Colloquium Université de Grenoble

http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/SEMINAIRES/sem0_COLL.html

Mots et transcendance

Michel Waldschmidt

http ://www.math.jussieu.fr/∼miw/

Jeudi 8 juin 2006

Résumé

On ne connaît aucun exemple de triplet (x, b, a), où x est un nombre réel algébrique irrationnel, b un entier ≥ 3 et a un entier dans l'intervalle $\{0, \ldots, b-1\}$, pour lequel on puisse affirmer que le développement de x en base b fait apparaître une infinité de fois le chiffre a . Pourtant Émile Borel a conjecturé (d'abord en 1909, puis en 1950) que cela est vrai pour tout triplet - il suggère même que la fréquence d'apparition d'une suite donnée de chiffres dans le développement en base b d'un nombre réel algébrique irrationnel ne dépend que de la longueur de cette suite et de la base.

Une distance colossale sépare donc la théorie établie de la situation conjecturale. Néanmoins quelques progrès ont été faits récemment, notamment grâce au théorème du sous-espace de W.M. Schmidt. Le but principal de l'exposé est de présenter ces résultats récents.

Émile Borel (1871–1956)

Émile Borel

- *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques,*
  Palermo Rend. **27**, 247-271 (1909).
  Jahrbuch Database JFM 40.0283.01
  `http ://www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html`
- *Sur les chiffres décimaux de* $\sqrt{2}$ *et divers problèmes de probabilités en chaînes,*
  C. R. Acad. Sci., Paris **230**, 591-593 (1950).
  Zbl 0035.08302

Développement en base g d'un nombre réel

- Soit g un entier ≥ 2. Tout nombre réel x possède un développement *quasiment unique*

$$x = a_{-k}g^k + \cdots + a_{-1}g + a_0 + a_1g^{-1} + a_2g^{-2} + \cdots$$

  où k est un entier ≥ 0 et où les a_i pour $i \geq -k$ (chiffres de x dans le développement en base g de x) appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, \ldots, g-1\}$.
- On le note

$$x = a_{-k} \cdots a_{-1}a_0, a_1a_2 \cdots$$

- Exemples : en base 10 (*développement décimal*) :

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242 0 \;\ldots$$

  et en base 2 (*développement binaire*) :

$$\sqrt{2} = 1,0110101000001001111001100110011111110 \;\ldots$$

Développement en base g d'un nombre algébrique

Soient $g \geq 2$ un entier et x un nombre réel algébrique irrationnel.

- *Le développement en base g de x devrait satisfaire certaines des lois que vérifient presque tous les nombres (pour la mesure de Lebesgue).*
- En particulier *chacun des chiffres* $0, 1, \ldots, g-1$ *devrait apparaître au moins une fois.*
- Comme conséquence, on en déduirait que *chaque suite donnée de chiffres devrait apparaître une infinité de fois dans le développement de tout nombre algébrique irrationnel .*
- `Indication :` remplacer g par une puissance.
- Ainsi chacune des quatre suites $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ devrait apparaître une infinité de fois dans le développement binaire de x (prendre $g=4$.)

Nombres simplement normaux ou normaux dans une base

Soit g un entier ≥ 2.

- Un nombre réel x est dit *simplement normal en base* g si, dans son développement en base g, chacun des chiffres $\{0, 1, \ldots, g-1\}$ apparaît avec la fréquence $1/g$.
- Un nombre réel x est appelé *normal en base* g si son développement en base g vérifie la propriété suivante :
  - chacun des chiffres apparaît avec la fréquence $1/g$
  - chaque suite de deux chiffres apparaît avec la fréquence $1/g^2$
  - et ainsi de suite.
- Par conséquent un nombre réel est normal en base g si et seulement s'il est simplement normal en base g^n pour tout $n \geq 2$.

Nombres normaux

- Un nombre réel est dit (absolument) normal s'il est normal en toute base $g \geq 2$.
- Borel a suggéré que tout nombre réel algébrique irrationnel est normal.
- On ne connaît aucun exemple explicite de triplet (g, a, x), où $g \geq 3$ est un entier, a un chiffre de l'ensemble $\{0, \ldots, g-1\}$ et x un nombre algébrique irrationnel, pour lequel on puisse affirmer que le chiffre a apparaît une infinité de fois dans le développement en base g de x.

