Lycée Jules Verne, Limours *12 mars 2011*

Rationnels, irrationnels, infinis

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/∼miw/

Résumé

Les nombres rationnels permettent de traiter de nombreux problèmes, mais ils ne suffisent pas : on a souvent besoin de faire intervenir des nombres réels qui peuvent être irrationnels (*incommensurables*). Pour bien comprendre l'irrationalité, il faut quelques notions de ce qu'est l'infini. Les deux concepts : *irrationalité* et *infini* sont étroitement liés.

Les nombres rationnels sont les éléments de base des *mathématiques discrètes*, les nombres réels permettent d'étudier les phénomènes *continus*.

Nombres entiers pour compter

Entiers "naturels" : $1, 2, 3, 4, \ldots$

Addition, multiplication.

Élément neutre pour la multiplication : 1

$$a \times 1 = a.$$

On ajoute un élément neutre 0 pour l'addition :

$$a + 0 = a, \qquad \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Pour soustraire (calcul de déficits), on introduit les entiers négatifs $-1, -2, -3, -4, \ldots$ ce qui donne les entiers "relatifs" :

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$a + (-a) = 0.$$

Nombres rationnels

On peut ajouter, soustraire ou multiplier les entiers naturels.

Pour pouvoir les diviser, on introduit les nombres rationnels, quotients de deux entiers, avec un dénominateur positif :

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{5}, \ldots$$

Deux quotients d'entiers peuvent donner la même fraction si on peut *simplifier* :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad ad = bc : \qquad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \cdots$$

Fractions irréductibles : le dénominateur est minimal (*on ne peut plus simplifier*).

On note $\mathbf{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions irréductibles a/b avec $b > 0$, a et b n'ayant pas de diviseur commun > 1.

Énumérer les nombres rationnels $a/b = \dfrac{a}{b}$

Les nombres entiers sont rationnels : $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$:

$$3 = \frac{3}{1}, \quad -5 = \frac{-5}{1}.$$

On peut donner une liste de nombres comportant tous les rationnels sans en oublier aucun !
Montrons-le pour les nombres rationnels positifs :

	1	*2*	*3*	*4*
1	1/1	2/1	3/1	4/1
2	1/2	2/2	3/2	4/2
3	1/3	2/3	3/3	4/3
4	1/4	2/4	3/4	4/4

	1	*2*	*3*	*4*
1	1	2	4	7
2	3	5	8	
3	6	9		
4	10			

Numéroter sans répétition les nombres rationnels

Si on ne veut pas répéter les mêmes nombres rationnels, comme $1/2 = 2/4 = 3/6 = \ldots$, on les enlève de la liste quand ils y apparaissent sous forme simplifiable :

	1	*2*	*3*	*4*
1	1	2	3	4
2	1/2		3/2	
3	1/3	2/3		4/3
4	1/4		3/4	

	1	*2*	*3*	*4*
1	1	2	4	6
2	3		7	
3	5	8		
4	9			

On obtient la liste des nombres rationnels positifs

$$1,\ 2,\ 1/2,\ 3,\ 1/3,\ 4,\ 3/2,\ 2/3,\ 1/4,\ \ldots$$

Par exemple si $a + b < c + d$, alors a/b apparaîtra avant c/d dans la liste.
Si $a + b = c + d$, mais $a > c$, alors a/b apparaîtra avant c/d dans la liste.

Il n'y a pas plus d'éléments dans une suite double infinie que dans une suite infinie

Il y a "autant" de nombres entiers naturels que de nombres pairs ou que de nombres impairs ... ou que de nombres rationnels !

entiers > 0 :	1	2	3	4	5	6	7	8	...
pairs :	2	4	6	8	10	12	14	16	...
impairs :	3	5	7	9	11	13	15	17	...
entiers :	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...
rationnels > 0 :	1	2	1/2	3	1/3	4	3/2	2/3	...
rationnels :	0	1	-1	2	-2	1/2	$-1/2$	3	...

Quand on peut faire la liste, on parle *d'infinité dénombrable*.
Les nombres rationnels forment un ensemble infini dénombrable.

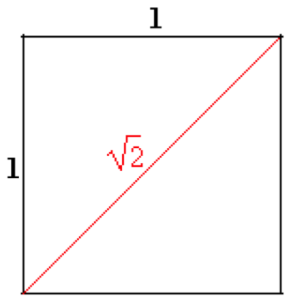
Al-Sabi Thâbit ibn Qurrâ al-Harrânî (836–901)

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Thabit.html

Mesurer avec les nombres réels

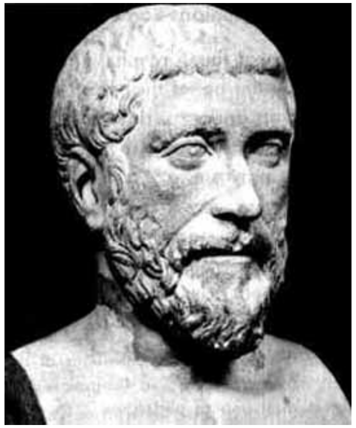
Les nombres réels positifs sont ceux qui permettent de mesurer des longueurs.
Certaines constructions géométriques conduisent à des longueurs qui ne sont pas des nombres rationnels.

Par exemple la diagonale du carré unité a pour longueur $\sqrt{2}$ qui ne peut pas être écrit comme quotient de deux entiers naturels : c'est un nombre *irrationnel* (on dit aussi *incommensurable*).

