3+\sqrt{d}\,y_3$

$\rightarrow (x_3, y_3)$

groupe multiplicatif.

élément neutre $(1,0)$ "solution triviale"

$(-1,0) \in G$ d'ordre 2

$(-1+0\sqrt{d})(-1+0\sqrt{d}) = 1+0\sqrt{d}.$

$(1,0)$ et $(-1,0)$ sont les seuls éléments de torsion dans G.

$(x,y) \in G \Rightarrow \begin{matrix}(-x,y)\\(x,-y)\\(-x,-y)\end{matrix} \in G$

$x^2 - dy^2 = \pm 1$

$x \neq 0$

Si $x \neq 1$ et $x > 0$ alors $x \geq 2$; supp $y > 0$

$(x+y\sqrt{d})^n$ suite croissante $\neq (1,0)$

$G_{tors} = \{(1,0);(-1,0)\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$

Si (x_1,y_1) est la solution fondamentale de $x^2-dy^2=\pm 1$ (= la plus petite solution en entiers >0 autre que $(+1,0)$) alors l'ensemble des solutions

* $(x,y) \in \mathbb{Z}^2_{>0}$ est donné par
$(x_1+y_1\sqrt{d})^n = x+y\sqrt{d}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

* $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ est donné par
$(x_1 \pm \sqrt{d}\,y_1)^n = x+\sqrt{d}\,y \quad n \in \mathbb{Z}.$

$G \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ni (t_1, t_2)$

$(x,y) \longmapsto (\log|x+\sqrt{d}\,y|, \log|x-\sqrt{d}\,y|)$

homomorphisme de groupes

$(1,0) \longmapsto (0,0)$
$(-1,0) \longmapsto (0,0)$

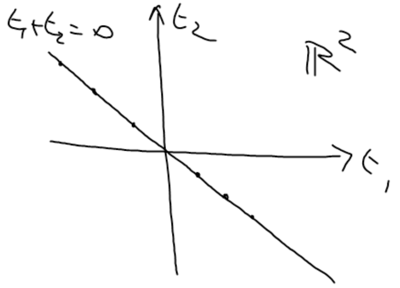
noyau : G_{tors}

image sous-groupe de $\mathbb{R}^2$
contenu dans la droite $t_1+t_2=0$
groupe additif isomorphe à $\mathbb{R}$.

But : image $\mathcal{G}$ est

$$\mathbb{Z}\left(\log|x_1+y_1\sqrt{d}|,\ \log|x_1-y_1\sqrt{d}|\right)$$

où (x_1, y_1) est la solution fondamentale de l'équation de Pell. $x^2-dy^2=\pm 1$.



Si K est un compact de $\mathbb{R}^2$, alors $K\cap\mathcal{G}$ est fini

$\mathcal{G}$ est discret.

Tout sous-groupe discret de $\mathbb{R}$ est de la forme $\mathbb{Z}u$

$u\geq 0$

Dém. Algorithme d'Euclide.