Seminaire Delange-Pisot-Poitou
(Theorie des Nombres)
1980-81

SUR CERTAINS CARACTERES DU GROUPE DES CLASSES D'IDELES D'UN CORPS DE NOMBRES

Michel Waldschmidt
Institut Henri Poincaré

Dans son étude de certains caractères du groupe des classes d'idèles d'un corps de nombres, A. Weil [8] a appelé caractères de type (A) ceux dont la restriction à $k_\lambda^\times$, pour chaque λ archimédien, est de la forme

$$z \mapsto (z/|z|)^{m_\lambda} \cdot |z|^{t_\lambda},$$

avec $m_\lambda \in \mathbb{Z}$ et $t_\lambda \in \mathbb{Q}$, et il a appelé caractères de type (A_0) ceux dont la restriction à chacun de ces $k_\lambda^\times$ est de la forme

$$z \mapsto \pm z^{r_\lambda} \bar{z}^{s_\lambda},$$

avec $r_\lambda \in \mathbb{Z}$, $s_\lambda \in \mathbb{Z}$, et le signe peut dépendre de z. Il a noté que si χ est un caractère de type (A), les coefficients de la série L de Hecke associée à χ sont algébriques; si χ est de type (A_0), ces coefficients se trouvent dans une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$. Il a alors suggéré que la réciproque pouvait être vraie, et nous allons voir qu'il en est bien ainsi.

La solution de ce problème repose sur un énoncé de transcendance [7] que nous présentons au §1. Après quelques généralités sur les caractères de Hecke (§2), nous donnons un premier critère (§3) permettant de reconnaître les caractères de type (A). Nous en déduisons des propriétés de densité liées au plongement de $k^\times$ dans la partie à l'infini du groupe des idèles (§4). Nous obtenons ensuite un énoncé (§5) sur les caractères de type (A_0). Enfin nous étudions les séries L de Hecke associées aux "Grössencharaktere".

Notons que l'analogue p-adique de ce problème, posé par J.-P. Serre [4], fait l'objet d'un exposé de G. Henniart [2] dans ce séminaire.

1. Un énoncé de transcendance [7].

Nous utiliserons le résultat suivant qui est démontré dans [7].

Théorème 1.1. *Soient* $X = \mathbb{Z}x_1 + \ldots + \mathbb{Z}x_d$ *et* $Y = \mathbb{Z}y_1 + \ldots + \mathbb{Z}y_\ell$ *deux sous-groupes de* $\mathbb{C}^n$ *de rang* d *et* ℓ *respectivement, avec* $\ell d > n(\ell + d)$. *On suppose que les nombres*

$$\exp \langle x,y\rangle, \qquad (x \in X,\ y \in Y)$$

sont tous algébriques.

Alors il existe des sous-groupes X_1, X_2 *de* X, *et* Y_1, Y_2 *de* Y, *avec*

$$X = X_1 \oplus X_2, \qquad Y = Y_1 \oplus Y_2, \qquad \langle X_1, Y_2\rangle = 0,$$

et, en désignant par d_1 *le rang de* X_1, *par* ℓ_1 *le rang de* Y_1, *et par* n_1 *la dimension du* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel engendré par* X_1,

$$d_1 > n_1\, d/n\,, \quad \text{et} \quad \ell_1 d_1 \le n_1(\ell_1 + d_1).$$

En fait, nous n'aurons besoin ici que du corollaire suivant:

Corollaire 1.2. *Soient* $\alpha_{\nu j}$, $(1 \le \nu \le n,\ 1 \le j \le \ell)$ *des nombres algébriques multiplicativement indépendants, avec* $\ell \ge n^2 + n + 1$. *Pour* $1 \le \nu \le n$, $1 \le j \le \ell$, *soit* $\log \alpha_{\nu j}$ *une détermination du logarithme de* $\alpha_{\nu j}$. *Soient* $t_1, \ldots, t_n$ *des nombres complexes. Si les* ℓ *nombres*

$$\prod_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu j}^{t_\nu} = \exp\Big(\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu \log \alpha_{\nu j}\Big), \qquad (1 \le j \le \ell)$$

sont tous algébriques, alors $t_1, \ldots, t_n$ *sont tous rationnels.*

<u>Démonstration du corollaire 1.2.</u> Notons

$$y_j = (\log\alpha_{1j},\ldots,\log\alpha_{nj}) \in \mathbb{C}^n, \quad (1 \le j \le \ell),$$

et

$$X = \mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}(t_1,\ldots,t_n), \quad Y = \mathbb{Z}y_1 + \ldots + \mathbb{Z}y_\ell.$$