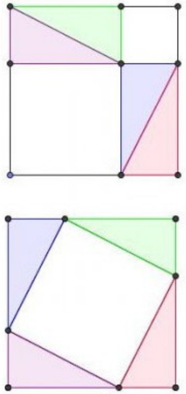


$$\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ 698\ \ldots$$

Pythagore de Samos ∼ 569 BC – ∼ 475 BC

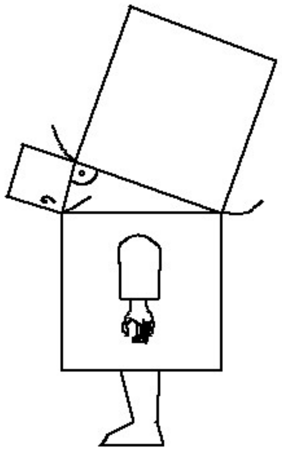


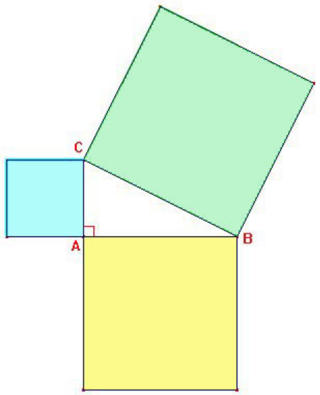
$$a^2 + b^2 = c^2 = (a+b)^2 - 2ab.$$



http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Pythagoras.html

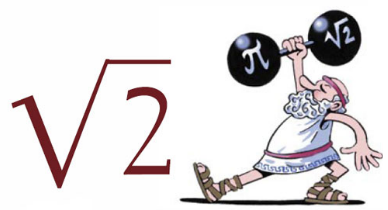
Le théorème de Pythagore





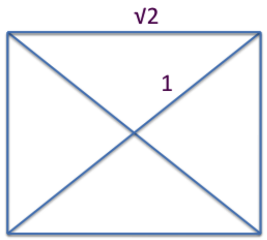
La diagonale du carré

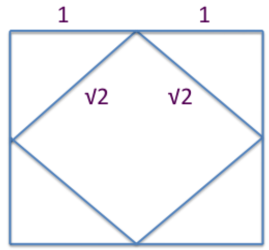
La longueur d de la diagonale d'un carré de côté a vérifie $d^2 = 2a^2$.



Un carré de côté 1 a pour diagonale $\sqrt{2}$: son carré est 2.

Racine de deux comme diagonale du carré





Aire $2 = 4 \times 1/2$ Aire $4 = 2 + 4 \times 1/2$

Racine de deux sur la toile

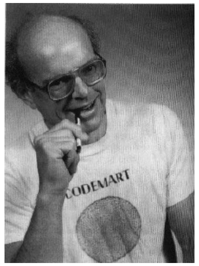
Les décimales de $\sqrt{2}$ sont sur la toile

1, 4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 6, 2, 3, 7, 3, 0, 9, 5, 0, 4, 8, 8, 0, 1, 6, 8, 8, 7, 2, 4, 2, 0, 9, 6, 9, 8, 0, 7, 8, 5, 6, 9, 6, 7, 1, 8, . . .

http://oeis.org/A002193

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

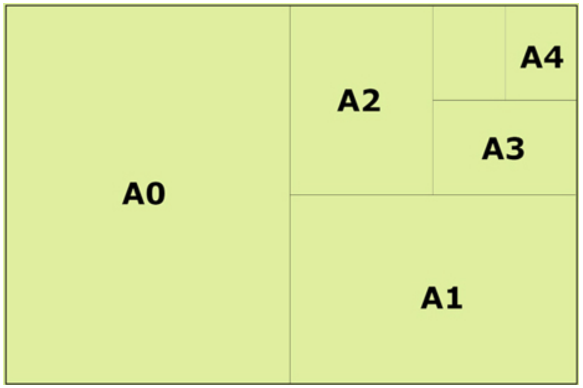
Neil J. A. Sloane



http://oeis.org/

Le format A4

Le nombre $\sqrt{2}$ est le double de son inverse : $\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$.
Si on plie en deux une feuille de papier rectangulaire dont le rapport des côtés est $\sqrt{2}$, on obtient deux feuilles rectangulaires dont le rapport des côtés est encore $\sqrt{2}$.



La norme ISO 216 : trois séries de format A, B, C

ISO International Organization for Standardization

http://www.iso.org/

Une feuille $A0$ a pour aire théorique 1 m^2 ; les longueurs des côtés du rectangle en mètres sont donc x et y avec $xy = 1$ et $y = x\sqrt{2}$, par conséquent

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0,840\,896\,415\ldots \quad \text{et} \quad y = \sqrt[4]{2} = 1,189\,207\,115\ldots$$

Le format retenu est 841mm pour le petit côté et 1189mm pour le grand, soit une aire de $0,999\,49$ m^2. Le rapport associé est $1189/841 = 1,413\,79\ldots$.

On retrouve ce format en Iran et en Égypte au XIVè siècle.

La norme ISO 216

Le *Grand Registre* de Lazare Carnot sous la révolution (loi sur le timbre du 11 mars 1798) est le format $A2$ de 420cm par 594cm. Son aire est le quart de celle du format $A0$ et quatre fois celle du format $A4$.

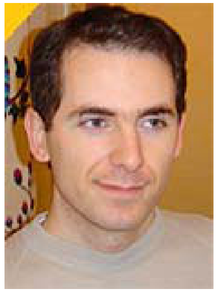
Le format $A4$ est 21 cm de largeur et $29,7$ cm de longueur. Son aire $623,7$ cm^2 est proche de 625 cm^2

Les taux d'agrandissement des photocopieuses ordinaires sont 141%, 119%, 84% et 71%, qui approchent les nombres irrationnels $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $1/\sqrt[4]{2}$, $1/\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1,414\ldots, \quad \sqrt[4]{2} = 1,189\ldots,$$

$$1/\sqrt[4]{2} = 0,840\ldots, \quad 1/\sqrt{2} = 0,707\ldots$$

Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$



Éditions Le Pommier

- Benoît Rittaud, Éditions *Le Pommier* (2006).

http://www.math.univ-paris13.fr/~rittaud/RacineDeDeux

Histoire de $\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 56\ \ldots$

Approximation : $1,\ 414\ 212\ 96$ Différence : $0,\ 000\ 000\ 60$

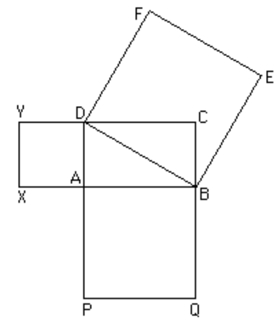
Tablette d'un scribe babylonien de la première dynastie (entre 1900 et 1600 av. J-C.)

Yale Babylonian Collection
YBC 7289

Histoire de $\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 56\ \ldots$

Sulvasutras (Apastamba), (entre 600 et 400 av. J-C.)