Nombres normaux : exemples

- Presque tous les nombres (pour la mesure de Lebesgue) sont normaux. Aucun exemple explicite de nombre normal ne semble connu.
- Exemple d'un nombre normal en base 2 (Champernowne 1933, Bailey et Crandall 2001 Le *nombre binaire de Champernowne* est obtenu en concaténant la suite des entiers écrits en binaire :

  $0,\, 1\,10\,11\,100\,101\,110\,111\,1000\,1001\,1010\,1011\,1100\,1101\ \ldots$

  `http://mathworld.wolfram.com/ChampernowneConstant.html`
- Ce nombre s'écrit
$$\sum_{k\geq 1} k 2^{-c_k}$$
  avec
$$c_k = k + \sum_{j=1}^{k} [\log_2 j].$$

Nombre normaux : autres exemples

- Nombres de Stoneham : Si a et g sont deux entiers > 1 premiers entre eux, alors le nombre

$$\sum_{n\geq 0} a^{-n} g^{-a^n}$$

est normal en base g.
Référence : R. Stoneham 1973, D. Bailey, J. Borwein, R. Crandall et C. Pomerance 2003.

- A.H. Copeland et P. Erdős (1946) : le nombre

$$0.23571113171923\ \ldots$$

obtenu en concaténant la suite des nombres premiers est normal en base 10.

Nombres BBP : définition

- Hypothèse A de D. Bailey et R. Crandall (Experimental Math. 2001) sur le comportement des orbites du système dynamique discret $T_g(x) = gx \pmod 1$.
- J-C. Lagarias (Experimental Math. 2001) : lien avec des valeurs spéciales de G–fonctions au sens de Siegel.
- D. Bailey, J. Borwein, S. Plouffe (Math. Comp. 1997) : nombres BBP

$$\sum_{n\geq 1} \frac{p(n)}{q(n)} \cdot g^{-n}$$

où $g \geq 2$ est un entier, p et q des polynômes premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[X]$ avec $q(n) \neq 0$ pour $n \geq 1$.

Nombres BBP : exemples

- $\log 2$ est un nombre BBP en base 2 car

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\cdot x^n = -\log(1-x) \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\cdot 2^{-n} = \log 2.$$

- $\log 2$ est un nombre BBP en base $3^2 = 9$ car

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n-1}\cdot x^{2n-1} = \log\frac{1+x}{1-x}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{6}{2n-1}\cdot 3^{-2n} = \log 2.$$

- π^2 est un nombre BBP en base 2 et en base $3^4 = 81$ (D.J. Broadhurst 1999).

Hypothèse A de Bailey et Crandall

Hypothèse A de D. Bailey et R. Crandall : *Soit*

$$\theta := \sum_{n\geq 1} \frac{p(n)}{q(n)}\cdot g^{-n}$$

où $g \geq 2$ *est un entier positif,* $R = p/q \in \mathbf{Q}(X)$ *une fraction rationnelle avec* $q(n) \neq 0$ *pour* $n \geq 1$ *et* $\deg p < \deg q$. *On pose* $y_0 = 0$ *et*

$$y_{n+1} = gy_n + \frac{p(n)}{q(n)} \pmod 1$$

On considère la suite $(y_n)_{n\geq 1}$. *Soit elle n'a qu'un nombre fini de points limites, soit elle est uniformément distribuée modulo* 1.

Nombre de 1 dans le développement binaire d'un nombre irrationnel

Référence : T. Rivoal (2006).

Désignons par $B(x,n)$ le nombre de 1 parmi les n premiers chiffres dans le développement binaire d'un nombre réel irrationnel x.

- Si x, y et $x+y$ sont irrationnels, alors
$$B(x+y,n) \le B(x,n) + B(y,n) + 1.$$
- Si x, y et xy sont irrationnels, alors
$$B(xy,n) \le B(x,n)B(y,n) + \log_2[x+y+1].$$
- Si x est irrationnel, pour tout entier $A>0$ on a
$$B(x,n)B(A/x,n) \ge n-1-\log_2[x+A/x+1].$$

Applications (T. Rivoal)

- Soient a et g deux nombres entiers ≥ 2. Le nombre transcendant
$$\xi = \sum_{n\ge 1} a^{-g^n}$$
possède la propriété suivante : *aucune de ses puissances n'est simplement normale en base* g.
-
$$B(\sqrt{2},n) \ge n^{1/2} + O(1).$$

Nombre de 1 dans le développement binaire d'un nombre algébrique

D. Bailey, J. Borwein, R. Crandall et C. Pomerance.
On the Binary Expansions of Algebraic Numbers,
Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, vol. **16** (2004), pp. 487-518. MR214495

Si x est un nombre algébrique de degré $d \geq 2$, alors le nombre de 1 parmi les N premiers chiffres dans le développement binaire de x est au moins $CN^{1/d}$, où C est un nombre positif qui ne dépend que de x.

