$x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

$\frac{p_n}{q_n} \longrightarrow x \qquad n \longrightarrow \infty$

Alors $q_n \longrightarrow \infty$

$q_n \longrightarrow \infty \iff \forall Q>0\ \exists N,\ q_n \geq Q \quad \forall n \geq N.$

$\iff \forall Q>0,\ \{n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1,\ q_n < Q\} \subset [1,N]$

$\iff \forall H>0,\ \{n \geq 1,\ q_n \leq H\}$ est fini

On fixe $H>0$

$$\min \left\{ \left|x - \frac{p}{q}\right| ;\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ 1 \leq q \leq H \right\} \geq c > 0$$

pour chaque q, $1 \leq q \leq H$, le $p \in \mathbb{Z}$ donnant min de $\left|x - \frac{p}{q}\right|$ est unique.

Irrationalité et transcendance.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad x \in \mathbb{R}$

x est-il rationnel ?

Critères.

① b entier ≥ 2

développement "unique" en base b

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0 + a_{-1} b^{-1} + \dots + a_{-m} b^{-m} + \dots$$

$0 < a_n < b \qquad 0 \leq a_n < b$

$0{,}99\dots9\dots = 1{,}00\dots$ en base 10 $\qquad x = a_n a_{n-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$

Si $b^N x \in \mathbb{Z}$ pour un $N \in \mathbb{Z}$, alors x a deux développements en base b. Autrement le développement est unique.

Premier critère : Soit b entier ≥ 2.

Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est rationnel $\iff$ son développement en base b est ultimement périodique.

chiffres $a_k\, a_{k-1} \dots a_0\ a_{-1}, a_{-2} \dots a_{-k} \dots$

ultimement périodique $\iff \exists N \geq 1$ t.q. $a_{-h} = a_{-h-N}$ $\forall h$ suff. grand.

$1 \leq a_k < b \qquad b^k \leq x < b^{k+1}$

$$k = \left[\frac{\log x}{\log b} \right]$$

② Fraction continue.

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

$x \in \mathbb{Q} \iff$ le développement en fraction continue de x est fini.

③ Approximation diophantienne.

$x \in \mathbb{R}$

$x \notin \mathbb{Q} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ t.q. $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q}$

En fait si $x \notin \mathbb{Q}$ $\exists$ infinité de $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}$$

Quelques problèmes ouverts.

Constante d'Euler

$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{N}-\log N\right) \notin \mathbb{Q}$?

$\zeta(5) \notin \mathbb{Q}$? $\zeta(s)$ fonction zêta de Riemann

$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$. $\operatorname{Re} s > 1$

$\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) \notin \mathbb{Q}$? $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

Catalan $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \notin \mathbb{Q}$?

$e+\pi \notin \mathbb{Q}$?

Nombres irrationnels : $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ $\Longrightarrow$ $x+\frac{a}{b} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

$x\cdot\frac{a}{b} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ si $\frac{a}{b}\neq 0$

$x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$x+\frac{a}{b} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\quad \left(x+\frac{a}{b}\right) - x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

$x+\frac{a}{b}+x = 2x+\frac{a}{b} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Irrationalité de $\sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$ infini $\Rightarrow \sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

* autre dém. $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $\operatorname{pgcd}(a,b)=1$

a et b non tous deux pairs

$a^2 = 2b^2$ $\Rightarrow$ a pair $a = 2a'$

$2(a')^2 = b^2$ $\Rightarrow$ b pair. contradiction.

* $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ b le + petit entier ≥ 1 tel que

$b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$.

$\sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ $\quad \sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$= \frac{2b-a}{a-b}$ $\quad 0 < a-b < b$

$0 < \sqrt{2} < 2$

Exercices

1) Adapter cette démonstration pour montrer l'irrationalité de $\sqrt{m}$ pour m entier ≥ 2 qui n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}$

2) k entier ≥ 2. $m\in\mathbb{Z}$, $m\geq 2$, qui n'est pas la puissance k-ième d'un entier. Alors $\sqrt[k]{m} \notin \mathbb{Q}$.

π
e sont irrationnels. Euler
Lambert.

Euler $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1 ..]$
$= [2; \overline{1, 2j, 1}]_{j \geq 1}$

wims

Euler $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{\ddots \cfrac{x^2}{2n+1 + \ddots}}}}}$

$x \in \mathbb{C}$

Irrationalité de e
méthode de Fourier 1815. N entier > 0

$$e = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$N!\, e - \sum_{n=0}^{N} N(N-1) \cdots (n+1) + R_N$$

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{N!}{n!} = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \cdots > 0$$

$$R_N \leq \frac{1}{N+1}\left(1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+2)(N+3)} + \cdots\right) < \frac{e-1}{N+1}$$

$R_N \to 0$

$q_N = N! \quad \in \mathbb{Z}_{>0}$

$P_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} \quad \in \mathbb{Z}$

$$0 < |q_N e - P_N| < \frac{e-1}{N+1} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow e \notin \mathbb{Q}$.