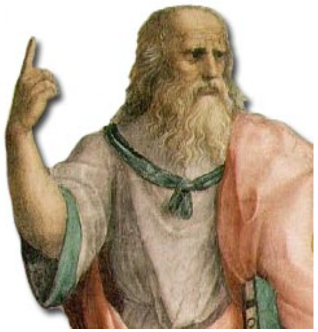
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34} = \frac{577}{408} = 1,414\ 215\ 68\ldots$$



The Katyayana form of Pythagoras's theorem

Différence : $0,\ 000\ 002\ 12$

Irrationalité dans l'antiquité grecque



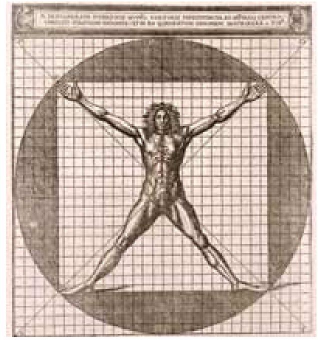
Platon, La République :
lignes incommensurables,
diagonales irrationnelles.

Théodore de Cyrène
(vers 370 av. J-C.)
irrationalité de $\sqrt{3}, \ldots, \sqrt{17}$.

Théétète : si un entier n est le carré d'un nombre rationnel, c'est le carré d'un entier.

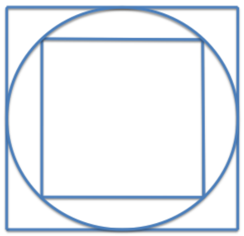
Marcus Vitruvius Pollis (Vitruve, 88-26 av. J.C.)

Architecte et ingénieur de l'époque romaine, Vitruve explique qu'un homme aux bras et jambes écartés s'inscrit à la fois dans un cercle et dans un carré, figures géométriques parfaites.



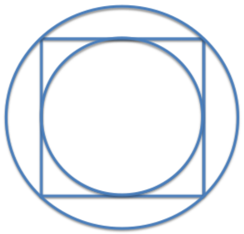
L'homme de Vitruve

Cercles et carrés



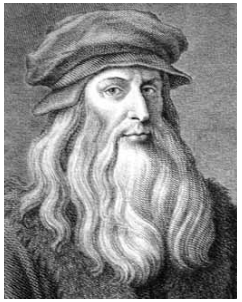
Quand deux carrés touchent un même cercle en quatre points, l'un est le double de l'autre

Quand deux cercles touchent un même carré en quatre points, l'un est le double de l'autre



Leonardo da Vinci (1452 - 1519)

"*De divina proportione*" (1489)



Irrationalité de $\sqrt{2}$

Si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous forme irréductible, alors a et b ne sont pas tous deux pairs.

Le carré d'un nombre pair est pair, le carré d'un nombre impair est impair.

Comme $(\sqrt{2})^2 = 2 = \frac{a^2}{b^2}$, on a $a^2 = 2b^2$, ce qui montre que a est pair.

On écrit $a = 2c$, puis $4c^2 = (2c)^2 = a^2 = 2b^2$, et en simplifiant par 2 on trouve $b^2 = 2c^2$, donc b est pair.

Contradiction.

Valuation 2–adique

On peut éviter de raisonner par l'absurde de la façon suivante : un entier se décompose en un produit d'une puissance de 2 par un nombre impair.

L'exposant de 2 dans la puissance est 0 si l'entier est impair, c'est 1 si l'entier est divisible par 2, mais pas par 4, c'est 2 s'il est divisible par $4 = 2^2$, mais pas par 8...

Par exemple l'exposant de 2 pour $21\,504 = 1\,024 \cdot 21$ est 10 car $1\,024 = 2^{10}$.

Valuation 2–adique

Pour un carré, l'exposant de 2 est pair : si un entier a a pour exposant r alors a^2 a pour exposant $2r$

$$a = 2^r u \quad \text{avec } u \text{ impair}, \qquad a^2 = 2^{2r} u^2$$

(le carré d'un nombre impair est impair).

L'exposant de $2n$ est l'exposant de n plus 1 :

$$n = 2^t s \quad \text{avec } s \text{ impair}, \qquad 2n = 2^{t+1} s.$$

Donc pour a et b entiers positifs, l'exposant de 2 pour a^2 et aussi pour b^2 est pair, l'exposant de 2 pour $2b^2$ est impair, et par conséquent a^2 n'est jamais égal à $2b^2$.

Descente infinie

On a

$$\sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

Si

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

avec $b < a = \sqrt{2}b < 2b$, alors

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2b - a}{a - b}$$

et

$$\sqrt{2} = \frac{2b - a}{a - b};$$

mais $0 < a - b < b$.

Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Descente infinie.

Démonstration géométrique d'irrationalité

Le nombre $\sqrt{2}$ a la propriété remarquable suivante :

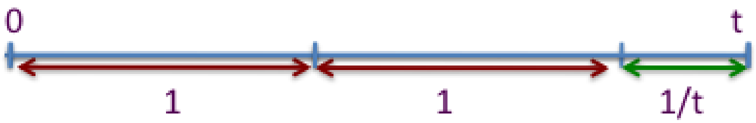
$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Posons $t = \sqrt{2} + 1 = 2,414\ 213\ 56\ \ldots$ On a

$$t = 2 + \frac{1}{t}.$$

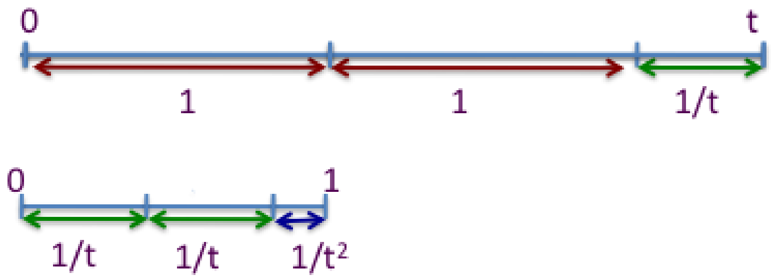
Prenons un intervalle de longueur t. On le décompose en deux intervalles de longueur 1 et un intervalle de longueur $1/t$.