Application à la transcendance

- Pour tout entier $d \geq 2$, le nombre
$$\sum_{n\geq 0} 2^{-d^n}$$
est transcendant (résultat dû à K. Mahler, 1929).
Nombre de Fredholm : $\sum_{n\geq 0} 2^{-2^n}$ *A. J. Kempner (1916).*
- Le nombre
$$\sum_{n\geq 0} 2^{-F_n},$$
dont le développement binaire a un 1 aux indices de Fibonacci $1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ est transcendant
(résulte aussi de la méthode de Mahler).

Méthode de Mahler

- K. Mahler (1930, 1969) : soit $d \geq 2$; la fonction $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^{-d^n}$ vérifie $f(z^d) + z = f(z)$ pour $|z| < 1$.
- Annonce de J.H. Loxton et A.J. van der Poorten (1982–1988) : la méthode de Mahler permet de démontrer que *tout nombre automatique irrationnel est transcendant.*
- P.G. Becker (1994) : *pour toute suite automatique qui n'est pas ultimement périodique* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots)$*, le nombre réel*

$$\sum_{k\geq 1} u_k g^{-k}$$

est transcendant, à condition que l'entier g *soit suffisamment grand (en fonction de* $\mathbf{u}$*).*

Transcendance de nombres automatiques

- **Théorème** (B. Adamczewski, Y. Bugeaud, F. Luca, 2004 – conjecture de A. Cobham, 1968) : *La suite des chiffres d'un nombre réel algébrique irrationnel n'est pas automatique.*
- En d'autres termes si la suite des chiffres en base g d'un nombre réel irrationnel x est donnée par un automate fini, alors x est transcendant.
- Outil : le théorème du sous-espace de W.M. Schmidt.

Automates finis

- Automates : États i, a, b, $\dots$ Transitions : 0 ou 1.
- Exemple : l'automate

$$\begin{tikzcd} \boxed{i} \arrow[loop above, "0"] \arrow[r, bend left, "1"] & \boxed{a} \arrow[loop above, "0"] \arrow[l, bend left, "1"] \end{tikzcd} \qquad \text{avec } f(i) = 0,\ f(a) = 1$$

- produit la suite $a_0 a_1 a_2 \dots$ où, par exemple, a_9 est $f(i) = 0$, car $1001[i] = 100[a] = 10[a] = 1[a] = i$.
- C'est la suite de Prouhet-Thue-Morse, dans laquelle le $n+1$-ème terme a_n est 1 si le nombre de 1 dans le développement binaire de n est impair, 0 s'il est pair. Le nombre de Prouhet-Thue-Morse est $\sum_{n \geq 0} a_n 2^{-n}$.

La suite de Prouhet-Thue-Morse

- Pour $n \geq 0$ on pose $a_n = 0$ si la somme des chiffres binaires de n est paire, $a_n = 1$ si elle est impaire. La *suite de Prouhet-Thue-Morse* $(a_n)_{n \geq 0}$ ainsi définie commence par

$$0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,\dots$$

- Dans cette suite il n'y a pas trois blocs consécutifs identiques de la forme :

$$(0\,0\,0) \quad (1\,1\,1) \quad (01\,01\,01) \quad (10\,10\,10) \quad (001\,001\,001)\ \dots$$

- E. Prouhet 1851, A. Thue 1906, M. Morse 1921

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad u_{n+1} = u_n v_n, \quad v_{n+1} = v_n u_n \qquad (n \geq 0).$$

La méthode de Mahler (suite)

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite de Prouhet-Thue-Morse et soit $g \geq 2$.