Si l'un des t_ν est irrationnel, c'est-à-dire si X est de rang $d = n+1$, comme Y est de rang ℓ avec $\ell d > n(\ell + d)$, le théorème 1.1 permet d'écrire

$$X = X_1 \oplus X_2, \quad Y = Y_1 \oplus Y_2, \quad \langle X_1, Y_2\rangle = 0,$$

avec $d_1 > n_1 d/n$, $\ell_1 d_1 \le n_1(\ell_1 + d_1)$,
où

$$d_1 = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}} X_1, \quad \ell_1 = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}} Y_1, \quad n_1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}X_1.$$

La condition $d_1 > 0$ entraîne $X_1 \neq 0$, donc $n_1 > 0$; alors $d_1 \ge 2$, et il en résulte $X_1 \cap \mathbb{Z}^n \neq 0$. On choisit $a = (a_1,\ldots,a_n) \in X_1 \cap \mathbb{Z}^n$, $a \neq 0$.

Les inégalités

$$\ell_1 \le d_1 n_1/(d_1 - n_1) < dn/(d-n) < \ell$$

impliquent $Y_2 \neq 0$. On choisit $b = (b_1,\ldots,b_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ avec

$$0 \neq b_1 y_1 + \ldots + b_\ell y_\ell \in Y_2.$$

Alors

$$\langle a, b_1 y_1 + \ldots + b_\ell y_\ell\rangle = 0,$$

ce qui donne

$$\prod_{\nu=1}^{n} \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_{\nu j}^{a_\nu b_j} = 1,$$

et contredit l'hypothèses d'indépendance multiplicative des nombres $\alpha_{\nu j}$.

Remarque. On peut affaiblir l'hypothèse sur l'indépendance multiplicative des $\alpha_{\nu j}$. Voir par exemple [7] corollaire 7.1.b.

2. Généralités sur les caractères de Hecke [3, 5, 8, 9].

Soient k un corps de nombres, $\mathbb{A}_k^\times$ le groupe des idèles de k, $C_k = \mathbb{A}_k^\times/k^\times$ le groupe des classes d'idèles de k. Un caractère de Hecke de k est un homomorphisme continu de C_k dans $\mathbb{C}^\times$, que l'on considérera aussi comme un homomorphisme continu $\chi: \mathbb{A}_k^\times \to \mathbb{C}^\times$ trivial sur $k^\times$.

Pour chaque place v de k, la restriction χ_v de χ à $k_v^\times$ définit un homomorphisme continu $k_v^\times \to \mathbb{C}^\times$. Si v est une place archimédienne, il existe $m_v \in \mathbb{Z}$ et $t_v \in \mathbb{C}$ tels que

$$\chi_v(z) = (z/|z|)^{m_v} \cdot |z|^{t_v} \quad \text{pour tout } z \in k_v^\times.$$

Si v est une place finie correspondant à un idéal premier $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_v$ de k, comme $k_v^\times$ est localement compact et totalement discontinu χ_v est localement constant, et il existe $m_v \in \mathbb{Z}$, $m_v \geq 0$, tel que χ_v soit trivial sur $1 + \mathfrak{P}^{m_v}$; on note alors f_v le plus petit de ces entiers m_v; c'est le degré de ramification de χ à la place v. Si $f_v = 0$, c'est-à-dire si χ_v est trivial sur le groupe U_v des unités de k_v, on dit que χ est non ramifié en v.

Comme tout voisinage de 1 dans $\mathbb{A}_k^\times$ contient un sous-groupe de la forme

$$\left(\prod_{v \in P} 1\right)\left(\prod_{v \notin P} U_v\right),$$

où P est un ensemble fini de places (contenant les places archimédiennes), il existe un ensemble fini de places en dehors duquel χ est non ramifié. Si $a = (a_v) \in \mathbb{A}_k^\times$, on a donc $\chi_v(a_v) = 1$ pour presque tout v, et

$$\chi(a) = \prod_v \chi_v(a_v).$$

L'idéal entier $\mathfrak{f} = \prod_v \mathfrak{P}_v^{f_v}$ (où le produit est étendu aux places finies ramifiées) est le conducteur de χ.

