El diablo de los números

Sección a cargo de

Fernando Chamizo Lorente

¿Y quién es... Michel Waldschmidt? *Para cualquiera que se dedique a la teoría de números, es un investigador de primera línea en temas de trascendencia y aproximación diofántica. Por otra parte, ha sido presidente de la* Société Mathématique de France *y vicepresidente del* CIMPA (International Centre for Pure and Applied Mathematics)*. *Probablemente, el profesor Waldschmidt es menos conocido entre sus colegas por su increíble forma física. ¿Te atreverías a participar en una carrera de* 166 *km sin parar a través de los Alpes?*

Una introducción elemental a valores zeta múltiples†

por

Michel Waldschmidt

1. Introducción

El *problema de Basilea* consiste en la evaluación de la suma de los inversos de los cuadrados de los enteros positivos. El problema fue propuesto por Pietro Mengoli en 1644 y Leonhard Euler encontró en 1735 la respuesta correcta, la impresionante fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

*CIMPA es una organización sin ánimo de lucro en beneficio de los países en desarrollo. Si quieres participar en una escuela sobre series hipergeométricas en Ulán Bator (Mongolia) o enseñar teoría de números en Dangbo (Benín), contacta con ellos.

†Este artículo está basado en las notas tomadas por Fernando Chamizo de las dos primeras charlas impartidas por el autor en el congreso *Multiple Zeta Values, Multiple Polylogarithms and Quantum Field Theory* que tuvo lugar en el ICMAT (Instituto de Ciencias Matemáticas) en octubre de 2013 en Madrid. La Gaceta agradece al autor las correcciones y el permiso para publicarlo.

pero sus argumentos iniciales no eran completos. Una generalización natural es la evaluación de las series

$$\sum_{\substack{n\geq 0\\ B(n)\neq 0}} \frac{A(n)}{B(n)} \qquad \text{con } A, B \text{ polinomios tales que } \deg B \geq \deg A + 2.$$

Hay algunos ejemplos que se evalúan con trucos sencillos, así se tiene

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots = 1$$

y

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n\geq 0} \Big(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\Big) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2,$$

donde la última igualdad se sigue del desarrollo de Taylor de $f(x) = \log(1+x)$.

Antes de seguir, mencionemos brevemente la solución no rigurosa de Euler para el problema de Basilea. Euler empleó el desarrollo de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ para escribir

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} = 1 - \frac{\pi^2}{6} z^2 + (\text{términos con potencias de } z \text{ pares mayores}) = F(z^2).$$

Los ceros de la función F así definida son 1^2, 2^2, 3^2, 4^2,... Por otro lado, si P es un polinomio genérico con $P(0) = 1$ y $\{\alpha_i\}$ son sus raíces (en $\mathbb{C}$), entonces es fácil probar que

$$P(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \qquad \text{con} \qquad a_1 = -\sum \frac{1}{\alpha_i}.$$

Si soñamos que F es un polinomio (claramente no lo es) entonces el resultado resuelve el problema de Basilea.

Parece difícil completar el razonamiento no riguroso de Euler, incluso moviéndonos en el terreno de las funciones enteras, porque por ejemplo $F(z)$ y $e^{\lambda z}F(z)$ tienen los mismos ceros pero distinto coeficiente en z:

$$F(z) = 1 + a_1 z + \ldots \qquad \text{implica} \qquad e^{\lambda z} F(z) = 1 + (a_1 + \lambda) z + \cdots .$$

La primera prueba rigurosa para el problema de Basilea se debe también a Euler, seis años más tarde, y se basa en la identidad

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} = \Big(1 - \frac{z^2}{1^2}\Big)\Big(1 - \frac{z^2}{2^2}\Big)\Big(1 - \frac{z^2}{3^2}\Big) \cdots .$$

Hay otras soluciones más elementales del problema de Basilea[1]. La siguiente la presentó P. Cartier en el Seminario Bourbaki y la atribuyó a Calabi [1].

[1] *N. del E.*: Véase el artículo *Disquisitio numerorum* de A. Córdoba en esta sección de La Gaceta **4** (2001), n.º 1, 249–260.