- K. Mahler (1929) *: le nombre*
$$\sum_{n\geq 0} a_n g^{-n}$$
est transcendant.
- Schéma de démonstration : pour $|z| < 1$ la fonction
$$f(z) = \prod_{n\geq 0}(1 - z^{2^n}) \quad \text{vérifie} \quad f(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^{a_n} z^n.$$
Pour $a \in \{0, 1\}$, on a $(-1)^a = 1 - 2a$. On en déduit
$$f(z) = \sum_{n\geq 0}(1 - 2a_n)z^n = \frac{1}{1-z} - 2\sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$
Utilisant l'équation fonctionnelle $f(z) = (1 - z)f(z^2)$, Mahler montre que $f(\alpha)$ est transcendant pour α algébrique avec $0 < |\alpha| < 1$.

Mots

- On considère un alphabet A de g lettres. Le monoïde libre A^* sur A est l'ensemble des *mots finis* $a_1 \ \ldots \ a_n$ avec $n \geq 0$ et $a_i \in A$ pour $1 \leq i \leq n$. La loi interne sur A^* est la *concaténation.*
- Le nombre de lettres d'un mot fini est sa *longueur* : la longueur de $a_1 \ \ldots \ a_n$ est n.
- Le nombre de mots de longueur n est g^n pour $n \geq 0$. L'unique mot de longueur 0 est le mot vide e qui n'a pas de lettre. C'est l'élément neutre pour la concaténation.

Mots infinis

- Nous allons considérer des *mots infinis*
  $w = a_1 \ \ldots \ a_n \ \ldots$
  Un *facteur de longueur* m d'un tel w est un mot de la forme $a_k a_{k+1} \ \ldots \ a_{k+m-1}$ pour un $k \geq 1$.
- La *complexité* d'un mot infini w est la fonction $p(m)$ qui compte, pour chaque $m \geq 1$, le nombre de facteurs distincts de w de longueur m.
- Ainsi pour un alphabet A ayant g éléments, on a $1 \leq p(m) \leq g^m$ et la fonction $m \mapsto p(m)$ est monotone croissante (au sens large).
- Selon la suggestion de Borel, la complexité de la suite des chiffres en base g d'un nombre réel irrationnel algébrique devrait être $p(m) = g^m$.

Suites automatiques

- Soit $g \geq 2$ un entier. Une suite infinie $(a_n)_{n \geq 0}$ est dite g– automatique s'il existe un automate fini qui produise a_n comme sortie quand l'entrée est le développement en base g de n.
- A. Cobham, 1972 : *La complexité d'une suite automatique est* $p(m) = O(m)$.
- Les suites automatiques sont intermédiaires entre la périodicité et le chaos. Elles apparaissent en liaison avec l'analyse harmonique, la théorie ergodique, les objets fractals, les cascades de Feigenbaum, les quasi–cristaux.

Suites automatiques et physique théorique

- J.P. Allouche et M. Mendes-France : calcul des constantes physiques d'une chaîne d'Ising unidimensionnelle ayant des impuretés réparties de façon automatique.
  Référence : J-P. Allouche et M. Mignotte, *Arithmétique et Automates*, Images des Mathématiques 1988, Courrier du CNRS Supplément au N° 69, 5–9.
- Modèle d'Ising : modèle de mécanique statistique pour étudier les transitions de phase.
  Référence : Raphaël Cerf, *Le modèle d'Ising et la coexistence des phases*, Images des Mathématiques 2004, 47–51.
  `http ://www.spm.cnrs-dir.fr/actions/publications/IdM.htm`

Morphismes

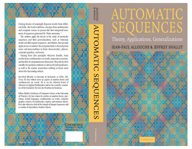
- Soient A et B deux ensembles finis. Une application de A dans B^* peut être étendue de façon unique en un homomorphisme entre les monoïdes libres A^* et B^*. Un tel homomorphisme est appelé *morphisme de A dans B*.
- Un morphisme ϕ de A dans lui-même est dit *prolongeable* s'il existe une lettre a telle que $\phi(a) = au$, où u est un mot non vide tel que $\phi^k(u) \neq e$ pour tout $k \geq 0$. Dans ce cas la suite de mots finis $(\phi^k(a))_{k\geq 1}$ converge dans $A^{\mathbf{N}}$ (pour la topologie produit de la topologie discrète sur chaque copie de A) vers un mot infini $w = au\phi(u)\phi^2(u)\phi^3(u)\ \ldots$
  Ce mot infini est évidemment un point fixe de ϕ et on dit que *w est engendré par le morphisme ϕ*.

