

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL WALDSCHMIDT

## **Indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 99 (1971), p. 285-304.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1971\\_\\_99\\_\\_285\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__285_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**INDÉPENDANCE ALGÈBRIQUE  
DES VALEURS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE**

PAR

MICHEL WALDSCHMIDT.

[Bordeaux]

---

**0. Introduction.**

Plusieurs théorèmes d'indépendance algébrique, concernant les valeurs de la fonction exponentielle, ont été démontrés par GEL'FOND, ŠMELEV et LANG (§ 1). Nous montrerons que les conditions d'approximation qui figurent dans leurs hypothèses sont superflues. Le principal théorème (§ 2) que nous obtiendrons est une amélioration d'un résultat de LANG.

**THÉORÈME 1.** — *Soient  $x_1, \dots, x_N$  (resp.  $y_1, \dots, y_M$ ) des nombres complexes  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants. Si  $MN \geq 2(M + N)$ , alors deux au moins des nombres*

$$e^{x_i y_j} \quad (1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M)$$

*sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ .*

La démonstration (§ 5) du théorème 1 utilise un critère de transcendance (§ 3) ainsi qu'un lemme sur la répartition des zéros d'une somme de fonctions exponentielles (§ 4).

Pour terminer, nous étudierons (§ 6) une manière d'approcher des résultats d'indépendance algébrique dans le cas où la dimension est supérieure à 1, à partir d'une définition de LANG de « types de transcendance ». Nous obtiendrons enfin une application géométrique :

*Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , algébriquement clos, de degré de transcendance sur  $\mathbb{Q}$  inférieur ou égal à 1. Soit  $G$  un groupe linéaire sur  $\mathbb{C}$  et soit*

$\varphi : \mathbf{C} \rightarrow G_{\mathbf{C}}$  un sous-groupe à un paramètre de  $G$ , de dimension algébrique  $d \geq 1$ . Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\mathbf{C}$  contenant au moins  $m$  éléments  $\mathbf{Q}$ -linéairement indépendants, et tel que  $\varphi(\Gamma) \subset G_K$ . Alors  $md < 2(m+d)$ . De plus,

$$\begin{aligned} \text{si } \Gamma \subset K, & \quad \text{alors } md < 2(m+d-1); \\ \text{si } \varphi'(0) \in G_K, & \quad \text{alors } md < 2m+d. \end{aligned}$$

Enfin, je voudrais exprimer ma plus vive reconnaissance à Jean FRESNEL pour les conseils qu'il m'a donnés.

### 1. Notations et historique.

Nous désignerons par  $\mathbf{N}$  l'ensemble des entiers rationnels positifs,  $Z$  l'anneau des entiers rationnels,  $\mathbf{Q}$  le corps des nombres rationnels,  $\mathbf{R}$  le corps des nombres réels, et  $\mathbf{C}$  le corps des nombres complexes. Le logarithme népérien sera noté  $\text{Log}$ . D'autre part,  $e$  sera le nombre réel tel que  $\text{Log} e = 1$ . Enfin, on se donne une détermination du logarithme complexe qui coïncide avec le logarithme népérien sur l'ensemble des nombres réels positifs.

Rappelons que la *hauteur d'un polynôme* de  $\mathbf{C}[X]$  est le maximum des valeurs absolues des coefficients de ce polynôme. On notera  $|P|$  la hauteur de  $P(X)$ .

Soient  $L$  un corps de nombres (c'est-à-dire une extension algébrique finie de  $\mathbf{Q}$ ), et  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )  $n$  éléments de  $L$ ; on notera  $\| (a_i) \|$  le maximum des valeurs absolues ordinaires des conjugués des  $a_i$  sur  $\mathbf{Q}$ ; un *dénominateur de  $(a_i)$*  sera un élément  $\Delta$  de l'anneau  $I_L$  des entiers de  $L$ , tel que :

$$\Delta a_i \in I_L \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

*Aperçu historique.* — Après le théorème de Hermite-Lindemann, les résultats que GEL'FOND obtint en 1949 ([3], [4], [5]) furent les premiers concernant l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle. La méthode qu'il utilisait était une généralisation de celle qui lui avait permis de résoudre le septième problème de Hilbert, en 1934. Dans ces nouveaux travaux, il remplace l'hypothèse : « Le corps  $K$  est une extension algébrique de  $\mathbf{Q}$  », qui doit conduire à une contradiction et montrer qu'un nombre est transcendant, par l'hypothèse : « le corps  $K$  est une extension de  $\mathbf{Q}$  de degré de transcendance 1 » qui, dans la démonstration par l'absurde, donnera un théorème d'indépendance algébrique. Aussi GEL'FOND étudie-t-il les extensions de  $\mathbf{Q}$  de type fini et de degré de transcendance 1 (en abrégé « corps  $\mathbf{Q}_1$  »), et c'est un critère de transcendance (§ 3) qui jouera un rôle fondamental. Notons que cette méthode permit à GEL'FOND d'obtenir des mesures de transcendance ([4], [5]).

Il obtint également, avec FEL'DMAN [7], une mesure d'indépendance algébrique.

Le premier des deux théorèmes d'indépendance algébrique de GEL'FOND a été complété par ŠMELEV [15] en 1968. D'autre part, cette méthode permit à LANG d'obtenir plusieurs résultats du même type [10]. Nous allons voir que l'on peut éliminer les conditions d'approximation qui figurent dans les hypothèses des théorèmes de GEL'FOND, ŠMELEV et LANG.

**2. Énoncé du théorème principal.**

**THÉORÈME 1.** — Soient  $x_1, \dots, x_N$  (resp.  $y_1, \dots, y_M$ ) des nombres complexes linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . Si  $MN \geq 3(M + N)$ , alors deux au moins des nombres

$$e^{x_i y_j} \quad (1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq M)$$

sont algébriquement indépendants.

La condition  $MN \geq 2(M + N)$  est équivalente à  $(M \geq 3, N \geq 6)$  ou  $(M \geq 4, N \geq 4)$ . On obtient alors les corollaires suivants :

**COROLLAIRE 1.** — Soient  $a_1, \dots, a_m, b$  des nombres complexes. On suppose  $\text{Log } a_1, \dots, \text{Log } a_m$  (resp.  $1, b, \dots, b^k$ ) linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . Alors deux au moins des nombres

$$a_i^{b^j} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

sont algébriquement indépendants dans les quatre cas suivants :

- 1°  $m = 1; \quad k = 3; \quad n = 6;$
- 2°  $m = 2; \quad k = 3; \quad n = 4 \quad (1);$
- 3°  $m = 3; \quad k = 2; \quad n = 3 \quad (1);$
- 4°  $m = 6; \quad k = 2; \quad n = 2.$

**COROLLAIRE 2.** — Soient  $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ , et  $K$  une extension de  $\mathbb{Q}$  de degré de transcendance inférieur ou égal à 1. Si

$$x^{y_1} \in K \quad \text{et} \quad x^{y_2} \in K \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{N},$$

alors  $1, y_1, y_2$  sont linéairement dépendants sur  $\mathbb{Q}$ .

(1) Pour 2° et 3° on suppose de plus que  $\text{Log } a_1, \dots, \text{Log } a_m, b \text{ Log } a_1, \dots, b \text{ Log } a_m$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ .

*Démonstration des corollaires.*

1°  $m = 1$ ;  $k = 3$ ;  $n = 6$ . On pose

$$x_i = b^{i-1} \operatorname{Log} a; \quad y_j = b^{j-1} \quad (1 \leq i \leq 4; 1 \leq j \leq 4).$$

2° et 3°  $mn \geq 3m + n - 1$ ; on pose :  $N = 2m$ ;  $M = n - 1$ ;

$$y_j = b^{j-1}; \quad x_{2i-1} = \operatorname{Log} a_i; \quad x_{2i} = b \operatorname{Log} a_i.$$

4°  $m = 6$ ;  $k = 2$ ;  $n = 2$ ;

$$y_j = b^{j-1} \quad (j = 1, 2, 3); \quad x_i = \operatorname{Log} a_i \quad (1 \leq i \leq 6).$$

Pour le corollaire 2, on pose :  $y_3 = 1$ ,  $x_i = \operatorname{Log} a_i$ , où  $a_1, \dots, a_6$  sont six nombres premiers distincts.

Le meilleur résultat que l'on puisse espérer pour améliorer le théorème 1 est le suivant :

CONJECTURE 1. — Soient  $x_1, x_2$  (resp.  $y_1, \dots, y_n$ ) des nombres complexes  $\mathbf{Q}$ -linéairement indépendants. Alors le corps obtenu en adjoignant à  $\mathbf{Q}$  les  $2n$  nombres

$$e^{x_i y_j} \quad (i = 1, 2; j = 1, \dots, n)$$

a un degré de transcendance supérieur ou égal à  $n - 1$ .

### 3. Un critère de transcendance.

La méthode que GEL'FOND avait utilisée pour résoudre des problèmes de transcendance a pu être généralisée à des théorèmes d'indépendance algébrique grâce à un critère de transcendance qui joue, dans cette démonstration, le rôle du théorème de Liouville [13] dans la première. Nous étudierons plus loin les conséquences qu'aurait une généralisation de ce lemme de Gel'fond à un critère d'indépendance algébrique.

Le lemme de Gel'fond a été amélioré par LANG [8]. Voici un troisième énoncé, plus fin que les précédents, et qui permet en particulier de résoudre un problème posé par SCHNEIDER [17] (problème 8 de [13]).

LEMME FONDAMENTAL. — Soient  $\alpha \in \mathbf{C}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux fonctions réelles de variable réelle  $x$ , strictement croissantes, qui tendent vers  $+\infty$  avec  $x$ ; soient  $a_1(x)$  et  $a_2(x)$  deux fonctions réelles de  $x$ , supérieures à 1.

On suppose que, pour tout  $x > 0$ , on a

$$(3.1) \quad \sigma_2(x) \leq \sigma_1(x); \quad \sigma_i(x+1) \leq a_i(x) \sigma_i(x) \quad (i = 1, 2).$$

On suppose qu'il existe un entier  $N_0$  positif, et pour tout entier  $N > N_0$ , un polynôme  $P_N \in \mathbf{Z}[X]$ , non nul, de hauteur  $H_N$  et de degré  $d_N$ , tel que

$$(3.2) \quad \begin{cases} |P_N(\alpha)| < \exp \{ -C(N) \sigma_1(N) \sigma_2(N) \}, \\ \text{Log } H_N \leq \sigma_1(N); \quad d_N \leq \sigma_2(N), \end{cases}$$

où  $C(N) = \max \left[ 10 + \varepsilon; (4 + \varepsilon) \sup_{N-1 \leq x < N} a_1(x) a_2(x) \right]$ .

Alors  $\alpha$  est algébrique, et il existe un entier  $N_1$  tel que, pour  $N > N_1$ , on ait  $P_N(\alpha) = 0$ .

REMARQUE 1. — La dernière partie de l'énoncé

$$P_N(\alpha) = 0 \quad \text{pour } N > N_1$$

résulte d'une généralisation d'un théorème de Liouville [13] :

Si  $\alpha$  est algébrique de degré  $s$ , il existe une constante  $C(\alpha) = C > 0$  telle que, pour tout polynôme  $P \in \mathbf{Z}[X]$  de hauteur  $H$  et de degré  $n$  avec  $P(\alpha) \neq 0$ , on ait

$$(3.3) \quad |P(\alpha)| > C^n H^{-s+1}.$$

REMARQUE 2. — Nous utiliserons le lemme avec  $a_i(x)$  constants. L'existence des  $U$ -nombres au sens de MAHLER [13] justifie la condition

$$\sigma_i(x+1) \leq a_i \sigma_i(x).$$

REMARQUE 3. — Le principe de Dirichlet prouve, ainsi que nous le verrons (§ 4), que le nombre  $C(N)$  dans (3.2) ne peut pas être remplacé par un nombre inférieur à 1.

Pour la démonstration du lemme fondamental, nous utiliserons deux résultats de GEL'FOND ([4], [5]). Le premier est une généralisation d'un lemme de Popken et Koksma (voir [13], lemme 16).

LEMME 1. — Soient  $P_1, P_2 \in \mathbf{C}[X]$  deux polynômes de hauteur  $H_1$  et  $H_2$  respectivement. Soient  $H$  et  $n$  la hauteur et le degré de  $P_1 P_2$ . Alors :

$$(3.4) \quad H \geq e^{-n} H_1 H_2.$$

LEMME 2. — Soient  $\alpha \in \mathbf{C}$ , transcendant,  $P \in \mathbf{Z}[X]$  un polynôme primitif de hauteur  $H_0$  et de degré  $d_0$ . Si

$$(3.5) \quad |P(\alpha)| < H^{-\lambda n}, \quad \lambda > 6; \quad \text{Log } H \geq n \geq d_0; \quad H \geq H_0,$$

alors le polynôme  $P$  a un diviseur primitif irréductible  $Q$  tel que

$$(3.6) \quad |Q(\alpha)| < H^{-\frac{\lambda-6}{s}n}, \quad H^{\frac{1}{s}} e^{\frac{2n}{s}} \geq h; \quad \frac{n}{s} \geq \delta,$$

où  $h$  et  $\delta$  sont la hauteur et le degré de  $Q$ , et  $s$  un entier positif.

Un lemme analogue au lemme 2 a été démontré par LANG ([10], VI, § 2).

*Démonstration du lemme fondamental.* — En divisant  $P_N$  par le p. g. c. d. de ses coefficients, on se ramène au cas où  $P_N$  est primitif, ce que nous supposons. D'autre part, les valeurs de  $\sigma_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) intervenant sont  $\sigma_i(N)$  pour  $N$  entier et  $N \geq N_0$ . On peut donc supposer  $\sigma_i$  continue, et  $\sigma_i(0) = 0$ , pour définir  $\sigma_i^{-1}$  de  $\mathbf{R}_+$  sur  $\mathbf{R}_+$ .