El punto de partida es la identidad

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{1-x^2y^2} = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n\geq 1} \left(x^2y^2\right)^n dx\,dy = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Introduciendo el cambio de variable

$$x = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos v}, \qquad y = \frac{\operatorname{sen} v}{\cos u}, \qquad \frac{dx\,dy}{1-x^2y^2} = du\,dv,$$

el dominio de integración se convierte en $0 \leq u, v \leq \pi/2$, $u+v \leq \pi/2$ y la integral pasa a ser simplemente el área de un triángulo, resultando $\pi^2/8$. Así pues,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{(2m)^2} + \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

y basta con despejar la serie.

Euler consideró, para argumentos enteros, lo que hoy conocemos como función ζ de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s},$$

y no se limitó a valores positivos, por ejemplo obtuvo las siguientes extrañas identidades (redescubiertas por Ramanujan):

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

L. Euler y S. Ramanujan: dos expertos sumadores de series que no se pueden sumar.

Riemann, en su famosa memoria, extendió la función ζ a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un cero simple en $s=1$, concretamente

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + (\text{función entera}).$$

Los misteriosos resultados de Euler son compatibles con esta extensión que permite darles sentido. Riemann también probó una ecuación funcional para ζ, a saber,

$$\xi(s) = \xi(1-s) \qquad \text{donde} \qquad \xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

Para $m \in \mathbb{Z}^+$ se tienen los siguientes valores especiales explícitos de ζ:

$$\zeta(-2m) = 0, \qquad \zeta(1-m) = -\frac{B_m}{m} \quad \text{y} \quad \zeta(2m) = \frac{(-1)^{m+1}2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!}B_{2m},$$

donde B_m son los números de Bernoulli (Jakob Bernoulli, 1654–1705) definidos mediante

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k\geq 0} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Todos ellos son números racionales, $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$, $B_5 = 0$, $B_6 = 1/42$, etc.

No se conoce una fórmula explícita sencilla para $\zeta(2m+1)$. En 1979 R. Apéry (véase [7]) sorprendió a la comunidad matemática con una prueba de la irracionalidad de $\zeta(3)$. Pero hay muchas preguntas abiertas. Por ejemplo, no se sabe si $\zeta(3)/\pi^3$ o $\zeta(5)$ son números irracionales.

R. Apéry y la inscripción en el cementerio Père Lachaise.

T. Rivoal y W. Zudilin han conseguido algunos avances importantes. Rivoal demostró en 2000, [5], que $\zeta(3)$, $\zeta(5)$,..., $\zeta(a)$ con $a \geq 3$ impar genera un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión mayor que $\frac{1}{3}\log a$. En particular, esto implica que $\zeta(2m+1)$ es irracional para infinitos valores de m enteros positivos. Zudilin demostró en 2004, [9], que al menos uno de los números $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ y $\zeta(11)$ es irracional. En [2] se prueba que existen enteros positivos impares $n \leq 139$ y $m \leq 1961$ tales que 1, $\zeta(n)$ y $\zeta(m)$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Se espera que no haya relaciones algebraicas con coeficientes racionales entre $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$,..., $\zeta(2n+1)$. Con un lenguaje más técnico, esperamos que estos números sean algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

En particular, se cree que cualquiera de estos números es trascendente (no algebraico, es decir, que no es raíz de una ecuación polinómica no trivial con coeficientes racionales).

Algunos resultados clásicos sobre trascendencia e independencia algebraica son los siguientes:

- Teorema de Hermite (1873): e es trascendente.
- Teorema de Lindemann (1881): π es trascendente.
- Teorema de Hermite-Lindemann (1882): si $\alpha \neq 0$ es algebraico, entonces e^{α} es trascendente.
- Teorema de Lindemann-Weierstrass (1888): si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son algebraicos y $\mathbb{Q}$-linealmente independientes, entonces $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Otra formulación del último resultado es: si $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ son números algebraicos distintos, entonces $e^{\beta_1}, e^{\beta_2}, \dots, e^{\beta_n}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Volviendo a la función ζ, se puede expresar el producto de dos de sus valores en términos de una serie doble:

$$\zeta(s)\zeta(s') = \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \frac{1}{n^s m^{s'}} = \sum_{n>m\geq 1} \frac{1}{n^s m^{s'}} + \sum_{m>n\geq 1} \frac{1}{n^s m^{s'}} + \zeta(s+s'),$$

donde suponemos $s, s' \geq 2$.