Morphismes récurrents, morphismes binaires, suites morphiques

- Si, de plus, chaque lettre apparaît dans w au moins deux fois, on dit que w est engendré par un *morphisme récurrent*.
- Si l'alphabet A est constitué de deux lettres, on dit que w est engendré par un *morphisme binaire.*
- Plus généralement, un mot infini w dans $A^{\mathbf{N}}$ est dit *morphique* s'il existe une suite u engendrée par un morphisme défini sur un alphabet B et un morphisme ϕ de B dans A tel que $w = \phi(u)$.

Suites automatiques et suites morphiques

- **Théorème (A. Cobham)** : *Une suite est automatique si et seulement si elle est morphique uniforme.*
- Jean-Paul Allouche et Jeffrey Shallit *Automatic Sequences : Theory, Applications, Generalizations,* Cambridge University Press, 2003.



http ://www.cs.uwaterloo.ca/∼shallit/asas.html

Exemple 1 : le mot de Prouhet-Thue-Morse
abbabaabbaababbab . . . (déjà vu)

- Dans la suite de Prouhet-Thue-Morse
  $01101001100101101 \ \ldots$ on remplace 0 par a et 1 par b.
  Le *mot de Prouhet-Thue-Morse*

  $$w = abbabaabbaababbab \ \ldots$$

  est engendré par un morphisme récurrent binaire :
  c'est le point fixe du morphisme $a \mapsto ab$, $b \mapsto ba$.

Exemple 2 : puissances de 2

Le nombre binaire

$$\sum_{n \geq 0} 2^{-2^n} = 0,1101000100000001000 \cdots = 0, a_1 a_2 a_3 \ \ldots$$

avec

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ est une puissance de } 2, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est produit par l'automate

$$\begin{tikzcd} \boxed{i} \arrow[loop above, "0"] \arrow[r, "1"] & \boxed{a} \arrow[loop above, "0"] \arrow[r, "1"] & \boxed{b} \arrow[loop above, "0"] \arrow[loop below, "1"] \end{tikzcd}$$

avec $f(i) = 0$, $f(a) = 1$, $f(b) = 0$.

Puissances de 2 *(suite)*

En remplaçant 0 par a et 1 par b dans le développement du nombre binaire automatique

$$\sum_{n\geq 0} 2^{-2^n} = 0,1101000100000001000\cdots$$

on obtient le mot infini

$$\mathbf{v} = v_1 v_2 \cdots v_n \cdots = bbabaaabaaaaaaabaaa\cdots$$

où

$$v_n = \begin{cases} b & \text{si } n \text{ est une puissance de } 2, \\ a & \text{sinon.} \end{cases}$$

La complexité $p(m)$ de $\mathbf{v}$ est bornée par $2m$:

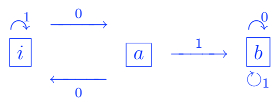
$$\begin{array}{rcccccccc} m = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ p(m) = & 2 & 4 & 6 & 7 & 9 & 11 & \cdots \end{array}$$

Exemple 3 : la suite de Baum-Sweet

- Pour $n \geq 0$ on pose $a_n = 1$ si le développement binaire de n ne contient pas de suite de longueur impaire de 0, $a_n = 0$ sinon : la suite de Baum-Sweet $(a_n)_{n\geq 0}$ commence par

$$1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,\ldots$$

- Cette suite est produite par l'automate



avec $f(i) = 1$, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$.

Exemple 4 : la suite de Rudin–Shapiro

- Le mot de Rudin–Shapiro $aaabaabaaaabbbab\ldots$. Pour $n \geq 0$ définissons $r_n \in \{a,\ b\}$ comme étant a (resp. b) si le nombre d'apparitions de 11 dans le développement binaire de n est pair (resp. impair).
- Soit σ le morphisme du monoïde B^* sur l'alphabet $B = \{1, 2, 3, 4\}$ dans B^* défini par : $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 42$ et $\sigma(4) = 43$. Soit

$$\mathbf{u} = 12131242121343\ \ldots$$

le point fixe de σ commençant par 1 et soit φ le morphisme de B^* dans $\{a, b\}^*$ défini par : $\varphi(1) = aa$, $\varphi(2) = ab$ et $\varphi(3) = ba$, $\varphi(4) = bb$. Alors le mot de Rudin-Shapiro n'est autre que $\varphi(\mathbf{u})$, donc il est morphique.