Supposons les hypothèses du lemme vérifiées et le nombre  $\alpha$  transcendant. Les conditions (3.2), (3.5) et (3.6), avec  $\text{Log} H = \sigma_1(q)$  et  $n = \sigma_2(q)$ , montrent que, pour tout  $q > N_0$ , il existe un entier  $s > 0$  et un polynôme  $Q_q \in \mathbf{Z}[X]$ , primitif, irréductible, de hauteur  $h_q$  et de degré  $\delta_q$ , tel que

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} |Q_q(\alpha)| \leq \exp \left[ -\frac{C(q)-6}{s} \sigma_1(q) \sigma_2(q) \right], \\ \delta_q \leq \frac{1}{s} \sigma_2(q), \\ \text{Log} h_q \leq \frac{1}{s} \sigma_1(q) + \frac{2}{s} \sigma_2(q) \leq \frac{3}{s} \sigma_1(q). \end{array} \right.$$

La condition  $\sigma_i(x) \rightarrow \infty$ , quand  $x \rightarrow \infty$ , montre que l'ensemble des polynômes  $Q_q$  ( $q \geq N_0$ ) est infini. On pose

$$(3.8) \quad z_q = \max \left[ \sigma_1^{-1} \left( \frac{1}{3} \text{Log} h_q \right); \sigma_2^{-1} \left( \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} \right) \delta_q \right].$$

Comme  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont croissantes, on déduit de (3.7) et (3.8) :

$$z_q \leq \max \left[ \sigma_1^{-1} \left( \frac{1}{s} \sigma_1(q) \right); \sigma_2^{-1} \left[ \left( \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} \right) \frac{1}{s} \sigma_2(q) \right] \right].$$

On aura donc : d'une part,

$$\text{soit } \sigma_1(z_q) \leq \frac{1}{s} \sigma_1(q), \quad \text{soit } \sigma_2(z_q) \leq \frac{1}{s} \sigma_2(q),$$

d'autre part,  $z_q \leq q$ . D'où

$$(3.9) \quad \sigma_1(z_q) \sigma_2(z_q) \leq \frac{1}{s} \sigma_1(q) \sigma_2(q).$$

Résumons les conditions (3.7) et 3.9) :

Il existe une suite  $(Q_q)$  de polynômes primitifs irréductibles de  $\mathbf{Z}[X]$  tels que

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} |Q_q(\alpha)| \leq \exp - (4 + \varepsilon) \sigma_1(z_q) \sigma_2(z_q), \\ z_q = \max \left[ \sigma_1^{-1} \left( \frac{1}{3} \text{Log } h_q \right); \sigma_2^{-1} \left[ \left( \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} \right) \delta_q \right] \right], \end{array} \right.$$

où  $\delta_q$  est le degré de  $Q_q$  et  $h_q$  sa hauteur.

Comme il y a une infinité de polynômes  $Q_q$  ( $q > N_0$ ), l'un des ensembles  $\{h_q \mid q > N_0\}$ ;  $\{\delta_q \mid q > N_0\}$  n'est pas borné.

On peut extraire de la suite  $(z_q)$  une suite qui tend vers  $+\infty$  avec  $q$ . On notera encore  $(z_q)$  cette nouvelle suite. Soit  $q > N_0$ ,  $N = N_q = [z_q]$ , et  $P_N \in \mathbf{Z}[X]$ , où  $P_N$  est défini par les hypothèses (3.2) de l'énoncé. On a donc

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} |P_N(\alpha)| \leq \exp[-C(N) \sigma_1(N) \sigma_2(N)] \\ \leq \exp[-C(N) \sigma_1(z_q - 1) \sigma_2(z_q - 1)], \\ \text{Log } H_N \leq \sigma_1(N) \leq \sigma_1(z_q) \quad \text{et} \quad d_N \leq \sigma_2(N) \leq \sigma_2(z_q), \end{array} \right.$$

car  $z_q - 1 < N \leq z_q$ .

Or, par hypothèse, on a

$$\sigma_i(z - 1) \geq \frac{1}{a_i(z - 1)} \sigma_i(z) \quad (i = 1, 2)$$

et

$$C(N) \geq (4 + \varepsilon) a_1(z_q - 1) a_2(z_q - 1), \quad \text{car } N - 1 \leq z_q - 1 < N.$$

On aura donc

$$(3.12) \quad |P_N(\alpha)| \leq \exp[-(4 + \varepsilon) \sigma_1(z_q) \sigma_2(z_q)].$$

Le résultant de  $P_N$  et  $Q_q$  est un entier rationnel  $R$  qui vérifie, d'après LANG ([10], V, § 2),

$$(3.13) \quad |R| \leq [(1 + |\alpha|)(d_N + \delta_q)]^{d_N + \delta_q} H_N^{\delta_q} h_q^{\delta_N} \times [ |P_N(\alpha)| + |Q_q(\alpha)| ].$$

Or, si  $q$  est assez grand, on a, d'après (3.10), (3.11), (3.12), (3.13),

$$[(1 + |\alpha|)(d_N + \delta_q)]^{d_N + \delta_q} \leq \exp \left[ \frac{\varepsilon}{4} \sigma_1(z_q) \sigma_2(z_q) \right],$$

$$H_N^{\delta_q} h_q^{\delta_N} \leq \exp \left( 4 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \sigma_1(z_q) \sigma_2(z_q),$$

$$|P_N(\alpha)| + |Q_q(\alpha)| \leq 2 \exp[-(4 + \varepsilon) \sigma_1(z_q) \sigma_2(z_q)].$$

D'où  $|R| < 1$ , donc  $R = 0$ , et  $Q_q$  divise  $P_N$ . Comme  $Q_q$  est un polynôme primitif, il existe  $\mathbf{R} \in \mathbf{Z}[X]$  tel que  $P_N = Q_q \cdot \mathbf{R}$ .



Utilisons le lemme 1. D'après (3.4), on aura

$$\delta_q \leq d_N \leq \sigma_2(z_q) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sigma_2(z_q)$$

$$h_q \leq H_N e^{d_N} < e^{3\sigma_2(z_q)},$$

ce qui contredit la définition (3.8) de  $z_q$ .

Donc  $\alpha$  est algébrique.

#### 4. Répartition des zéros d'une somme de fonctions exponentielles.

Pour utiliser le lemme fondamental, nous aurons besoin d'une majoration du nombre de zéros d'une fonction du type

$$z \rightarrow \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{q_j} b_{i,j} z^{i-1} e^{\omega_j z},$$

où  $q_1, \dots, q_l$  sont des nombres entiers positifs, et  $\omega_j, b_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq q_j$ ,  $1 \leq j \leq l$ ) des nombres complexes. GEL'FOND a énoncé un tel lemme en 1949 [4]. Son étude a été reprise par MAHLER [11], puis par DANCS et TURAN [1], mais leurs énoncés font intervenir un minorant de

$$\delta_j = \prod_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq l}} (\omega_i - \omega_j),$$

et, pour utiliser ces résultats, il fallait imposer une condition d'indépendance linéaire des nombres  $x_1, \dots, x_N$  intervenant dans l'hypothèse.

Le lemme suivant permet de supprimer cette condition. C'est probablement un cas particulier d'un résultat annoncé par VAN DER POORTEN [16] <sup>(2)</sup>.

LEMME 3. — Soient  $q_1, \dots, q_l$  des nombres entiers positifs. Soient  $\omega_1, \dots, \omega_l$  des nombres complexes deux à deux distincts, et  $b_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq q_j$ ;  $1 \leq j \leq l$ ) des nombres complexes non tous nuls.