$t = \sqrt{2} + 1 = 2,414\ 213\ 56\ \cdots = 2 + 1/t$



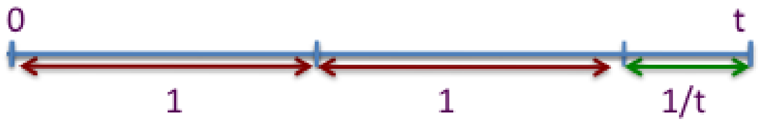
On décompose l'intervalle de longueur 1

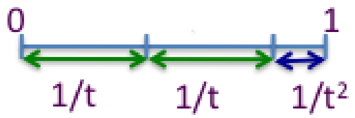
$$2 + \frac{1}{t} = t, \qquad \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} = 1.$$



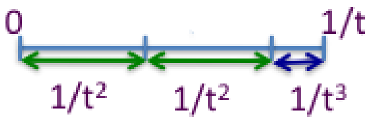
On passe aussi de la première image à la seconde par une homothétie de rapport $1/t$, parce que $t = 2 + 1/t$.

Nouvelle homothétie de rapport $1/t$





Intervalle $(0, 1/t)$ grossi : $\quad \dfrac{2}{t^2} + \dfrac{1}{t^3} = \dfrac{1}{t}$:



Démonstration géométrique d'irrationalité

Un intervalle de longueur $t = \sqrt{2} + 1$ se décompose en deux intervalles de longueur 1 et un intervalle de longueur $1/t$.

On fait une homothétie de rapport $1/t$: un intervalle de longueur 1 se décompose en deux intervalles de longueur $1/t$ et un intervalle de longueur $1/t^2$.

À l'étape suivante on décompose un intervalle de longueur $1/t$ en deux intervalles de longueur $1/t^2$ et un intervalle de longueur $1/t^3$.

Puis un intervalle de longueur $1/t^2$ en deux intervalles de longueur $1/t^3$ et un intervalle de longueur $1/t^4$.

On peut recommencer indéfiniment : on aura à chaque fois deux grands intervalles et un plus petit.

Décomposition d'un intervalle rationnel

Partons maintenant d'un nombre rationnel $u = a/b$, disons $a > b > 0$ avec a et b entiers.

On va décomposer un segment de longueur u en un nombre entier de segments de longueur 1, plus un segment de longueur plus petite que a/b.

Ce sera plus commode de changer d'échelle en prenant une nouvelle unité de longueur : on décompose alors un segment de longueur a en un nombre entier de segments de longueur b, plus un segment de longueur plus petite que b, disons c, qui est un entier ≥ 0.

$$\frac{297}{210} = 1,414\,285\,71\ldots$$

Au lieu de $t = 1 + \sqrt{2}$ on va partir du nombre $\dfrac{297}{210}$ qui est très proche de $\sqrt{2}$.

On commence par simplifier la fraction $\dfrac{297}{210}$ en recherchant le *pgcd de* 297 *et* 210.

Première solution :

$$297 = 3^3 \cdot 11, \qquad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Donc le pgcd est 3, on a $297 = 3 \cdot 99$ et $210 = 3 \cdot 70$, et finalement

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}.$$

L'algorithme d'Euclide

Deuxième solution :

Le pgcd de 297 et 210 est le même que
celui de 210 et $297 - 210 = 87$.

C'est aussi celui de 87 et $210 - 2 \times 87 = 36$,

celui de 36 et $87 - 2 \times 36 = 15$,

celui de 15 et $36 - 2 \times 15 = 6$,

celui de 6 et $15 - 2 \times 6 = 3$,

et comme $6 = 2 \times 3$, le pgcd est 3.

Euclide d'Alexandrie

(∼325 av. J-C. –∼265 av. J-C.)

L'école d'Athènes, par Raphael

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Miscellaneous/School_of_Athens.html

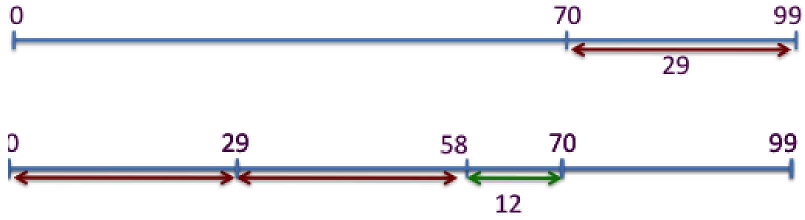
$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70} = 1,414\,285\,71\ldots$$

On change d'unité de mesure pour avoir des intervalles de longueur entière.

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}$$ première étape

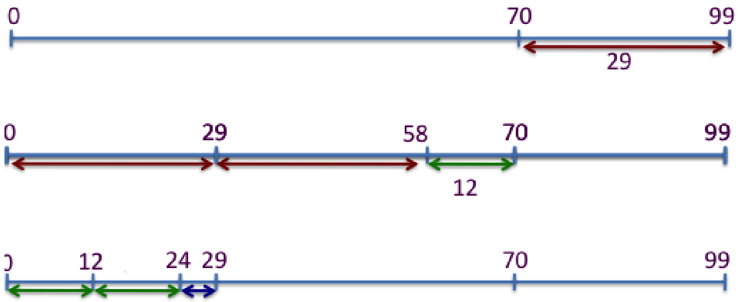
$$99 = 70 + 29$$

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}$$ deuxième étape



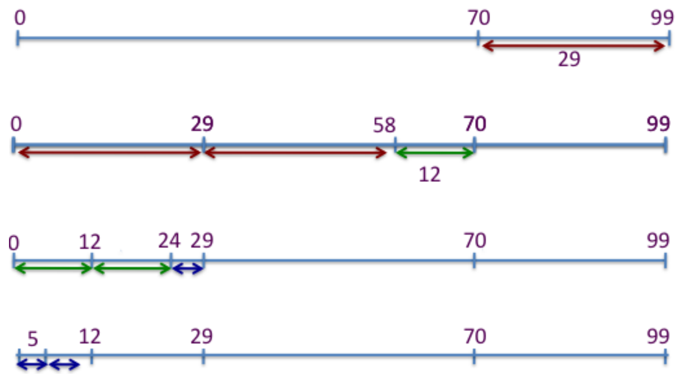
$$70 = 2 \times 29 + 12$$

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}$$ troisième étape



$$29 = 2 \times 12 + 5$$

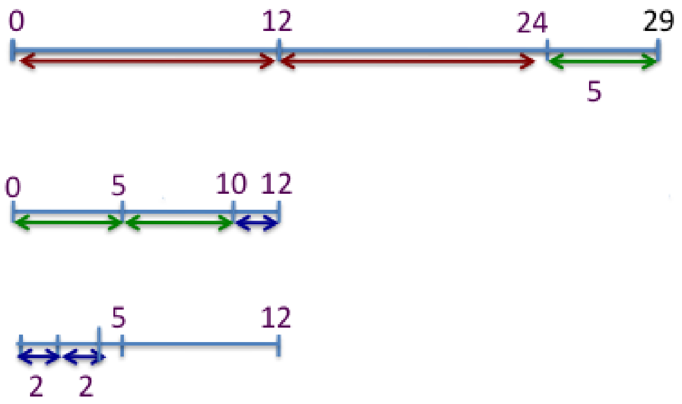
$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}$$ quatrième étape



$$12 = 2 \times 5 + 2$$

Dernières étapes

On “zoome” pour mieux voir :