Motivados por este cálculo, introduzcamos las *sumas armónicas generalizadas*

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum\sum\cdots\sum_{n_1>n_2>\cdots>n_k\geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}},$$

donde s_i son enteros positivos y $s_1 \geq 2$ (para asegurar la convergencia). Estas sumas ya fueron introducidas por Euler para $k = 2$. Consideremos todas las combinaciones racionales de estos números, más formalmente, definimos

$$\mathfrak{Z} = \mathbb{Q}\text{-espacio vectorial generado por } \zeta(\underline{s}),$$

donde $\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ con $s_i \in \mathbb{Z}^+$ y $s_1 \geq 2$, como antes.

Definamos también el subespacio $\mathfrak{Z}_p \subset \mathfrak{Z}$ generado por $\zeta(\underline{s})$ con $s_1+s_2+\cdots+s_k = p$ un entero positivo fijado. Escogemos además, convencionalmente, $\mathfrak{Z}_0 = \mathbb{Q}$.

Resulta que $\mathfrak{Z}$ es una subálgebra sobre $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. Esto significa simplemente que si multiplicamos dos elementos de $\mathfrak{Z}$, obtenemos un nuevo elemento de $\mathfrak{Z}$ (esto es importante porque el problema de la independencia algebraica se convierte en un problema de independencia lineal). Por ejemplo, el cálculo de más arriba con $\zeta(s)\zeta(s')$ para $s = s' = 2$ lleva a

$$\zeta(2)^2 = 2\zeta(2,2) + \zeta(4).$$

En general, las fórmulas que representan el producto de dos sumas armónicas generalizadas como combinación lineal de otras sumas del mismo tipo se conocen como *relaciones stuffle*. Se pueden obtener con un algoritmo simple (a pesar de que es un poco lioso de describir con palabras). Digamos que queremos multiplicar $\zeta(\underline{s})$ y $\zeta(\underline{s}')$ con $\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ y $\underline{s}' = (s_1', s_2', \dots, s_{k'}')$; entonces los $\zeta(\underline{s}'')$ a los que da lugar el producto son exactamente aquéllos que verifican $\underline{s}'' = \widetilde{\underline{s}} + \widetilde{\underline{s}}'$ donde $\widetilde{\underline{s}}$ y $\widetilde{\underline{s}}'$ se obtienen a partir de $\underline{s}$ y de $\underline{s}'$ introduciendo algunas coordenadas nulas de tal forma que $\widetilde{\underline{s}}$ y $\widetilde{\underline{s}}'$ tengan la misma longitud (dimensión) y no haya dos ceros en la misma coordenada. Por ejemplo, en el caso de $\zeta(2)\zeta(2)$ tenemos $\underline{s} = (2)$, $\underline{s}' = (2)$ y las posibilidades son

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\underline{s}} & = & 2 \quad 0 \\ \widetilde{\underline{s}}' & = & 0 \quad 2 \\ \hline \underline{s}'' & = & 2 \quad 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{\underline{s}} & = & 0 \quad 2 \\ \widetilde{\underline{s}}' & = & 2 \quad 0 \\ \hline \underline{s}'' & = & 2 \quad 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{\underline{s}} & = & 2 \\ \widetilde{\underline{s}}' & = & 2 \\ \hline \underline{s}'' & = & 4 \end{array}$$

y el resultado es $\zeta(2)^2 = \zeta(2,2) + \zeta(2,2) + \zeta(4)$, que ya habíamos visto.

Nuestro objetivo es conocer todas las $\mathbb{Q}$-relaciones lineales entre las $\zeta(\underline{s})$ y hay dos conjeturas principales acerca de su estructura.

Conjetura 1. Con la notación anterior, $\mathfrak{Z} = \bigoplus_{p\geq 0} \mathfrak{Z}_p$.

En otras palabras, cada elemento de $\mathfrak{Z}$ se expresa de manera única como una suma de elementos de $\mathfrak{Z}_p$. Aquí el punto clave es la unicidad.