Exemple 5 : la suite du pliage de papier

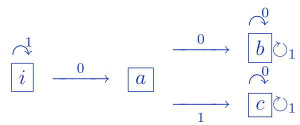
On plie une bande de papier toujours dans le même sens, puis on la déplie : les plis peuvent être entrants ou sortants, on les code par 0 ou 1. On obtient une suite

$$1101100111001001\ \ldots$$

qui vérifie

$$u_{4n} = 1, \quad u_{4n+2} = 0, \quad u_{2n+1} = u_n$$

et qui est produite par l'automate



avec $f(i) = f(a) = f(b) = 1$, $f(c) = 0$.

Exemple 6 : le mot de Fibonacci

Prenons $A = \{a, b\}$.

- On commence avec $f_1 = b$, $f_2 = a$ et on pose (concaténation) : $f_n = f_{n-1} f_{n-2}$.
- Ainsi $f_3 = ab$ $\quad f_4 = aba$ $\quad f_5 = abaab$
  $f_6 = abaababa$ $\quad f_7 = abaababaabaab$
  $f_8 = abaababaabaababaababa$
- Le *mot de Fibonacci*

$$w = abaababaabaababaababaabaababaabaab \ \dots$$

  est engendré par un morphisme binaire récurrent : c'est le point fixe du morphisme $a \mapsto ab$, $b \mapsto a$; l'image par ce morphisme de f_n est f_{n+1}.

Le mot de Fibonacci n'est pas automatique

- Cobham (1972) : la fréquence d'une lettre qui apparaît dans un mot automatique est un nombre rationnel.
- Conséquence : le mot de Fibonacci n'est pas automatique.
- L.V. Danilov (1972) : pour la suite

$$(v_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \ \dots)$$

  des lettres du mot de Fibonacci sur l'alphabet $\{0, 1\}$, pour tout $g \geq 2$ le nombre

$$\sum_{n \geq 0} v_n g^{-n}$$

  est transcendant.

Les lapins de Fibonacci

- On désigne un jeune couple de lapins par 0 et un couple adulte par 1. Au passage d'une année à la suivante le couple jeune devient adulte $0 \to 1$, un couple adulte reste un couple adulte et produit un jeune couple $1 \to 10$.
- On obtient le système dynamique

$$0 \to 1 \to 10 \to 101 \to 10110 \to 10110101 \to \ \ldots$$

  et la suite $(L_1,\ L_2,\ L_3,\ \ldots)$ des lapins de Fibonacci :

$$1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0, 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots$$

La suite L_n des lapins de Fibonacci (suite) n'est pas automatique

- Tout entier $n \geq 2$ est somme, de manière unique, de nombres de Fibonacci, la somme ne faisant pas intervenir deux nombres de Fibonacci ayant des indices consécutifs.
- Si le plus petit indice dans cette décomposition est pair, alors $L_n = 1$, sinon $L_n = 0$.
- Exemple : $51 = F_9 + F_7 + F_4 + F_2$.
- Le dernier indice (le 2 de F_2) est pair,
- donc $L_{51} = 1$.

Suites de Beatty

Soit $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ le nombre d'or.

- La suite des indices tels que $L_n = 1$ est

$$[\Phi] = 1,\ [2\Phi] = 3,\ [3\Phi] = 4,\ [4\Phi] = 6,\ \dots$$

- La suite des indices tels que $L_n = 0$ est

$$[\Phi^2] = 2,\ [2\Phi^2] = 5,\ [3\Phi^2] = 7,\ [4\Phi^2] = 8,\ \dots$$

- Exemple : $32\Phi = 51,77\ \dots$ donc $[32\Phi] = 51$ et $L_{51} = 1$.

Mots sturmiens

Supposons $g = 2$, disons $A = \{a, b\}$.

- Un mot est périodique si et seulement si sa complexité est bornée.
- Si la complexité $p(m)$ d'un mot w vérifie $p(m) = p(m+1)$ pour une valeur de m, alors $p(m+k) = p(m)$ pour tout $k \geq 0$, donc le mot est périodique. Par conséquent *un mot non périodique w a une complexité minorée par* $p(m) \geq m+1$.
- Un mot infini de complexité minimale $p(m) = m+1$ est appelé *sturmien* (Morse et Hedlund, 1938).
- Les mots sturmiens sont ceux donnés par des suites qui codent par 0 et 1 les trajectoires d'une boule de billard carré pour un angle d'attaque irrationnel.