1840 Liouville. $e^2 \notin \mathbb{Q}$. plus fort que $e \notin \mathbb{Q}$

Si $x \in \mathbb{R}$ $\quad x^2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$

$e \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{e} = e^{1/2} \notin \mathbb{Q}$.

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$e^2 = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$N!\, e^2 = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!\, 2^n}{n!}}_{\in \mathbb{Z}} + R_N$$

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{N!}{n!} 2^n = \frac{2^{N+1}}{N+1} + \frac{2^{N+2}}{(N+1)(N+2)} + \cdots$$

$e^2 = \frac{a}{b} \iff be = ae^{-1} \longrightarrow \infty$

Liouville : e n'est pas quadratique.

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ $\quad a e^2 + b e + c = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0$

(donc e^2 est irrationnel)

$a e + b + c e^{-1}$ $\qquad 0 < |qx - p| < \varepsilon$

Liouville 1840 $\quad e^2$ n'est pas quadratique.

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ $\quad a e^4 + b e^2 + c = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0$

$a e^2 + b + c e^{-2}$

x quadratique $\Longrightarrow x^2$ quadratique.

$1, x, x^2$ $\mathbb{Q}$-lin. dép. $\Longrightarrow$ $1, x^2, x^4$ lin. dép.

$$\left.\begin{array}{l} e^2 \notin \mathbb{Q} \\ b \in \mathbb{Z}_{>0} \end{array}\right\} \Longrightarrow e^{2/b} \notin \mathbb{Q}$$

1873 Hermite. e est transcendant.

Démonstration de l'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$. par la méthode de Hermite. (résultat de Lambert).

+ irrationalité de π

$e^r = s$ $\quad r, s \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ $\qquad r \in \mathbb{Q} \Rightarrow s \notin \mathbb{Q}$ équivaut à $s \in \mathbb{Q} \Rightarrow r \notin \mathbb{Q}$.

$s \in \mathbb{Q}_{>0} \Rightarrow \log s \notin \mathbb{Q}$.

$r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ $\quad r \neq 0$ $\qquad e^{-r} = \frac{1}{e^r}$

on peut supposer $r > 0$.

$e^{br} = e^a$ $\qquad e^a \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow e^r \notin \mathbb{Q}$.

On peut supposer $r = a$ entier > 0.

Approcher e^a par des nombres rationnels.

Hermite : "approximer" la fonction e^x par des fractions rationnelles $\frac{A(x)}{B(x)}$

$A, B \in \mathbb{Z}[X]$.

e^a sera approché par $\frac{A(a)}{B(a)} \in \mathbb{Q}$.

e^x est approximée par $\frac{A(x)}{B(x)}$ si les premiers termes du développement de Taylor des deux fonctions sont les mêmes.

$B(0) \neq 0$.

$\Longleftrightarrow$ les premiers termes du développement de Taylor de $B(x)e^x$ et $A(x)$ sont les mêmes.

$\Longleftrightarrow$ B polynôme, $B(x)e^x$ a un grand trou dans son développement de Taylor en $x = 0$

$A(x) =$ polynôme avant le trou.

$n_0 \geq 1$ $\quad N = n_0 + n_1$.
$n_1 \geq 1$

Lemme. Donnés n_0, n_1, il existe
$A \in \mathbb{R}[X]$ degré $\leq n_0$, $B \in \mathbb{R}[X]$, degré $\leq n_1$,
$B \neq 0$ tel que la fonction
$R(x) = B(x)e^x - A(x)$ ait un zéro en $x=0$
de multiplicité $\geq N+1$. Solution unique
avec B unitaire. De plus $\deg B = n_1$
$\deg A = n_0$ et $x=0$ est un zéro de R
d'ordre (= multiplicité) $N+1$.

On verra $B \in \mathbb{Z}[X]$ et aussi
$A \in \mathbb{Z}[X]$ si $n_0 = n_1$.

Rappel. ordre d'une fonction analytique
f en un point z_0 = multiplicité de f
en z_0. $= \min\{m \geq 0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0\}$

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \dots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \dots$$

dév. de Taylor de f en z_0.

zéro simple $\quad f(z_0) = 0 \quad f'(z_0) \neq 0$.
= ordre 1
zéro double $\quad f(z_0) = f'(z_0) = 0 \quad f''(z_0) \neq 0$.
zéro ordre m $\quad f(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0$

Existence de (A, B).

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}[X]_{\leq n_1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1} \qquad \dim n_1$$

$B \mapsto \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left(B(x)e^x\right)_{x=0} \right)_{n_0+1 \leq k \leq N}$

$\underline{\dim n_1 + 1}$

pas injective $\quad N = n_0 + n_1$.
$B \in \ker \mathcal{L}$
$B \neq 0$

$$A(x) = \sum_{h=0}^{n_0} \frac{x^h}{h!} \left(\frac{d}{dx}\right)^h \left(B(x)e^x\right)_{x=0}$$

$R(x) = B(x)e^x - A(x)$ mult $\geq N+1$ en $x = 0$.