Le nombre de zéros de la fonction

$$(4.1) \quad f(z) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{q_j} b_{i,j} z^{i-1} e^{\omega_j z},$$

---

<sup>(2)</sup> Cf. R. TIJDEMAN, *Koninkl. Nederl. Akad. van Wet., Proc.*, Série A, t. 74, 1971, p. 1-7.

comptés avec leur ordre de multiplicité, dans le disque  $|z - z_0| \leq \rho$ , est inférieur à

$$(4.2) \quad \min_{\lambda > 0} \left[ n + 2 \cdot \frac{1 + n^\lambda}{\lambda \text{Log } n} (1 + \rho \Omega) \right],$$

où  $\Omega = \max_{1 \leq j \leq l} |\omega_j|$  et  $n = \sum_{j=1}^l q_j$ .

*Démonstration.* — Nous verrons en (b) que l'un des nombres  $f^{(s-1)}(z_a)$ ,  $1 \leq s \leq n$ , est non nul. Quitte à remplacer  $z$  par  $z - z_0$  et  $b_{i,j}$  par

$$\sum_{k=i}^{q_j} b_{k,j} \binom{k-1}{i-1} z_0^{k-i} e^{\omega_j z_0},$$

nous supposons  $z_0 = 0$ .

(a) Soit  $F(z)$  une fonction entière sur  $\mathbf{C}$ , non identique à zéro, et soit  $\sigma$  le nombre de zéros de  $F$  dans le disque  $|z| \leq \rho$ , comptés avec leur ordre de multiplicité. Soient  $s$  un entier,  $s \geq 0$ , et  $R$  un nombre réel,  $R > \rho + 1$ .

On a alors

$$(4.3) \quad |F^{(s)}(0)| \leq s! \frac{R}{R-1} \left( \frac{\rho+1}{R-\rho} \right)^\sigma \times \max_{|\xi|=R} |F(\xi)|.$$

En effet, si  $\beta_1, \dots, \beta_\sigma$  sont les zéros de  $F$ , comptés un nombre de fois égal à leur multiplicité, la formule de Cauchy montre que l'on a

$$F^{(s)}(0) = \frac{s!}{(2i\pi)^2} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^{s+1}} \left[ \int_{|\xi|=R} \prod_{i=1}^{\sigma} \left( \frac{z-\beta_i}{\xi-\beta_i} \right) \frac{F(\xi)}{\xi-z} d\xi \right] dz.$$

Pour obtenir (4.3), on remarque que, pour  $|\xi| = R$  et  $|z| = 1$ , on a

$$|\xi - z| \geq R - 1, \quad |\xi - \beta_i| \geq R - \rho \quad \text{et} \quad |z - \beta_i| \leq \rho + 1.$$

(b) Nous supposons désormais les hypothèses du lemme 3 vérifiées.

Soit  $n = \sum_{j=1}^l q_j$ , et soit  $\Delta$  le déterminant

$$(4.4) \quad \Delta = \left| \left[ \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} z^{i-1} e^{\omega_j z} \right]_{z=0} \right| = \left| \left[ \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} z^{s-1} \right]_{z=\omega_j} \right|,$$

où  $(i, j)$  est l'indice de ligne,  $1 \leq j \leq l$ ,  $1 \leq i \leq q_j$ , et  $s$  est l'indice de colonne,  $1 \leq s \leq n$ . Le déterminant  $\Delta$  est un polynôme en  $T = \omega_1$  dont les dérivées d'ordre inférieur à  $q_1, q_2$  sont nulles pour  $T = \omega_2$ . On en déduit

que  $\Delta$  ne diffère de  $\prod_{i < j} (\omega_i - \omega_j)^{q_i q_j}$ , que par une constante multiplicative (en fait, cette constante est  $\prod_{i=1}^l \prod_{s=0}^{q_j-1} s!$ ). Donc  $\Delta \neq 0$ .

(c) Soit  $\Delta_{s,(i,j)}$  le cofacteur de l'élément  $\left[ \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} z^{i-1} e^{\omega_j z} \right]_{z=0}$  dans le déterminant  $\Delta$  (4.4).

En utilisant la méthode de Van der Poorten [16], nous allons montrer que l'on a

$$(4.5) \quad \max_{0 \leq s \leq n-1} |f^{(s)}(0)| \geq |f(u)| \times \left( \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{q_j} u^{i-1} e^{\omega_i u} \frac{\Delta_{l,(i,j)}}{\Delta} \right| \right)^{-1}$$

pour tout  $u \in \mathbf{C}$ .

En effet, si on considère les  $n$  relations linéaires en  $b_{i,j}$  :

$$\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{q_j} b_{i,j} \left[ \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} z^{i-1} e^{\omega_j z} \right]_{z=0} = \left[ \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} f \right]_{z=0}$$

pour  $1 \leq s \leq n$ , les formules de Cramer donnent

$$b_{i,j} \Delta = \sum_{t=1}^n \Delta_{t,(i,j)} f^{(t)}(0).$$

D'où

$$\Delta f(u) = \sum_{t=1}^n \left( \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{q_j} u^{j-1} e^{\omega_i u} \Delta_{l,(i,j)} \right) \times f^{(t)}(0).$$

La majoration (4.5) en découle immédiatement.

(d) Le polynôme

$$(4.6) \quad P(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^{k-1},$$

où

$$(4.7) \quad a_k = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{q_j} \Delta_{k,(i,j)} u^{i-1} e^{\omega_j u},$$

vérifie les  $n$  relations :

$$(4.8) \quad P^{(k-1)}(\omega_h) = \Delta \cdot \left[ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} e^{u z} \right]_{z=\omega_k} \quad (1 \leq h \leq l, 1 \leq k \leq q_l).$$

En effet, les polynômes

$$(4.9) \quad Q_{i,j}(z) = \sum_{k=1}^n \Delta_{k,(i,j)} z^{k-1} \quad (1 \leq j \leq l, 1 \leq i \leq q_j)$$

vérifient les relations

$$Q_{i,j}^{(k-1)}(\omega_h) = \Delta \cdot \delta_{(i,j),(k,h)} \quad (1 \leq h \leq l, 1 \leq k \leq p_h),$$

où

$$\delta_{(i,j),(k,h)} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (k,h), \\ 0 & \text{si } (i,j) \neq (k,h). \end{cases}$$

Il suffit de remarquer que l'on a, d'après (4.6), (4.7) et (4.9),

$$P(z) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{q_j} u^{i-1} e^{\omega_j u} Q_{i,j}(z).$$

D'où les  $n$  relations (4.8).

(e) Le seul polynôme  $P$ , vérifiant (4.6) et (4.8), est défini par les relations [6] :

$$(4.10) \quad P(z) = \sum_{k=1}^n \Delta \cdot c_k \prod_{h < k} (z - \alpha_h);$$

$$(4.11) \quad c_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{u\gamma}}{\prod_{h \leq k} (\gamma - \alpha_h)} d\gamma,$$

où la suite  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est la suite  $(\omega_1, \dots, \omega_1, \dots, \omega_l, \dots, \omega_l)$ ,  $\omega_h$  étant écrit  $q_h$  fois, et où  $\Gamma$  est un cercle  $|\gamma| = R_1$  avec  $R_1 > \Omega = \sup_{1 \leq h \leq l} |\omega_h|$ .