Notons $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ les plongements de k dans $\mathbb{C}$, où $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$ sont les plongements réels, alors que σ_ν et $\sigma_{r_2+\nu}$ sont complexes conjugués, $(r_1 < \nu \leq r_1 + r_2)$. Ainsi

$$d = [k:\mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2.$$

La partie à l'infini du groupe des idèles de k est le sous-groupe

$$(k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times = \mathbb{R}^{\times r_1} \times \mathbb{C}^{\times r_2}$$

de $\mathbb{A}_k^\times$, et la restriction ψ de χ à ce sous-groupe s'écrit

$$\psi(z) = \prod_{\nu=1}^{n} (z_\nu/|z_\nu|)^{m_\nu}|z_\nu|^{t_\nu}, \quad (z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{R}^{\times r_1} \times \mathbb{C}^{\times e_2})$$

avec $n = r_1 + r_2$.

On notera ι l'injection $k^\times \to (k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times$:

$$\iota(\alpha) = (\sigma_\nu\alpha)_{1\leq\nu\leq n}.$$

Ainsi, pour $\alpha \in k^\times$,

$$\psi \circ \iota(\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} (\sigma_\nu\alpha/|\sigma_\nu\alpha|)^{m_\nu}|\sigma_\nu\alpha|^{t_\nu}.$$

Un caractère χ est <u>de type</u> (A) si $t_1,\dots,t_n$ sont tous rationnels. Il est <u>de type</u> (A_0) si $t_\nu \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leq \nu \leq r_1$, et $t_\nu - m_\nu \in 2\mathbb{Z}$ pour $r_1 < \nu \leq n$.

Dire que χ est de type (A_0) revient à dire qu'il existe des entiers rationnels a_ν, b_ν, $(1 \leq \nu \leq n)$, tels que

$$\psi(z) = \Big(\prod_{\nu=1}^{r_1} (\operatorname{sgn} z_\nu)^{a_\nu} z_\nu^{b_\nu}\Big)\Big(\prod_{\nu=r_1+1}^{n} z_\nu^{a_\nu}\bar{z}_\nu^{b_\nu}\Big),$$

où $\operatorname{sgn} x$ est le signe de x (égal à ± 1) pour $x \in \mathbb{R}$, et $\bar{z}$ est le complexe conjugué de z pour $z \in \mathbb{C}$.

Enfin si $\mathfrak{m}$ est un idéal entier de k, on notera $k^\times(\mathfrak{m})$ le sous-groupe de $k^\times$ formé des α vérifiant

$$\alpha \equiv 1 \bmod^\times \mathfrak{m}$$

(cf. par exemple [3] Chap. VI §1), et $k_+^\times(\mathfrak{m})$ le sous-groupe de $k^\times(\mathfrak{m})$ formé des α qui sont positifs en chaque place réelle:

$\sigma_\nu \alpha > 0 \quad$ pour $\ 1 \leq \nu \leq r_1$.

3. Caractères de type (A).

Soient k un corps de nombres, χ un caractère de Hecke de k, $\mathfrak{m}$ un multiple du conducteur de χ, et ψ la restriction de χ à $(k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times$.

Il est clair que si χ est de type (A), les valeurs de ψ sur $\iota(k^\times)$ sont algébriques. Nous montrons que la réciproque est vraie. Pour l'application que nous avons en vue au §6, nous établissons un résultat plus précis en nous restreignant à $k^\times(\mathfrak{m})$.

Théorème 3.1. Si les nombres $\psi \circ \iota(\alpha)$, $(\alpha \in k^\times(\mathfrak{m}))$ sont tous algébriques, alors χ est de type (A).

L'hypothèse s'écrit

$$\prod_{\nu=1}^{n} |\sigma_\nu \alpha|^{t_\nu} \in \bar{\mathbb{Q}} \quad \text{pour tout } \alpha \in k^\times(\mathfrak{m}).$$

Il s'agit de montrer que $t_1,\dots,t_n$ sont tous rationnels. Grâce au corollaire 1.2, il suffit de vérifier le lemme suivant:

Lemme 3.2. Il existe une suite $(\alpha_j)_{j \geq 1}$ d'éléments de $k_+^\times(\mathfrak{m})$ telle que les nombres

$$\sigma_i \alpha_j, \quad (1 \leq i \leq d,\ j \geq 1)$$

soient multiplicativement indépendants.