Démonstration géométrique d’irrationalité

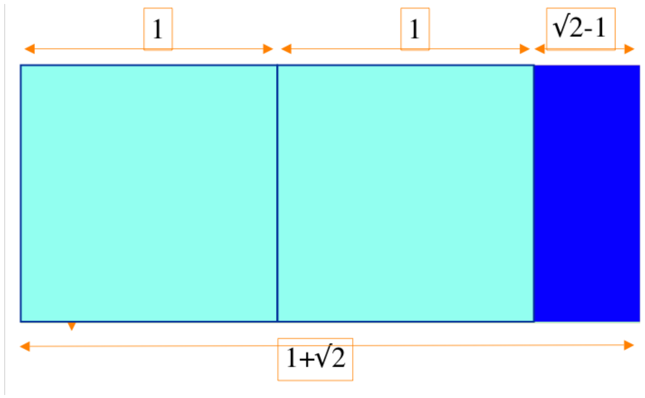
Pour la longueur $t = 1 + \sqrt{2}$, le processus décrit ne s’arrête jamais.

Pour une longueur rationnelle, le processus s’arrête après un nombre fini d’étapes, c’est–à–dire qu’après un nombre fini d’opérations il ne reste plus de petit segment.

Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On déplie la figure géométrique

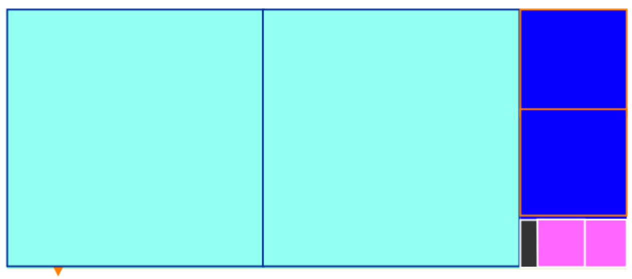
On part d’un rectangle dont les côtés ont pour longueurs 1 and $t = 1 + \sqrt{2} = 2,4142135623731\ldots$ La proportion est t.



On le décompose en 2 carrés de côtés 1 et un rectangle plus petit dont les côtés sont $t - 2 = 1/t$ et 1.
Le nouveau rectangle a donc encore comme proportion t.

Rectangles ayant pour proportion $t = 1 + \sqrt{2}$

Chacun des rectangles ayant la même proportion t se décompose en deux carrés plus un plus petit rectangle.



Le processus continue indéfiniment : $t = 1 + \sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exemple : le nombre d'or

Le nombre d'or

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887499\ldots$$

vérifie

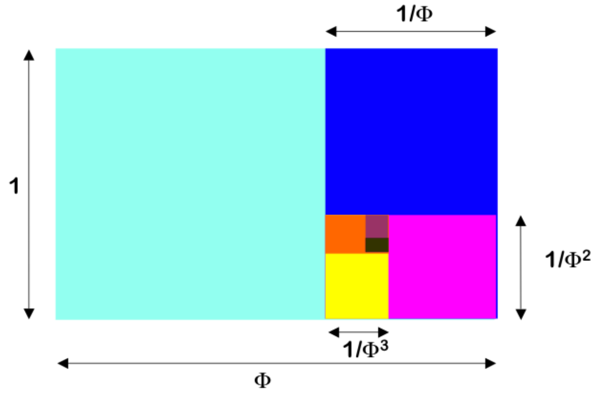
$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

Donc si on part d'un rectangle dont les longueurs des côtés ont pour proportion le nombre d'or, à chaque étape on obtient un carré et un rectangle plus petit ayant la même proportion.

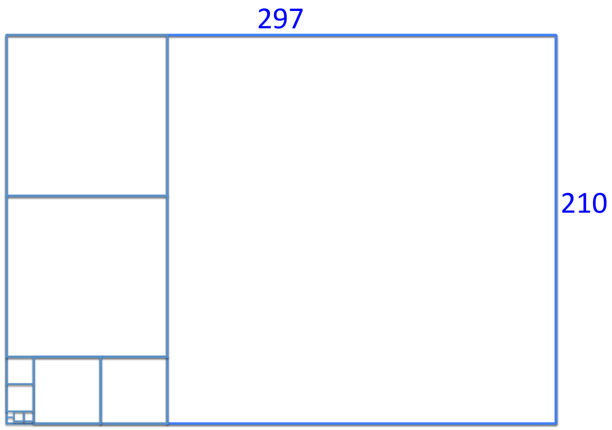
Le nombre d'or

$(1+\sqrt{5})/2 = 1.6180339887499\ldots$

Rectangle d'or



Découper une feuille A4 en 11 carrés



Il y a 5 paires de carrés plus un grand carré.

La fraction d'Apastamba

$577/408 = 1,414\ 215\ 68\ldots$

Pour le nombre utilisé par Apastamba dans les Sulvasutras comme approximation de $\sqrt{2}$:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34} = \frac{577}{408}$$

le dessin est similaire, au lieu de 5 paires de carrés, il y en a 7, donc en tout 15 carrés.