(f) Nous allons établir la relation :

$$(4.12) \quad \sum_{h=1}^n |a_h| \leq \sum_{k=1}^n \Delta |c_k| \prod_{m < k} (1 + |\alpha_m|),$$

où  $a_h$  est défini par (4.7) et  $c_k$  par (4.11). Soit

$$Q(z) = \sum_{k=1}^n \Delta |c_k| \prod_{h < k} (z + |\alpha_h|).$$

On a, d'après (4.6) et (4.10),

$$a_h = \frac{1}{h!} \left[ \frac{d^h}{dz^h} P(z) \right]_{z=0} = \frac{1}{h!} \sum_{k=1}^n \Delta c_k \left[ \frac{d^h}{dz^h} \prod_{m < k} (z - \alpha_m) \right]_{z=0},$$

or

$$\left| \left[ \frac{d^h}{dz^h} \prod_{m < k} (z - \alpha_m) \right]_{z=0} \right| \leq \left[ \frac{d^h}{dz^h} \prod_{m < k} (z + |\alpha_m|) \right]_{z=0}.$$

D'où  $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq Q(\mathfrak{r})$ , ce qui est la relation (4. 12).

(g) On pose  $R_1 = \Omega + 1$ , où  $\Omega = \sup_{1 \leq h \leq l} |\omega_h|$ . Pour  $|u| \leq R$ , on a, d'après (4. 11) et (4. 12),

$$|c_k| \leq (\Omega + 1) e^{R(\Omega + 1)},$$

et

$$(4. 13) \quad \sum_{i=1}^n |a_i| \leq n(\Omega + 1) e^{R(\Omega + 1)} (\Omega + 1)^n \Delta.$$

De (4. 5), (4. 7) et (4. 13), on déduit, puisque  $\Delta \neq 0$ ,

$$\max_{0 \leq s \leq n-1} |f^{(s)}(0)| \geq [n(\Omega + 1)^{n+1} e^{R(\Omega + 1)}]^{-1} \times \max_{|u|=R} |f(u)|.$$

Utilisons la relation (4. 3) avec  $F = f$ . Comme  $\Delta \neq 0$ , on a, pour  $R > \rho + 1$ ,

$$(4. 14) \quad \left( \frac{R - \rho}{\rho + 1} \right)^\sigma \leq n! (\Omega + 1)^{n+1} \frac{R}{R - 1} e^{R(1 + \Omega)}.$$

Pour  $\Omega = 0$ ,  $f$  est un polynôme et  $\sigma < n$ , donc la formule (4. 2) est vraie. Si  $\Omega > 0$ , le nombre  $\sigma$  est égal au nombre de zéros de la fonction  $z \rightarrow f\left(\frac{z}{\Omega}\right)$  dans le disque  $|z| < \rho \Omega$ , d'où

$$\left( \frac{R - \rho \Omega}{\rho \Omega + 1} \right)^\sigma \leq n! 2^n \frac{2R}{R - 1} e^{2R}.$$

Soit  $\lambda > 0$  et  $\Lambda = n^\lambda (1 + \rho \Omega) + \rho \Omega$ . Si  $\Lambda \geq \frac{3}{2}$ , on choisit  $R = \Lambda$ , et on majore  $\frac{2R}{R - 1}$  par  $e^2$ , et  $n! 2^n$  par  $n^n$ . D'où

$$\sigma < \frac{n}{\lambda} + \frac{2(n^\lambda + 1)}{\lambda \text{Log} n} (\rho \Omega + 1).$$

Si  $\Lambda < \frac{3}{2}$ , alors  $\rho \Omega < \frac{1}{4}$  et  $n^\lambda < \frac{3}{2}$ . On choisit  $R = \frac{13}{4} \rho \Omega + \frac{9}{4}$ . On majore  $\frac{9}{2} (\rho \Omega + 1)$  par  $n \text{Log} n$ , d'où  $2(R + 1) < 2(1 + \rho \Omega) + n \text{Log} n$ , et

$$\sigma < \frac{n \text{Log} n}{\text{Log} \frac{3}{2}} + \frac{1 + \rho \Omega}{\text{Log} \frac{3}{2}} < \frac{n}{\lambda} + \frac{(1 + \rho \Omega)}{\lambda \text{Log} n},$$

d'où la relation (4. 2).

**5. Démonstration du théorème 1.**

Pour démontrer le théorème 1 (§ 2), nous suivrons le schéma suivant : on suppose que la conclusion est fausse; ainsi un corps  $K$  est du type  $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ , où  $\alpha_2$  est algébrique sur  $\mathbb{Q}(\alpha_1)$ .

1° On construit, grâce à un lemme de Siegel, une fonction auxiliaire  $F$  qui a de nombreux zéros.

2° Le lemme 3 (§ 4) permet de majorer le nombre de zéros de  $F$ . Soit  $\gamma$  une valeur correspondante non nulle de  $F$ .

3° Le principe du maximum donne une majoration de  $\gamma$ .

4° On construit ainsi une suite de polynômes en  $\alpha_1$  qui vérifie les hypothèses du lemme fondamental, donc  $\alpha_1$  est algébrique, ce qui contredit un théorème de Lang [10].

Rappelons le lemme de Siegel qui donne des conditions suffisantes pour résoudre, en nombres entiers algébriques, un système d'équations linéaires homogènes à coefficients algébriques.

LEMME 4. — Soient  $L$  un corps de nombres,  $r$  et  $n$  deux nombres entiers positifs,  $r < n$ . Soient

$$a_{i,j} \quad (1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n)$$

des éléments de  $L$ ,  $d_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) un dénominateur de  $(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$ ,  $d = \max d_i$  et  $A = \|(a_{i,j})\|$ .

Alors il existe  $n$  éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $I_L$ , non tous nuls, tels que

$$(5.1) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, r, \\ \|x_i\| \leq C_1 (C_2 n d A)^{\frac{r}{n-r}} + C_1, \end{cases}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes ne dépendant que de  $L$ .

Démonstration. — Voir LANG [10] (chap. I, § 2) ou SCHNEIDER [13] (appendice).

Soient  $x_1, \dots, x_N$  (resp.  $y_1, \dots, y_M$ ) des nombres complexes  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants. Soit  $K$  le corps obtenu en adjoignant à  $\mathbb{Q}$  les  $MN$  nombres

$$e^{x_i y_j} \quad (1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq M).$$

Supposons  $MN \geq 2(M + N)$ ; alors, d'après un théorème de LANG ([10]), chap. II, § 1, th. 1; RAMACHANDRA [12]), l'un au moins des nombres

considérés est transcendant. Nous allons supposer que le degré de transcendance de  $K$  sur  $\mathbf{Q}$  est 1, pour obtenir une contradiction. Ainsi, il existe  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$  tels que

$$K = \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$\alpha_1$  étant transcendant sur  $\mathbf{Q}$ , et  $\alpha_2$  entier sur  $\mathbf{Z}[\alpha_1]$ . Soit  $d = [K : \mathbf{Q}(\alpha_1)]$ . Les nombres  $\{e^{\alpha_i \lambda_j} \mid 1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq M\}$  s'écrivent  $\left\{ \frac{N_l}{N_0} \mid 1 \leq l \leq MN \right\}$ , où  $N_k$  ( $0 \leq k \leq MN$ ) est un élément de  $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_2]$ . Il s'écrit de manière unique

$$N_k = \sum_{h_1 \geq 0} \sum_{h_2=0}^{d-1} a_{h_1, h_2} \alpha_1^{h_1} \alpha_2^{h_2},$$

où  $a_{h_1, h_2} \in \mathbf{Z}$ .