Démonstration du lemme 3.2. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ contenant tous les $\sigma_i(k)$, $1 \leq i \leq d$. Soit p_1 un nombre premier totalement décomposé dans K, vérifiant $(p_1, \mathfrak{m}) = 1$, et soit v_1 une place de K au dessus de p_1. Par le théorème d'approximation, il existe $\alpha_1 \in k_+^\times(\mathfrak{m})$ tel que $\sigma_1 \alpha_1$ soit une uniformisante en v_1, et que les $\sigma_i \alpha_1$, $(2 \leq i \leq d)$ soient des unités en v_1.

Une fois $\alpha_1,\dots,\alpha_{\ell-1}$ construits, on considère un nombre premier p_ℓ totalement décomposé dans K, avec $(p_\ell, \mathfrak{m}) = 1$, et tel que les $\sigma_i \alpha_j$, $(1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j < \ell)$ soient des unités en toutes les places de K au dessus de p_ℓ. On choisit une place v_ℓ de K au dessus de p_ℓ, et on construit $\alpha_\ell \in k_+^\times(\mathfrak{m})$ tel que $\sigma_1\alpha_\ell$ soit une uniformisante en v_ℓ et que les $\sigma_i\alpha_\ell$, $(2 \leq i \leq d)$ soient des unités en v_ℓ.

La théorie de Hecke permet de préciser le lemme 3.2. Voir en particulier [3], et [1] §2.

4. Plongement de $k^\times$ dans $(k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times$.

Notons G l'image inverse de $\iota(k^\times)$ par l'application exponentielle $\exp: k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to (k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times$.

Théorème 4.1. Soit H un hyperplan réel de $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Alors $G/G \cap H$ a un rang infini sur $\mathbb{Z}$.

On peut déduire cet énoncé du corollaire 7.3.c de [7], mais nous allons en donner une démonstration directe à partir du corollaire 1.2.

Démonstration du théorème 4.1. On reprend la suite $(\alpha_j)_{j\geq 1}$ du lemme 3.2 (avec $\mathfrak{m} = (1)$). Soit $\ell_0 > 0$, et soit j, $1 \leq j \leq \ell_0$; comme α_j est positif aux places réelles, il existe $y_j = (y_{\nu j})_{1\leq\nu\leq n} \in G$ vérifiant

$$\exp(y_{\nu j}) = \sigma_\nu\alpha_j, \quad (1 \leq \nu \leq n).$$

Notons

$$y = \mathbb{Z}y_1 + \dots + \mathbb{Z}y_{\ell_0}.$$

On va montrer que le rang ℓ de $Y' = Y \cap H$ est majoré par $d(d-1)$. On en déduira

$$\mathrm{rang}_{\mathbb{Z}}\, Y/Y \cap H \geq \ell_0 - d(d-1),$$

donc

$$\mathrm{rang}_{\mathbb{Z}}\, G/G \cap H = \infty.$$

Soit $y_1', \dots, y_\ell'$ une base de Y' sur $\mathbb{Z}$. On définit $\alpha_j' \in k^\times$, $(1 \leq j \leq \ell)$ par

$$\exp(y'_{\nu j}) = \sigma_\nu \alpha'_j, \quad (1 \leq \nu \leq n).$$

On prend des coordonnées réelles $(x_1, \dots, x_d)$ sur $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ en posant

$$z_\mu = \begin{cases} x_\nu, & (1 \leq \nu \leq r_1), \\ x_\nu + ix_{r_2+\nu}, & (r_1 < \nu \leq r_1 + r_2). \end{cases}$$

On écrit alors une équation de l'hyperplan réel H, et on trouve

$$\prod_{i=1}^{d} (\sigma_i \alpha'_j)^{t_i} = 1, \quad (1 \leq j \leq \ell),$$

avec $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{C}^d$, $t \neq 0$. En divisant tous les t_i par l'un d'eux, on peut supposer qu'il existe i_0, $1 \leq i_0 \leq d$, avec $t_{i_0} = -1$. Alors pour $1 \leq j \leq \ell$ on a

$$\prod_{\substack{1<i<d \\ i \neq i_0}} (\sigma_i \alpha'_j)^{t_i} = \sigma_{i_0} \alpha'_j.$$

Comme les $\sigma_i \alpha'_j$, $(1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq \ell)$ sont multiplicativement indépendants, les t_i ne sont pas tous rationnels. Alors le corollaire 1.2 (avec n remplacé par $d-1$) entraîne $\ell \leq d(d-1)$.