Le mot de Fibonacci est sturmien

- Le mot de Fibonacci

  $$w = abaababaabaababaababaabaababaabaab\ \ldots$$

  est sturmien.
- Sur l'alphabet $\{a,\ b\}$, un mot w est sturmien si et seulement si, *pour chaque* $m \geq 1$, *il y a exactement un facteur* v *de* w *de longueur* m *tel que* va *et* vb *soient facteurs de* w *de longueur* $m+1$.

Le mot de Fibonacci $abaababaabaababaababaabaababaabaab\ \ldots$ est sturmien

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & aabaa \\
a \arrow[r] \arrow[dr] & aa \arrow[r] & aab \arrow[r] & aaba \arrow[r] \arrow[ur] & aabab \\
 & ab \arrow[r] & aba \arrow[r] \arrow[dr] & abaa \arrow[r] & abaab \\
 & & & abab \arrow[r] & ababa \\
b \arrow[r] & ba \arrow[r] \arrow[dr] & baa \arrow[r] & baab \arrow[r] & baaba \\
 & & bab \arrow[r] & baba \arrow[r] & babaa
\end{tikzcd}$$

Transcendance et mots sturmiens

- S. Ferenczi, C. Mauduit, 1997 : un nombre dont la suite des chiffres est sturmienne est transcendant.
  Critère combinatoire : *la complexité du développement en base g d'un nombre algébrique irrationnel vérifie*

$$\liminf_{m \to \infty} (p(m) - m) = +\infty.$$

- *Propriétés combinatoires des suites sturmiennes* : contiennent des suites qui se ressemblent. Donne des approximations rationnelles trop bonnes pour des nombres algébriques.
- *Outil :* une version p–adique du théorème de Thue–Siegel–Roth due à Ridout (1957).

Autres résultats de transcendance sur les développements en base g

- J-P. Allouche et L.Q. Zamboni(1998).
- R.N. Risley et L.Q. Zamboni(2000).
- B. Adamczewski et J. Cassaigne (2003).

Complexité du développement en base g d'un nombre algébrique

- **Théorème** (B. Adamczewski, Y. Bugeaud, F. Luca 2004). *La complexité binaire p d'un nombre réel algébrique irrationnel x vérifie*

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{p(m)}{m} = +\infty.$$

- Corollaire (conjecture de A. Cobham (1968)) : *si la suite des chiffres binaires d'un nombre réel irrationnel x est automatique, alors x est transcendant.*

Mesures d'irrationalité de nombres automatiques

- Nouveaux progrès par B. Adamczewski et J. Cassaigne, Y. Bugeaud (2006) – solution d'une conjecture de J. Shallit (1999) : *Un nombre de Liouville ne peut pas être engendré par un automate fini.*
- La mesure d'irrationalité du nombre automatique défini par $\sigma(0) = 0^n 1$ et $\sigma(1) = 1^n 0$ est au moins n.
- Le nombre de Prouhet-Thue-Morse-Mahler ξ a un exposant d'irrationalité ≤ 5 :

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^5}.$$

Christol, Kamae, Mendes-France, Rauzy

Une conséquence du théorème de B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca liée au résultat de G. Christol, T. Kamae, M. Mendès-France et G. Rauzy (1980) est la suivante :

Corollaire. *Soient* $g \geq 2$ *un entier,* p *un nombre premier et* $(u_k)_{k\geq 1}$ *une suite d'entiers dans l'intervalle* $\{0, \dots, p-1\}$. *La série formelle*

$$\sum_{k\geq 1} u_k X^k$$

et le nombre réel

$$\sum_{k\geq 1} u_k g^{-k}$$

sont simultanément algébriques (sur $\mathbf{F}_p(X)$ *et* $\mathbf{Q}$*, respectivement) si et seulement s'ils sont rationnels.*

Exemple :

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite de Prouhet-Thue-Morse. La série