Soit  $r$  le maximum des degrés de  $N_k$  ( $0 \leq k \leq MN$ ) et de  $\alpha_2^d$ .

Soit  $X$  un nombre entier arbitrairement grand :  $X$  sera minoré par un nombre fini d'inégalités. On désignera par  $k_0, k_1, \dots$  des constantes indépendantes de  $X$ .

1° Il existe une famille d'entiers rationnels non tous nuls,

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_{N+2}) = P(\lambda),$$

définis pour

$$(5.2) \quad \begin{cases} 0 \leq \lambda_i \leq 2X^M - 1; & 1 \leq i \leq N; \\ 0 \leq \lambda_{N+1} \leq 2NM r^2 X^{M+N} - 1; \\ 0 \leq \lambda_{N+2} \leq d - 1, \end{cases}$$

et majorés par

$$(5.3) \quad |P(\lambda)| < \exp k_0 X^{M+N},$$

tels que la fonction  $F$ , définie par

$$(5.4) \quad F(z) = \sum_{(\lambda)} P(\lambda) \exp \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i z \right] \cdot \alpha_1^{\lambda_{N+1}} \alpha_2^{\lambda_{N+2}},$$

vérifie

$$(5.5) \quad F(a_1 y_1 + \dots + a_M y_M) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq a_j \leq X^N; \quad 1 \leq j \leq M.$$

En effet, en notant  $a \cdot y$  la somme  $\sum_{j=1}^M a_j y_j$ , on a, d'après (5.4) et (5.5),

$$(5.6) \quad F(a \cdot y) = \sum_{(\lambda)} P(\lambda) \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M e^{\alpha_i y_j \lambda_i a_j} \cdot \alpha_1^{\lambda_{N+1}} \alpha_2^{\lambda_{N+2}}.$$

Donc  $N_0^{2NMX^{M+N}} F(a, y)$  est un élément de  $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_2]$  pour  $1 \leq a_j \leq X^N$ ,  $1 \leq j \leq M$ . Ainsi il existe  $A_{\lambda, h, a} \in \mathbf{Z}$  tels que

$$N_0^{2NMX^{M+N}} F(a, y) = \sum_{h_1=0}^{\tau-1} \sum_{h_2=0}^{d-1} \left( \sum_{(\lambda)} P(\lambda) A_{\lambda, h, a} \right) \alpha_1^{h_1} \alpha_2^{h_2}.$$

De plus, on a

$$\tau \leq 4 N M r^2 X^{M+N} \quad \text{et} \quad |A_{\lambda, h, a}| \leq \exp k_1 X^{M+N}.$$

Considérons le système linéaire homogène en  $P(\lambda)$

$$\begin{aligned} \sum_{(\lambda)} P(\lambda) A_{\lambda, h, a} &= 0, \\ 0 \leq h_1 \leq \tau - 1, & \quad 0 \leq h_2 \leq d - 1, \\ 1 \leq a_j \leq X^N, & \quad 1 \leq j \leq M. \end{aligned}$$

On a ainsi à résoudre un système de  $\tau d X^{MN} \leq 4 N M r^2 d X^{MN+M+N}$  équations à  $2^{N+1} N M r^2 d X^{MN+M+N}$  inconnues. Comme  $N \geq 3$ , le lemme 4 montre qu'il existe une solution dans  $\mathbf{Z}$  non triviale  $P(\lambda)$ , et, d'après (5.1), telle que l'on ait

$$(5.3) \quad |P(\lambda)| < \exp k_0 X^{M+N},$$

où  $k_0$  est une constante indépendante de  $X$ .

$2^0$  Il existe des entiers  $b_1, \dots, b_M$  tels que, pour  $X$  assez grand, on ait

$$(5.7) \quad 1 \leq b_j \leq k_2 X^N, \quad 1 \leq j \leq M \quad \text{et} \quad F(b, y) \neq 0,$$

avec

$$k_2 = [2^{(N+2)/M}].$$

On pose  $Q = 2^N X^{MN}$ . Notons  $\beta_1, \dots, \beta_{s_Q}$  (resp.  $\omega_1, \dots, \omega_Q$ ) les nombres  $\sum_{j=1}^M b_j y_j$ ,  $1 \leq b_j \leq k_2 X^N$  (resp. les nombres  $\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i$ ,  $0 \leq \lambda_i \leq 2 X^M - 1$ ) qui sont deux à deux distincts puisque les nombres  $y_1, \dots, y_M$  (resp.  $x_1, \dots, x_N$ ) sont  $\mathbf{Q}$ -linéairement indépendants.

Pour  $\omega_l = \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i$ , on pose

$$q_l = \sum_{\lambda_{N+1}=0}^{\tau-1} \sum_{\lambda_{N+2}=0}^{d-1} P(\lambda) \alpha_1^{\lambda_{N+1}} \alpha_2^{\lambda_{N+2}}.$$



La transcendance de  $\alpha_1$  montre que l'un au moins des nombres  $q_l$  ( $1 \leq l \leq Q$ ) est non nul.

La fonction  $F$ , définie par (5.4), s'écrit alors

$$F(z) = \sum_{l=1}^Q q_l e^{\omega_l z}.$$

Soient  $\Omega = {}_2 NX^M \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$ ,  $\rho = k_2 X^N$  et  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Le nombre de zéros de la fonction  $F$  dans le disque  $|z| \leq \rho$  est, d'après le lemme 3 du § 4, inférieur à

$${}_2 Q + {}_4 \frac{(1 + Q^{\frac{1}{2}})(1 + \Omega \rho)}{\text{Log } Q} < {}_4 Q.$$

Donc l'un des nombres  $F(\beta_m) = F(b.y)$  est non nul.

3° On a la majoration suivante :

$$(5.8) \quad F(b.y) < \exp[-X^{M+N} \text{Log } X].$$

La fonction  $F$  admet les zéros  $a.y$  ( $1 \leq a_j \leq X^N$ ,  $1 \leq j \leq M$ ). Utilisons le principe du maximum sur le disque de rayon  $R = X^{M+N}$  pour la fonction

$$\frac{F(z)}{\Pi(z - a.y)}.$$

Pour  $|z| \leq R$ , on a, d'après (5.2), (5.3), (5.4) et (5.7),

$$|F(z)| \leq \exp k_3 X^{2M+N} \quad \text{et} \quad |b.y - a.y| < {}_2 k_2 X^N.$$

Or, pour  $|z| = R$ , on a

$$|z - a.y| \geq X^{M+N} - k_4 X^N.$$

D'où

$$\begin{aligned} |F(b.y)| &\leq \left[ \prod_a |b.y - a.y| \right] \times \sup_{|z|=R} \left| \frac{F(z)}{\Pi(z - a.y)} \right| \\ &\leq \exp \left[ k_3 X^{2M+N} - X^{M+N} \text{Log} \frac{X^M - k_4}{{}_2 k_2} \right] \\ &\leq \exp[-X^{M+N} \text{Log } X]. \end{aligned}$$

D'où la relation (5.8).