On en déduit un énoncé analogue pour l'image de $k^\times$ dans $\mathbb{R}^n$, $(n = r_1 + r_2)$, par le plongement logarithmique:

$$L(\alpha) = (\log |\sigma_\nu \alpha|)_{1 \leq \nu \leq n}.$$

__Corollaire 4.2__. __Si__ H __est un hyperplan de__ $\mathbb{R}^n$, __le rang sur__ $\mathbb{Z}$ __de__ $L(k^\times)/L(k^\times) \cap H$ __est infini.__

__Démonstration du corollaire 4.2__. Soit $p: k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{r_1+r_2}$ la projection obtenue en prenant les parties réelles des r_2 dernières composantes de $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$. On a $p(G) = L(k^\times)$, d'où

$$G/G \cap p^{-1}(H) \cong L(k^\times)/L(k^\times) \cap H.$$

Comme la codimension sur $\mathbb{R}$ de $p^{-1}(H)$ dans $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ est ≥ 1, le théorème 4.1 donne le résultat.

Voici une autre conséquence du théorème 4.1 (cf. [1] §3, [7] p. 99 et 110-111), [10] et [11]).

Corollaire 4.3. Il existe un sous-groupe de type fini de $k^{\times}$ dont l'image par ι est dense dans $(k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{\times}$.

Démonstration. Comme le conoyau de exp: $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to (k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{\times}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_1}$, grâce au théorème d'approximation il suffit de montrer que G contient un sous-groupe de type fini dense dans $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. On combine alors le théorème 4.1 avec le lemme facile suivant:

Lemme 4.4. Soit G un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe un sous-groupe de G, de type fini, dense dans $\mathbb{R}^n$.

(ii) Pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ on a $\operatorname{rang}(G/G \cap H) \geq 2$.

(iii) On a $\mu(G, \mathbb{R}^n) > 1$.

Rappelons [6,7] que

$$\mu(G, \mathbb{R}^n) = \min\{\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} s_W(G)/\operatorname{codim} W,\ W \subsetneq \mathbb{R}^n\},$$

où, pour W sous-espace de $\mathbb{R}^n$, $s_W: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/W$ désigne la surjection canonique. La condition $\mu(G, \mathbb{R}^n) > 1$ équivaut à dire qu'il existe un sous-groupe Γ de type fini de G tel que $\mu(\Gamma, \mathbb{R}^n) > 1$. D'autre part le théorème 4.1 s'énonce de manière équivalente:

$$\mu(G, k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) = \infty.$$

5. Caractères de type (A_0).

On reprend les notations du §3. Si χ est de type (A_0), les valeurs de ψ sur $\iota(k^{\times})$ appartiennent à une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$ (en fait au compositum des corps $\sigma_\nu(k)$, $1 \leq \nu \leq n$). Nous établissons la réciproque.

Théorème 5.1. S'il existe un corps de nombres K tel que

$$\psi \circ \iota(\alpha) \in K \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in k^{\times}(\mathfrak{m}),$$

alors χ est de type (A_0).

Démonstration du théorème 5.1. On sait déjà, par le théorème 3.1, que χ est de type (A). D'autre part on peut supposer

$K \supset \sigma_\nu(k)$, $(1 \leq \nu \leq n)$.

On définit des nombres rationnels $q_1,\ldots,q_d$ en posant d'abord

$$q_\nu = \begin{cases} t_\nu, & (1 \leq \nu \leq r_1) \\ (t_\nu - m_\nu)/2, & (r_1 < \nu \leq r_1 + r_2), \end{cases}$$

puis

$$q_i = q_{i-r_2}, \quad (r_1 + r_2 < i \leq d).$$

On peut alors écrire

$$\prod_{i=1}^{d} (\sigma_i \alpha)^{q_i} \in K \quad \text{pour tout } \alpha \in k_+^\times(\mathfrak{m}),$$

et il s'agit de montrer que $q_1,\ldots,q_d$ sont tous entiers. Si ce n'est pas le cas, il existe un nombre premier p et un entier N tels que les nombres $m_i = Nq_ip$ soient entiers et non tous divisibles par p. On utilise alors le lemme suivant:

Lemme 5.2. Soient k un corps de nombres, $\mathfrak{m}$ un idéal entier de k, $\sigma_1,\ldots,\sigma_d$ les plongements de k dans $\mathbb{C}$, et K une extension finie de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Il existe $\alpha \in k_+^\times(\mathfrak{m})$ ayant la propriété suivante.