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$$

est algébrique sur $\mathbf{F}_2(X)$:

$$(1+X)^3F^2 + (1+X)^2F + X = 0.$$

On en déduit une nouvelle démonstration du théorème de Mahler sur la transcendance du nombre

$$\sum_{n\geq 0} a_n g^{-n}.$$

Les théorèmes de Thue-Siegel-Roth et Ridout

- Théorème (Thue-Siegel-Roth)
  Pour tout nombre algébrique α, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des $p/q \in \mathbf{Q}$ satisfaisant $|\alpha - p/q| \leq q^{-2-\epsilon}$ est fini.
- Théorème (Ridout)
  Pour tout nombre algébrique α, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des $p/q \in \mathbf{Q}$ avec $q = 2^k$ et $|\alpha - p/q| < q^{-1-\epsilon}$ est fini.

Autres résultats de transcendance

Conséquences du théorème de Nesterenko (1996) sur la transcendance des valeurs de fonctions thêta en des points rationnels.

- Le nombre $\sum_{n\geq 0} 2^{-n^2}$ est transcendant (D. Bertrand 1997 ; D. Duverney, K. Nishioka, K. Nishioka et I. Shiokawa 1998).
- Pour le mot

  $$\mathbf{u} = 0121221222122221222221222222122 \ldots$$

  engendré par le morphisme non récurrent $0 \mapsto 012$, $1 \mapsto 12$, $2 \mapsto 2$, le nombre $\eta = \sum_{k\geq 1} u_k 3^{-k}$ est transcendant.

Complexité du développement en fraction continue d'un nombre algébrique non quadratique

- Des questions analogues se posent sur le développement en fraction continue d'un nombre réel au lieu de son développement en base g.
- Problème ouvert – A.Ya. Khintchine (1949) : *les quotients partiels du développement en fraction continue d'un nombre algébrique irrationnel non quadratique peuvent-ils être bornés ?*
- On ne connaît aucun exemple !

Transcendance de fractions continues

- J. Liouville, 1844
- É. Maillet, 1906, O. Perron, 1929
- H. Davenport et K.F. Roth, 1955
- A. Baker, 1962
- J.L. Davison, 1989

Transcendance de fractions continues (suite)

- J.H. Evertse, 1996.
- M. Queffélec, 1998 : *transcendance de la fraction continue de Prouhet-Thue–Morse.*
- P. Liardet et P. Stambul, 2000.
- J-P. Allouche, J.L. Davison, M Queffélec et L.Q. Zamboni, 2001 : *transcendance de fractions continues sturmiennes ou morphiques.*
- C. Baxa, 2004.
- B. Adamczewski, Y. Bugeaud, J.L. Davison, 2005 : *transcendance des fractions continues de Rudin-Shapiro et de Baum–Sweet.*

Transcendance de fractions continues

- Problème ouvert : *Existe-t-il des nombres algébriques de degré au moins trois dont le développement en fraction continue est engendré par un morphisme ?*
- B. Adamczewski, Y. Bugeaud (2004) : *Le développement en fraction continue d'un nombre algébrique de degré au moins trois ne peut pas être engendré par un morphisme binaire.*

Autres problèmes ouverts

- Donner un exemple explicite d'un nombre réel automatique $x > 0$ tel que $1/x$ ne soit pas automatique.
- Montrer que
$$\log 2 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} 2^{-n}$$
n'est pas 2-automatique.
- Montrer que
$$\pi = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) 2^{-4n}$$
n'est pas 2-automatique.

Problèmes sur les nombres normaux (T. Rivoal)

- Donner un exemple explicite d'un nombre réel irrationnel simplement normal en base g tel que $1/x$ ne soit pas simplement normal en base g .
- Donner un exemple explicite d'un nombre réel irrationnel normal en base g tel que $1/x$ ne soit pas normal en base g .
- Donner un exemple explicite d'un nombre réel irrationnel normal tel que $1/x$ ne soit pas normal.

Autres problèmes ouverts

Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite infinie sur $\{0,1\}$ qui n'est pas ultimement périodique. Est-il vrai que *l'un au moins des deux nombres*

$$\sum_{n\geq 1} e_n 2^{-n}, \qquad \sum_{n\geq 1} e_n 3^{-n}$$

est transcendant ?

Colloquium Université de Grenoble

http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/SEMINAIRES/sem0_COLL.html

Mots et transcendance

Michel Waldschmidt

http ://www.math.jussieu.fr/~miw/

Jeudi 8 juin 2006