Fraction continue de $\sqrt{2}$

Le nombre $t = 1 + \sqrt{2}$ vérifie $t = 2 + \dfrac{1}{t}$, donc

$$t = 2 + \frac{1}{t} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{t}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{t}}} = \cdots$$

et

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{t}}}}}}}.$$

Fraction continue du nombre d'or

Le nombre $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ vérifie $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$, donc

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}}} = \cdots$$

et

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}}}}}}}.$$

Algorithme d'Euclide pour le pgcd de 99 et 70

$$99 = 70 + 29$$

$$70 = 2 \cdot 29 + 12$$

$$29 = 2 \cdot 12 + 5$$

$$12 = 2 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$\dfrac{297}{210} = \dfrac{99}{70}$

$$99 = 70 + 29 \qquad \frac{99}{70} = 1 + \frac{29}{70}$$

$$70 = 2 \cdot 29 + 12 \qquad \frac{70}{29} = 2 + \frac{12}{29}$$

$$\frac{99}{70} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{12}{29}}$$

Une fraction pour $99/70$

$$\frac{99}{70} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Cinq paires de carrés plus un grand carré.

Une fraction pour $577/408$

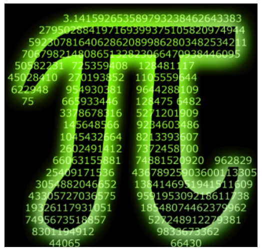
On a

$$\frac{577}{408} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}}}.$$

Sept paires de carrés plus un grand carré.

Le nombre π

Le nombre π est le rapport entre la longueur de la circonférence d'un cercle et son diamètre. C'est aussi le rapport entre l'aire d'un disque circulaire et le carré de son rayon.



Sa valeur est

$$3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\ldots$$

`http://oeis.org/A000796` Decimal expansion of Pi.

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Pi`

Irrationalité de π

Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777)
Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques,
Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, **17** (1761), p. 265-322 ;
lu en 1767 ; Math. Werke, t. II.

$\tan(v)$ est irrationnel quand $v \neq 0$ est rationnel.
En particulier π est irrationnel car $\tan(\pi/4) = 1$.

Lambert et le roi Frederick II de Prusse

— Que savez vous, Lambert ?
— Tout, Sire.
— Et de qui le tenez–vous ?
— De moi-même !

Développement décimaux des nombres réels

Quand on écrit $\pi = 3\,,\,141\,59\ldots$ cela signifie

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10\,000} + \frac{9}{100\,000} + \cdots$$

Autre exemple : $\dfrac{297}{210} = \dfrac{99}{70} = 1,414\,2\ \ldots\ldots$ veut dire

$$\frac{99}{70} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1\,000} + \frac{2}{10\,000} + \cdots$$

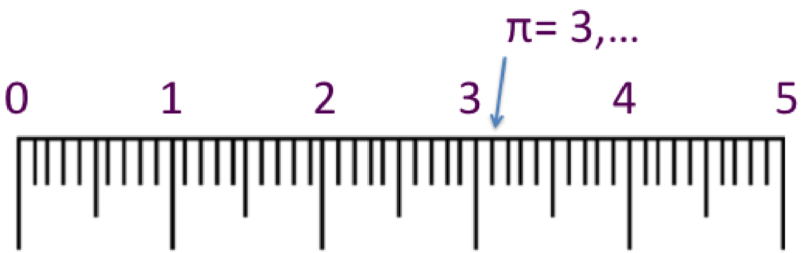
Le développement décimal de $99/70$ est ultimement périodique :

$$\frac{99}{70} = 1,414\,285\,714\,285\,714\,285\,714\ \ldots\ldots$$

Décimales de $\pi = 3, \ldots$

La partie entière de π est 3 :

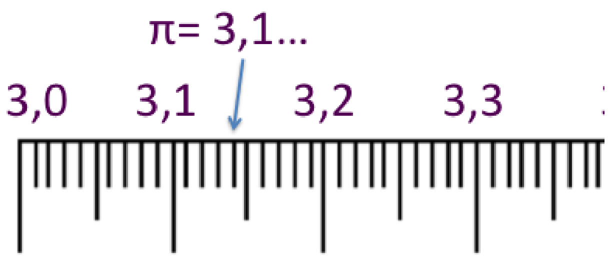
$$3 < \pi < 4$$



Décimales de $\pi = 3, 1\ldots$

La première décimale après la virgule de π est 1 :

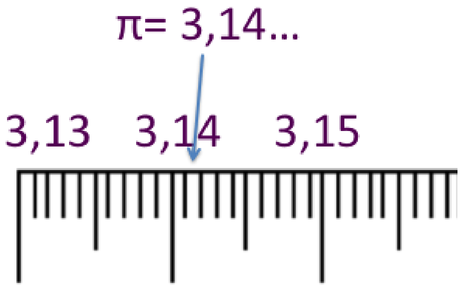
$$3,1 < \pi < 3,2$$



Décimales de $\pi = 3,14\ldots$

La deuxième décimale après la virgule de π est 4 :

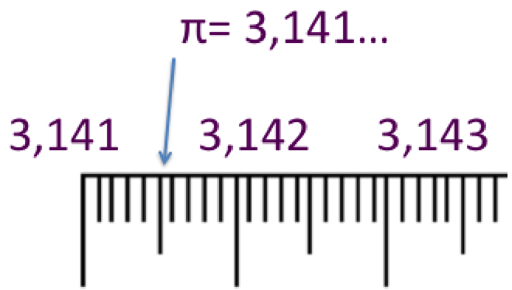
$$3,14 < \pi < 3,15$$



Décimales de $\pi = 3,1415\ldots$

La troisième décimale après la virgule de π est 1 :

$$3,141 < \pi < 3,142$$



Développement décimal d'un nombre réel

Quand $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots b_m,\ \ldots$ sont des chiffres dans l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, on note

$$0,\ b_1\, b_2\, b_3\ \ldots\ b_{m-1}\, b_m\, b_{m+1}\ \ldots$$

le nombre

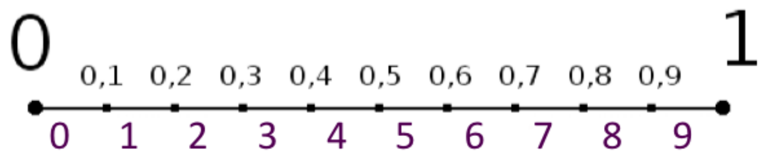
$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} + \frac{b_3}{1000} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{10^{m-1}} + \frac{b_m}{10^m} + \frac{b_{m+1}}{10^{m+1}} + \cdots$$

dans l'intervalle $[0,\ 1]$.