4° Le nombre  $\alpha_1$  vérifie les hypothèses du lemme fondamental. On pose

$$q(\alpha_1, \alpha_2) = N_0^{2NMk_2 X^{M+N}} F(b.y).$$

Ainsi  $q(\alpha_1, \alpha_2)$  est un élément non nul de  $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_2]$ , d'après (5.2), (5.4) et (5.7).

Prenons sa norme sur  $\mathbf{Q}(\alpha_1)$  : soit

$$P_X(\alpha_1) = N_{K/\mathbf{Q}(\alpha_1)}[q(\alpha_1, \alpha_2)].$$

Ainsi  $P_X$  est un polynôme non nul de  $Z[\alpha_1]$ , de hauteur inférieure à  $\exp k_s X^{M+N}$  et de degré inférieur à  $k_s X^{M+N}$ . De plus, d'après (5.8), on a

$$|P_X(\alpha_1)| < \exp -\frac{1}{2} X^{MN} \text{Log } X.$$

On pose

$$\sigma_1(X) = \sigma_2(X) = k_s X^{M+N}; \quad a_1(X) = a_2(X) = 2.$$

Ainsi on a

$$|P_X(\alpha_1)| < \exp \{ -20 \sigma_1(X) \sigma_2(X) \},$$

donc  $\alpha_1$  vérifie les conditions (3.2). On en déduit que  $\alpha_1$  doit être algébrique. Cette contradiction termine la démonstration.

**6. Indépendance algébrique dans le cas où la dimension est supérieure à 1.**

La méthode de GEL'FOND permettrait de démontrer qu'une famille de  $n$  nombres ( $n > 2$ ) est algébriquement indépendante, si le critère de transcendance que nous venons de voir au paragraphe 3 pouvait se généraliser en un critère d'indépendance algébrique. Pour obtenir dans une certaine mesure les limites d'application de la méthode de GEL'FOND dans son stade actuel, nous allons donner une définition qui montrera quels résultats on peut espérer.

D'après le principe de Dirichlet [2], si  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  sont des nombres complexes algébriquement indépendants, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $H_0 = H_0(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \varepsilon)$  telle que, pour tout  $(s+1)$ -uple  $H(d_1, \dots, d_s)$  de nombres entiers positifs avec  $H > H_0$ , il existe un polynôme  $P \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_s]$ , de hauteur  $H$  et de degré  $d_i$  par rapport à  $X_i$ , tel que

$$|P(\alpha_1, \dots, \alpha_s)| < \exp - (1 + \varepsilon) \text{Log } H \prod_{i=1}^s d_i.$$

L'étude du cas  $s = 1$  (lemme fondamental, § 3) et la définition du « type de transcendance » de LANG [9] justifient les définitions suivantes :

**DÉFINITION 1.** — Soient  $s$  un nombre entier positif,  $s'$  un nombre réel. Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  des nombres complexes. On dira que  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  vérifient  $(\mathfrak{C}_{s'})$  si les conditions suivantes sont réalisées :

Il existe  $(s+1)$  fonctions  $\sigma_0, \dots, \sigma_s$  réelles de variable réelle  $x$ , strictement croissantes, qui tendent vers  $+\infty$  avec  $x$ , et il existe un nombre  $a_0 > 1$

tel que

$$\sigma_j(x) \leq \sigma_0(x); \quad \sigma_j(x+1) \leq a_0 \sigma_j(x) \quad \text{pour } 0 \leq j \leq s \text{ et } x > 0;$$

il existe un nombre entier  $N_0$  positif et, pour tout  $N > N_0$ , un polynôme  $P_N \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_s]$  non nul de hauteur  $H_N$  et de degré  $d_{i,N}$  par rapport à  $X_i$  tels que, pour tout  $N > N_0$ , on ait

$$|P_N(\alpha_1, \dots, \alpha_s)| < \exp - k \left[ \prod_{i=0}^s \sigma_i(N) \right]^{\frac{s'+1}{s+1}},$$

$$\text{Log } H_N \leq \sigma_0(N), \quad d_{i,N} \leq \sigma_i(N) \quad (i = 1, \dots, s),$$

où  $k$  est une constante ne dépendant que de  $a_0, s$  et  $s'$ .

Il est clair que, si  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  sont algébriquement dépendants, alors ils vérifient  $(\mathfrak{E}_{s'})$  pour tout  $s'$ .

D'autre part, si  $s' < s$ , le principe de Dirichlet montre que  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  vérifient  $(\mathfrak{E}_{s'})$ , quels que soient les nombres complexes  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ .

**DÉFINITION 2.** — Soient  $K$  un sous-corps de  $\mathbf{C}$  de degré de transcendance  $s \geq 1$  sur  $\mathbf{Q}$ , et  $s'$  un nombre réel. On dira que  $K$  est un corps  $\mathbf{Q}^{(s')}$  s'il existe des nombres complexes  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  appartenant à  $K$  et ne vérifiant pas  $(\mathfrak{E}_{s'})$ .

On dira que  $K$  est un corps  $\mathbf{Q}^{(0)}$  si  $K$  est une extension algébrique de  $\mathbf{Q}$ .

*Remarque 1.* — Si  $K$  est un corps  $\mathbf{Q}^{(s')}$  et si  $t$  est un nombre réel avec  $t \geq s' \geq 1$ , alors  $K$  est un corps  $\mathbf{Q}^{(t)}$ .

*Remarque 2.* — Si  $K$  est un corps  $\mathbf{Q}^{(s')}$ , le degré  $s$  de transcendance de  $K$  sur  $\mathbf{Q}$  est inférieur ou égal à  $s'$ .

*Remarque 3.* — Si  $K$  est une extension de  $\mathbf{Q}$  de type de transcendance  $\tau$  (LANG [10], chap. V, § 2), alors  $K$  est un corps  $\mathbf{Q}^{(\tau-1)}$ .

Le lemme fondamental peut s'énoncer :

**PROPOSITION.** — Un corps  $K$  est un corps  $\mathbf{Q}^{(1)}$  si, et seulement si,  $K$  est une extension de  $\mathbf{Q}$  de degré de transcendance inférieur ou égal à 1.

On peut alors obtenir les théorèmes suivants :

**THÉORÈME 2.** — Soient  $x_1, \dots, x_N$  (resp.  $y_1, \dots, y_M$ ) des nombres complexes  $\mathbf{Q}$ -linéairement indépendants. Alors le corps obtenu en adjoignant à  $\mathbf{Q}$  les  $MN$  nombres

$$e^{x_i y_j} \quad (1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq M)$$

n'est pas inclus dans un corps  $\mathbf{Q}^{(s)}$  pour  $1 \leq s \leq \frac{MN}{M+N} - 1$ .