Soient p un nombre premier, et $m_1,\ldots,m_d$ des entiers rationnels non tous divisibles par p. Alors le nombre

$$\prod_{i=1}^{d} (\sigma_i \alpha)^{m_i}$$

n'est pas une puissance p-ième dans K.

Démonstration du lemme 5.2. En fait la construction du lemme 3.2 montre qu'une relation de la forme

$$\prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{\ell} (\sigma_i \alpha_j)^{m_{ij}} \in K^p$$

avec p premier et $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ implique que tous les m_{ij} sont divisibles par p.

6. Grössencharaktere et séries L de Hecke.

Soient χ un caractère de Hecke de k, $\mathfrak{f}$ son conducteur, $G(\mathfrak{f})$

le groupe des idéaux fractionnaires non nuls de k premiers à $\mathfrak{f}$.

Soit v une place finie de k où χ est non ramifié, c'est-à-dire telle que l'idéal premier $\mathfrak{P}_v = \mathfrak{P}$ correspondant ne divise pas $\mathfrak{f}$, et soit χ_v la restriction de χ à $k_v^\times$. La valeur $\chi_v(\pi_v)$ de χ_v en une uniformisante π_v de k_v ne dépend pas de l'uniformisante π_v, mais seulement de v, c'est-à-dire de $\mathfrak{P}$. On pose: $\tilde{\chi}(\mathfrak{P}) = \chi_v(\pi_v)$, ce qui définit par multiplicativité un homomorphisme $\tilde{\chi}: G(\mathfrak{f}) \to \mathbb{C}^\times$ qui est le "Grössencharakter" associé à χ.

Soit $\mathfrak{a} \in G(\mathfrak{f})$, $\mathfrak{a} = \prod_{v \text{ finie}} \mathfrak{P}_v^{m_v}$. On a $\tilde{\chi}(\mathfrak{a}) = \chi(a)$, chaque fois que $a = (a_v)$ est un idèle de la forme suivante: $a_v = 1$ si v est une place infinie, $a_v \in 1 + \mathfrak{P}_v^{f_v}$ si v est une place finie ramifiée (et f_v est le degré de ramification), et $a_v = \pi_v^{m_v} u_v$, si v est une place finie non ramifiée, avec π_v une uniformisante et u_v une unité dans k_v.

<u>Lemme 6.1.</u> <u>Pour</u> $\alpha \in k^\times(\mathfrak{f})$, <u>on a</u> $\tilde{\chi}((\alpha))\cdot\psi \circ \iota(\alpha) = 1$.

<u>Démonstration</u> (cf. [8]). Comme χ est trivial sur $k^\times$, on a, en notant α_v l'image de $\alpha \in k$ dans k_v,

$$\Big(\prod_{f \text{ finie}} \chi_v(\alpha_v)\Big)\cdot\psi \circ \iota(\alpha) = 1 \quad \text{pour tout } \alpha \in k^\times.$$

D'autre part les propriétés qui ont servi à définir le conducteur $\mathfrak{f}$ (voir §2), et la construction de $\tilde{\chi}$, montrent que, pour $\alpha \in k^\times(\mathfrak{f})$, on a

$$\prod_{v \text{ finie}} \chi_v(\alpha_v) = \tilde{\chi}((\alpha)).$$

D'où le lemme 6.1.

<u>Corollaire 6.2.</u> <u>Le caractère</u> χ <u>est de type</u> (A) <u>si et seulement si les nombres</u> $\tilde{\chi}(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{a} \in G(\mathfrak{f}))$ <u>sont tous algébriques.</u>

<u>Il est de type</u> (A_0) <u>si et seulement si les nombres</u> $\tilde{\chi}(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{a} \in G(\mathfrak{f}))$ <u>engendrent une extension finie de</u> $\mathbb{Q}$.