Si le nombre est ≥ 1, on remplace le 0 avant la virgule par la partie entière.

Les chiffres après la virgule

Les nombres réels positifs sont les mesures des longueurs. Prenons un nombre réel positif, enlevons-lui la partie entière, il reste la partie fractionnaire $\{x\}$ entre 0 et 1.

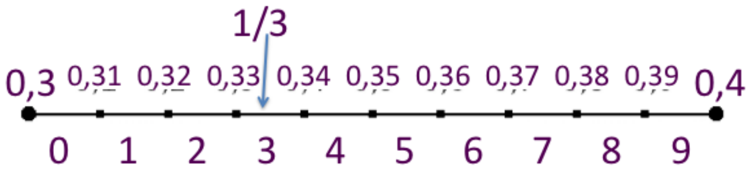


On divise l'intervalle $[0,1)$ en 10 intervalles de longueur $1/10$, on les numérote de 0 à 9, et on regarde le numéro de l'intervalle dans lequel se trouve $\{x\}$: c'est le premier chiffre de la partie décimale de x, que nous avons noté b_1.

Le développement décimal de $1/3$

Par exemple $1/3$ est dans l'intervalle entre $0,3$ et $0,4$ qui est numéroté 3, donc le premier chiffre décimal de $1/3$ est 3.

On découpe l'intervalle entre $0,3$ et $0,4$ en 10 intervalles de longueur $1/100 = 0,01$, on les numérote de 0 à 9. Le numéro de l'intervalle dans lequel tombe notre nombre donne son deuxième chiffre après la virgule.



Le développement décimal de $1/3$

Pour le nombre $1/3$, c'est toujours l'intervalle numéroté 3 qui sera le bon, car

$$0,333\ldots333 < \frac{1}{3} < 0,333\ldots334,$$

ce qui veut dire que les chiffres décimaux de $1/3$ sont tous égaux à 3 :

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots333\ldots$$

avec une infinité de 3.

Coder les nombres réels

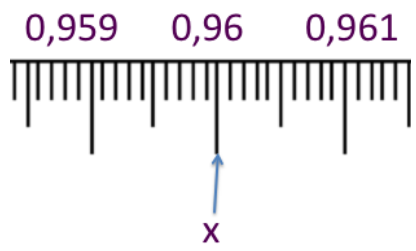
À chaque longueur x (ou chaque nombre réel positif) on associe une suite de chiffres $b_0\, b_1\, b_2\, \ldots$.

À chaque suite de chiffres $b_0\, b_1\, b_2\, \ldots$ on associe un nombre réel positif x.

Est-ce un bon codage ?

Une situation ambigüe

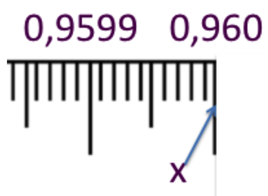
Et si le nombre en question est une extrémité d'un intervalle ? Par exemple si on part de $x = 24/25 = 0,96$, le premier chiffre décimal est 9, pour le second on trouve que $x - 0,9 = 0,06$ est à la limite entre l'intervalle de numéro 5 et celui de numéro 6.



Son développement décimal est $0,960\,000\,\ldots$ que l'on note simplement $0,96$. Cela revient à dire qu'à cette étape, on décide qu'il est dans l'intervalle numéro 6, et ensuite il sera toujours dans l'intervalle numéro 0.

Suite infinie de chiffres 9

Mais on peut aussi à cette étape décréter qu'il est dans le cinquième intervalle. Dans ce cas à chacune des étapes suivantes il sera dans le neuvième intervalle, et on trouvera le développement $0,959\,999\,999\ldots$ avec une infinité de 9.



On a $24/25 = 0,96 = 0,959\,999\,999\ldots$
De même $1 = 0,999\,999\,999\ldots$ avec une infinité de 9.

Les nombres décimaux

On appelle *nombre décimal* un nombre dont le développement n'a qu'un nombre fini de chiffres (ou, si on préfère, dont tous les chiffres après un certain rang sont 0).

Par exemple les entiers sont des nombres décimaux, $24/25$ aussi (mais pas $1/3$ car $1/3 = 0,333\,333\ldots$ a une infinité de chiffres non nuls).

Les nombres décimaux sont ceux qui peuvent être écrits sous la forme a/b avec b une puissance de 10. Par exemple $24/25 = 96/100$.

Sous forme irréductible, les nombres décimaux sont ceux dont le dénominateur est produit de 2 et de 5 uniquement : Ainsi $25 = 5 \times 5$.

Les dénominateurs des nombres décimaux

Les dénominateurs des nombres décimaux sous forme irréductible sont dans la liste

$1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80, 100, 125, 128, 160,$

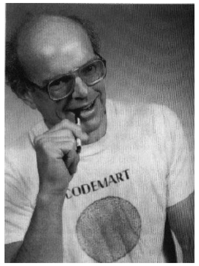
$200, 250, 256, 320, 400, 500, 512, 625, 640, 800, 1000, 1024,$

$1250, 1280, 1600, 2000, 2048, 2500, 2560, 3125, 3200, 4000, \ldots$

http://oeis.org/A003592

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

Neil J. A. Sloane

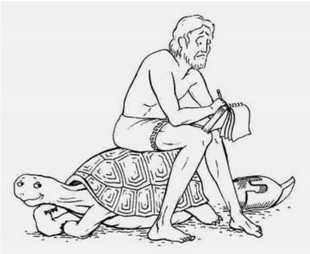


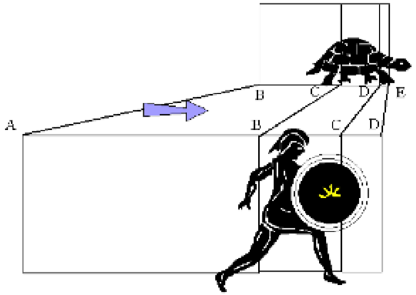
Unicité du développement décimal

Les nombres décimaux possèdent exactement deux développements, l'un n'ayant qu'un nombre fini de chiffres non nuls, l'autre ayant sa suite de chiffres terminant par des 9.

Le nombres qui ne sont pas décimaux ont un développement décimal unique.