Habíamos impuesto $\mathfrak{Z}_0 = \mathbb{Q}$, mientras que $\mathfrak{Z}_1 = \{0\}$ y $\mathfrak{Z}_2 = \mathbb{Q}\zeta(2)$ se derivan fácilmente de la definición. Menos triviales son $\mathfrak{Z}_3 = \mathbb{Q}\zeta(3)$ y $\mathfrak{Z}_4 = \mathbb{Q}\zeta(4)$, la primera se sigue de $\zeta(3) = \zeta(2,1)$ y la segunda de $4\zeta(3,1) = \zeta(4)$, $4\zeta(2,2) = 3\zeta(4)$, $\zeta(2,1,1) = \zeta(4)$. Y aquí se acaba nuestro conocimiento. Ni siquiera se sabe la dimensión de $\mathfrak{Z}_5$. Puede ser 1 o 2 dependiendo de la irracionalidad de $\zeta(2)\zeta(3)/\zeta(5)$.

En relación con las dimensiones, hay una conjetura de enunciado simple debida a Zagier.

Conjetura 2. Sea $d_p = \dim \mathfrak{Z}_p$. Entonces se tiene $d_p = d_{p-2} + d_{p-3}$ para $p \geq 3$.

Nótese que, de acuerdo con nuestras observaciones anteriores, $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 1$ y $d_4 = 1$, y estos datos cuadran con la fórmula de recurrencia de la conjetura anterior para $p = 3$ y $p = 4$.

Sorprendentemente, suponiendo las Conjeturas 1 y 2 es posible deducir la independencia algebraica de $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, etc. Esta implicación requiere temas no combinatorios altamente avanzados. También hay una conjetura de M. Hoffman que propone una base explícita para $\mathfrak{Z}_p$.

Conjetura 3. Los números $\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k)$ con $s_1 + s_2 + \dots + s_k = p$ y $s_i \in \{2,3\}$ conforman una base de $\mathfrak{Z}_p$.

Recientemente, F. Brown ha demostrado que estos valores generan el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathfrak{Z}_p$, por tanto queda demostrar que son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Con este resultado, la Conjetura 2 y la Conjetura 2 son equivalentes. Previamente se conocía ([3], [6]) que los números de Zagier d_p son cotas superiores para la dimensión de $\mathfrak{Z}_p$.

Por otro lado, nuestro conocimiento incondicional acerca de $\mathfrak{Z}$ y $\mathfrak{Z}_p$ es muy pobre. Por ejemplo, no se sabe si existe $p \geq 5$ tal que $d_p \geq 2$. Incluso no se sabe descartar la posibilidad de que $\mathfrak{Z} = \mathbb{Q}[\pi]$. Entonces, en principio, con los conocimientos actuales todos los valores de $\zeta(\underline{s})$ podrían ser polinomios en π con coeficientes racionales. Por supuesto, todas las conjeturas apuntan a que éste no es el caso.

En 2001, M. Kontsevich y D. Zagier [4] introdujeron el concepto de periodo y desarrollaron alguna teoría al respecto. De acuerdo con su definición, un *periodo* es el valor de la integral de una función algebraica definida mediante polinomios con coeficientes algebraicos, calculada en un dominio de integración descrito por ecuaciones o inecuaciones que involucran polinomios con coeficientes algebraicos.

Por ejemplo, $\zeta(2)$ es un periodo gracias a la fórmula

$$\zeta(2) = \int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1 dt_2}{t_1(1-t_2)}.$$

Su prueba se reduce a

$$\int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1 dt_2}{t_1(1-t_2)} = \int_0^1 \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \sum_{n\geq 0} t_2^n \, dt_2 \, dt_1 = \int_0^1 \sum_{n\geq 1} \frac{t_1^{n-1}}{n} \, dt_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

De la misma forma, $\zeta(3)$ es también un periodo porque

$$\zeta(3) = \int_{1>t_1>t_2>t_3>0} \frac{dt_1 \, dt_2 \, dt_3}{t_1 t_2 (1-t_3)}.$$

En general, $\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ es un periodo por la representación integral

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \int_{\Delta_p} \omega_0^{s_1-1}\omega_1\omega_0^{s_2-1}\omega_1 \cdots \omega_0^{s_k-1}\omega_1$$

donde $\Delta_p = \big\{(t_1, t_2, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}^p \, : \, 1 > t_1 > t_2 > \cdots > t_p > 0\big\}$, $p = s_1 + \cdots + s_k$, $\omega_0 = dt/t$ y $\omega_1 = dt/(1-t)$, y con el significado obvio para $\omega_0^{s_i-1}$.

Esta representación integral permite obtener relaciones para productos de $\zeta(\underline{s})$, simplemente multiplicando integrales y «barajando» (*shuffling*, en inglés) las variables teniendo en cuenta todas las posibles ordenaciones. Lo que se obtiene son las llamadas *relaciones shuffle*.