<u>Démonstration.</u>

a) Supposons que χ soit de type (A) (resp. de type (A_0)), et notons $K = \bar{\mathbb{Q}}$ (resp. K = le compositum des corps $\sigma_\nu(k)$, $1 \le \nu \le n$). D'après le lemme 6.1 on a

$\tilde{\chi}((\alpha)) \in K$ pour tout $\alpha \in k^{\times}(\mathfrak{f})$.

On utilise alors le fait que l'image de $k^{\times}(\mathfrak{f})$ dans $G(\mathfrak{f})$ est d'indice fini (voir [8]).

b) La réciproque est une conséquence immédiate du lemme 6.1 et des théorèmes 3.2 et 5.1.

Le <u>série L de Hecke</u> attachée au Grössencharakter $\tilde{\chi}$ est définie, pour $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle suffisamment grande, par

$$L(s,\tilde{\chi}) = \sum_{\mathfrak{a}} \tilde{\chi}(\mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{-s},$$

où $\mathfrak{a}$ décrit les idéaux entiers de $G(\mathfrak{f})$.

Ecrivons $L(s,\tilde{\chi})$ sous la forme habituelle d'une série de Dirichlet:

$$L(s,\tilde{\chi}) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}.$$

<u>Si les nombres</u>

$$a_n = \sum_{N\mathfrak{a}=n} \tilde{\chi}(\mathfrak{a}), \qquad (n \geq 1),$$

<u>sont tous algébriques, alors il en est de même des nombres</u> $\tilde{\chi}(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{a} \in G(\mathfrak{f}))$.

En effet, supposons $a_n \in \bar{\mathbb{Q}}$ pour tout $n \geq 1$. Pour chaque nombre premier p on écrit

$$A_p(T) = \prod_{\mathfrak{p}|p} (1 - \tilde{\chi}(\mathfrak{p})\, T^{\deg \mathfrak{p}})^{-1},$$

en posant $\tilde{\chi}(\mathfrak{p}) = 0$ si $\mathfrak{p}$ divise $\mathfrak{f}$. De la relation

$$L(s,\tilde{\chi}) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \tilde{\chi}(\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

on déduit

$$A_p(T) = \sum_{k \geq 0} a_{p^k} T^k,$$

donc $A_p(T)$ est une fraction rationnelle à coefficients algébriques. Il en résulte que ses pôles sont algébriques, donc $\tilde{\chi}(\mathfrak{p}) \in \bar{\mathbb{Q}}$ pour tout $\mathfrak{p}$ et finalement $\tilde{\chi}(\mathfrak{a}) \in \bar{\mathbb{Q}}$ pour tout $\mathfrak{a} \in G(\mathfrak{f})$.

REFERENCES

1. Colliot-Thélène, J.-L., Coray, D. et Sansuc, J.-J. Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles, J. reine angew. Math. 320, 150-191 (1980).

2. Henniart, G. Représentations ℓ-adiques abéliennes, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1980-81, (Séminaire Delange-Pisot-Poitou), 12 Janvier 1981, (même volume).

3. Lang, S. Algebraic number theory, Addison Wesley, 1970.

4. Serre, J.-P. Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves, Benjamin New York, 1968 (McGill University Lecture Notes).

5. Taniyama, Y. L-functions of number fields and zeta functions of abelian varieties, J. Math. Soc. Japan 9, 330-366 (1957).

6. Waldschmidt, M. Propriétés arithmétiques de fonctions de plusieurs variables (III), Séminaire P. Lelong, H. Skoda (Analyse), 18e et 19e années, 1978/79, Lecture Notes in Math., 822, 332-356, (1980), Springer-Verlag.

7. Waldschmidt, M. Transcendance et exponentielles en plusieurs variables, Invent. Math. 63, 97-127 (1981).

8. Weil, A. On a certain type of characters of the idèle-class group of an algebraic number field, Proc. Intern. Symp. Alg. Geom., Tokyo Nikko 1955, Tokyo (1956). Oeuvres Scientifiques, Vol. II, 255-261 (1955c).

9. Weil, A. Basic number theory, Grund. der Math. Wiss. 144, Springer-Verlag 1974.

10. Lenstra, H. W. On a question of Colliot-Thélène, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (théorie des nombres), 1980-81 (même volume).

11. Sansuc, J. J. Descent et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (théorie de nombres), 1980-81 (même volume).