Pour  $s = 1$ , d'après la proposition précédente et un théorème de LANG [(10), II, § 1, th. 1; RAMACHANDRA [12)], on retrouve le théorème 1.

THÉORÈME 3. — Soient  $x_1, \dots, x_N$  (resp.  $y_1, \dots, y_M$ ) des nombres complexes  $\mathbf{Q}$ -linéairement indépendants, et  $s$  un nombre réel. Si  $1 \leq s \leq \frac{(M-1)N}{M+N}$ , alors les  $M(N+1)$  nombres

$$y_j, e^{x_i y_j} \quad (1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq M)$$

n'appartiennent pas tous à un même corps  $\mathbf{Q}^{(s)}$ .

Pour  $s = 1$ , le théorème 3 englobe un théorème de GEL'FOND ([5], chap. III, th. 1) et un théorème de ŠMELEV [15] en supprimant leurs hypothèses sur une mesure d'indépendance linéaire de  $x_1, \dots, x_N$  <sup>(3)</sup>.

THÉORÈME 4. — Soient  $x_1, \dots, x_N$  (resp.  $y_1, \dots, y_M$ ) des nombres complexes  $\mathbf{Q}$ -linéairement indépendants, et  $s$  un nombre réel. Si  $1 \leq s < \frac{MN}{M+N}$ , alors les  $MN + M + N$  nombres

$$x_i, y_j, e^{x_i y_j} \quad (1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M)$$

n'appartiennent pas tous à un même corps  $\mathbf{Q}^{(s)}$ .

Pour  $s = 1$ , le théorème 4 permet de supprimer l'hypothèse du théorème 2 ([5], chap. III) de GEL'FOND sur l'indépendance linéaire de  $x_1, \dots, x_N$  <sup>(3)</sup>.

Terminons par une application géométrique, analogue au corollaire 2 du théorème 2 de LANG ([9], chap. V, § 3) (dont nous adoptons les notations) :

THÉORÈME 5. — Soient  $s$  un nombre réel,  $s \geq 1$ , et  $K$  un corps  $\mathbf{Q}^{(s)}$  algébriquement clos. Soient  $G$  un groupe linéaire sur  $\mathbf{C}$ , et  $\varphi : \mathbf{C} \rightarrow G_{\mathbf{C}}$  un sous-groupe à un paramètre de  $G$ , de dimension algébrique  $d$ . Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\mathbf{C}$ , contenant au moins  $m$  éléments  $\mathbf{Q}$ -linéairement indépendants, et tel que  $\varphi(\Gamma) \subset G_K$ .

Alors  $md < (s+1)(m+d)$ .

De plus,

- |  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| si $\Gamma \subset K$ ,                          | alors $md < (s+1)(m+d-1)$ ;       |
| si $\varphi'(0) \in G_K$ ,                       | alors $md < (s+1)m + sd$ ;        |
| si $\Gamma \subset K$ et $\varphi'(0) \in G_K$ , | alors $md \leq (s+1)m + s(d-1)$ . |

Le théorème 5 est équivalent aux théorèmes 2, 3 et 4.

---

<sup>(3)</sup> R. TIJDEMAN a également montré comment supprimer les hypothèses superflues de GEL'FOND et ŠMELEV (R. TIJDEMAN, *Op. cit.*, p. 146-162).

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] DANCS (S.) and TURAN (P.). — On the distribution of values of a class of entire functions, I and II, *Publ. Math.*, Debrecen, t. 11, 1964, p. 257-272.
- [2] FEL'DMAN (N. I.) and ŠIDLOVSKIJ (A. B.). — The development and present state of the theory of transcendental numbers [en russe], *Usp. Mat. Nauk SSSR*, t. 22, 1967, n° 3, p. 3-81; [en anglais] *Russian mathematical Surveys*, t. 22, 1967, n° 3, p. 1-79.
- [3] GEL'FOND (A. O.). — Sur l'indépendance algébrique de puissances algébriques de nombres algébriques [en russe], *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, t. 64, 1949, p. 277-280; t. 67, 1949, p. 13-14.
- [4] GEL'FOND (A. O.). — On the algebraic independence of transcendental numbers in certain classes [en russe], *Uspekhi mat. Nauk*, t. 4, 1949, n° 5, p. 14-48; [en anglais] in *Number theory and analysis*. — Providence, American mathematical Society, 1962 (*American mathematical Society Translations*, Series 1, vol. 2, p. 125-169).
- [5] GEL'FOND (A. O.). — *Transcendental and algebraic numbers*. Translated from the 1st (1952) russian edition. — New York, Dover Publications, 1960.
- [6] GEL'FOND (A. O.). — *Calcul des différences finies*. Traduction de l'ouvrage publié à Moscou en 1959. — Paris, Dunod, 1963 (*Collection universitaire de Mathématiques*, 12).
- [7] GEL'FOND (A. O.) et FEL'DMAN (N. I.). — Sur la mesure de la transcendance réciproque de certains nombres [en russe], *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, t. 14, 1950, p. 493-500.
- [8] LANG (S.). — Report on diophantine approximations, *Bull. Soc. math. France*, t. 93, 1965, p. 177-192.
- [9] LANG (S.). — Nombres transcendants, *Séminaire Bourbaki*, 18<sup>e</sup> année, 1965-1966, n° 305, 8 p.
- [10] LANG (S.). — *Introduction to transcendental numbers*. — Reading, Addison Wesley publishing Company, 1966 (*Addison-Wesley Series in Mathematics*).
- [11] MAHLER (K.). — On a class of entire functions, *Acta Math. Acad. Sc. Hungar.*, t. 18, 1967, p. 83-86.
- [12] RAMACHANDRA (K.). — Contribution to the theory of transcendental numbers, I and II, *Acta Arithm.*, t. 14, 1967-1968, p. 65-88.
- [13] SCHNEIDER (T.). — *Einführung in die transzendenten Zahlen*. — Berlin, Springer, 1957; *Introduction aux nombres transcendants*. — Paris, Gauthier-Villars, 1959.
- [14] ŠMELEV (A. A.). — Concerning algebraic independence of some transcendental numbers [en russe], *Mat. Zametki*, t. 3, 1968, p. 51-58; [en anglais], *Mathematical Notes*, t. 3, 1968, p. 31-35.
- [15] ŠMELEV (A. A.). — On algebraic independence of some numbers [en russe], *Mat. Zametki*, t. 4, 1968, p. 525-532; [en anglais], *Mathematical Notes*, t. 4, 1969, p. 805-809.
- [16] VAN DER POORTEN (A. J.). — A generalisation of Turan's main theorems to binomials and logarithms, *Bull. Austral. math. Soc.*, t. 2, 1970, p. 183-195.
- [17] WALDSCHMIDT (M.). — Solution d'un problème de Schneider sur les nombres transcendants, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, 1970, série A, p. 697-700.
- [18] WALDSCHMIDT (M.). — Amélioration d'un théorème de Lang sur l'indépendance algébrique d'exponentielles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 272, 1971, série A, p. 413-415.

(Texte définitif reçu le 5 mars 1971.)

Michel WALDSCHMIDT,  
U. E. R. de Mathématiques et Informatique,  
Université de Bordeaux I,  
351 cours de la Libération, 33-Talence.