Por ejemplo, consideremos de nuevo el producto $\zeta(2)\zeta(2)$. Entonces se tiene

$$\zeta(2)^2 = \int_{\substack{1>t_1>t_2>0 \\ 1>u_1>u_2>0}} \frac{dt_1 \, dt_2 \, du_1 \, du_2}{t_1(1-t_2)u_1(1-u_2)}.$$

Ahora podemos dividir el dominio de integración en una unión disjunta de 6 símplices como Δ_4, concretamente,

$$\begin{array}{ll}
1 > t_1 > t_2 > u_1 > u_2 > 0, & 1 > u_1 > u_2 > t_1 > t_2 > 0, \\
1 > t_1 > u_1 > t_2 > u_2 > 0, & 1 > t_1 > u_1 > u_2 > t_2 > 0, \\
1 > u_1 > t_1 > t_2 > u_2 > 0, & 1 > u_1 > t_1 > u_2 > t_2 > 0.
\end{array}$$

Los dos primeros dan $\zeta(2,2)$ y el resto $\zeta(3,1)$. Entonces, con este proceso de barajado de las variables, con las t_i en un montón y las u_i en otro, obtenemos

$$\zeta(2)^2 = 2\zeta(2,2) + 4\zeta(3,1).$$

Si se combina esta igualdad con $\zeta(2)^2 = 2\zeta(2,2) + \zeta(4)$, que obtuvimos antes, entonces se deduce

$$\zeta(4) = 4\zeta(3,1),$$

que se utiliza para probar $d_4 = 1$.

La estructura con la que dotan a $\mathfrak{Z}$ las relaciones *stuffle* y *shuffle* permite emplear herramientas algebraicas para estudiar este espacio. Para saber más acerca de esta sorprendente teoría, consúltese [8].

Ejercicios:

1) Demostrar $\zeta(2,2) = \dfrac{\pi^4}{120}$.

2) Deducir, en general,

$$\zeta(\{2\}_k) = \frac{\pi^{2k}}{(2k+1)!}$$

donde $\{2\}_k = (2, 2, \overset{k \text{ veces}}{\ldots}, 2)$. *Indicación*: Demostrar primero $\sum_{n\geq 0} \zeta\big(\{s\}_n\big)x^n = \prod_{j\geq 1}\big(1 + x/j^s\big)$ y utilizar la fórmula producto para $\operatorname{sen} z$.

3) ¿Es el número

$$\sum_{n\geq 0}\Big(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\Big)$$

racional?

4) Demostrar las siguientes evaluaciones de series:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)(2n+1)(4n+1)} = \frac{\pi}{3}, \qquad \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$$

y

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}.$$

Referencias

[1] P. Cartier, Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents, *Astérisque* **282** (2002), Exp. No. 885, 137–173.

[2] S. Fischler y W. Zudilin, A refinement of Nesterenko's linear independence criterion with applications to zeta values, *Math. Ann.* **347** (4) (2010), 739–763.

[3] A. B. Goncharov, Multiple ζ-values, Galois groups, and geometry of modular varieties, *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)* (C. Casacuberta, R. M. Miro-Roig, J. Verdera y S. Xambó-Descamps, eds.), 361–392, Birkhäuser, Basel, 2001.

[4] M. Kontsevich and D. Zagier, Periods, *Mathematics unlimited—2001 and beyond* (B. Engquist y W. Schmid, eds.), 771–808, Springer, Berlin, 2001.

[5] T. Rivoal, La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (4) (2000), 267–270.

[6] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, *Invent. Math.* **149** (2) (2002), 339–369.

[7] A. van der Poorten, A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report, *Math. Intelligencer* **1** (4) (1978/79), 195–203.

[8] M. Waldschmidt, *A course on multizeta values*, The Institute of Mathematical Sciences, Special year in number theory at IMSc, Chennai (India), April 2011, `http://www.math.jussieu.fr/~miw/index2.html`.

[9] W. Zudilin, Arithmetic of linear forms involving odd zeta values, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **16** (1) (2004), 251–291.

M. Waldschmidt, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6

Correo electrónico: `miw@math.jussieu.fr`

Página web: `http://www.math.jussieu.fr/~miw/`