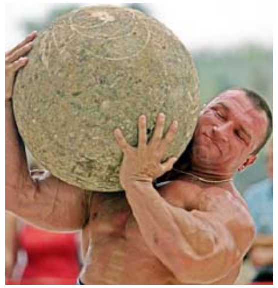
Le paradoxe d'Achille et la tortue





Achille veut rattraper la tortue, il part de A quand elle est en B. Il doit d'abord aller à B où elle était initialement. Mais entre temps elle a avancé jusqu'à C. Et quand il arrive à C, elle est déjà à D. Il restera donc toujours à Achille une partie du chemin à parcourir pour la rejoindre.

Le paradoxe de la dichotomie (Zénon d'Élée)



Zénon se tient à huit mètres d'un arbre, tenant une pierre. Il lance sa pierre dans la direction de l'arbre. Avant que la pierre puisse atteindre l'arbre, elle doit traverser la première moitié des huit mètres.

Ensuite, il lui reste encore quatre mètres à parcourir, dont elle accomplit d'abord la moitié, deux mètres, et ainsi de suite *ad infinitum* et à chaque fois avec un temps non nul.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxes_de_Z%C3%A9non

Lancer un caillou

La pierre doit faire d'abord $9/10$ du chemin, et il lui restera $1/10$ du chemin à faire. Il faudra ensuite qu'elle fasse $9/10$ de ce chemin restant, et il lui restera à faire $1/100$ du chemin initial.

$$1=\frac{9}{10}+\frac{1}{10},\quad \frac{1}{10}=\frac{9}{100}+\frac{1}{100},\quad \frac{1}{100}=\frac{9}{1\,000}+\frac{1}{1\,000},\dots$$

Cela s'écrit

$$1=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1\,000}+\cdots=0,999\,999\,999\dots$$

La série géométrique

Soit a un nombre réel. On considère les sommes

$$S_n=1+a+a^2+\cdots+a^n$$

$S_0=1,\ S_1=1+a,\ S_2=1+a+a^2,\ S_3=1+a+a^2+a^3,\dots$

On écrit

$$\begin{aligned} S_n &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ aS_n &= a+a^2+\cdots+a^n+a^{n+1} \end{aligned}$$

et on fait a différence

$$(1-a)S_n=1-a^{n+1}.$$

Donc, si $a\neq 1$,

$$S_n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}=\frac{1}{1-a}-\frac{a^{n+1}}{1-a}\,.$$

Si $a=1$ alors $S_n=n+1$.

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Supposons $0 < a < 1$. Alors S_n est toujours $< 1/(1-a)$, mais la différence $a^{n+1}/(1-a)$ est de plus en plus petite quand n est grand. C'est pourquoi

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1} + \cdots = \frac{1}{1-a}\cdot$$

Par exemple avec $a = 1/2$ on a $1/(1-a) = 2$ et

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots = 2,$$

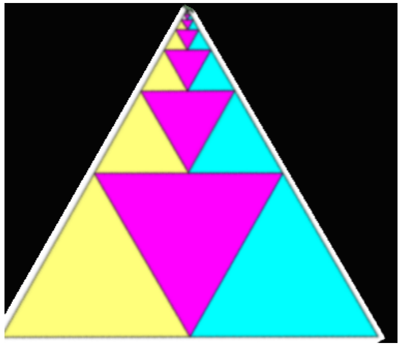
tandis qu'avec $a = 1/10$ on a $1/(1-a) = 10/9$ et

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \cdots = 10.$$

La série géométrique de raison $1/4$

Pour $a = 1/4$ on a $1/(1-a) = 4/3$ et

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{1}{3}\cdot$$



Autre argument pour $1 = 0,999\,999\ \ldots$

Nous avons vu la relation

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots333\ldots$$

avec une infinité de 3.

Si on multiplie les deux côtés par 3, on trouve

$$1 = 0,999\,999\ \ldots$$

avec une infinité de 9.

Développement décimal de $1/7$

$$\frac{1}{7} = 0,142\,857\,142\,857\,142\,857\ \ldots$$

$$\begin{array}{rcl}
10 & = & 7\cdot 1 + 3 \\
30 & = & 7\cdot 4 + 2 \\
20 & = & 7\cdot 2 + 6 \\
60 & = & 7\cdot 8 + 4 \\
40 & = & 7\cdot 5 + 5 \\
50 & = & 7\cdot 7 + 1 \\
10 & = & 7\cdot 1 + 3 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Le développement est périodique.

Développement décimal des nombres rationnels

Le développement décimal de $99/70$ est ultimement périodique :

$$\frac{99}{70} = 1,414\,285\,714\,285\,714\,285\,714\,\ldots\ldots$$

Celui de $1/163$ aussi (la longueur de la période est 81) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{163} = 0{,}006\,134\,969\,325\,153\,374\,233\,128\,834 \\ 355\,828\,220\,858\,895\,705\,521\,472\,392 \\ 638\,036\,809\,815\,950\,920\,245\,398\,773 \\ 006\,134\,969\,325\,153\,374\,233\,128\,834\ldots\end{aligned}$$

Développement décimal des nombres rationnels

Un nombre rationnel a un développement décimal *ultimement périodique* (périodique à partir d'un certain rang)

Inversement, tout nombre dont le développement décimal est ultimement périodique est rationnel.

C'est un *critère d'irrationalité*.

Exercice : $999\ldots9000\ldots0$

$$\begin{aligned}1\times 9 &= 9,\\ 2\times 45 &= 90,\\ 3\times 3 &= 9,\\ 4\times 225 &= 900,\\ 5\times 18 &= 90,\\ 6\times 15 &= 90,\\ 7\times 142857 &= 999\,999,\\ 8\times 1\,125 &= 9\,000,\\ 9\times 1 &= 9.\end{aligned}$$

En considérant le développement décimal de $1/N$, montrer que tout entier $N > 0$ possède un multiple dont l'écriture en base dix est une suite de 9 suivie éventuellement d'une suite de 0 :

$$999\ldots9000\ldots0$$

Développements périodiques

Quel est le nombre

$$x := 0,\ 123\,456\,789\,012\,346\,678\,901\,234\,678\,901\ \ldots ?$$

On l'écrit $x = yz$ avec $y = 1,\ 234\,567\,89$ et

$$z = 0,100\,000\,000\,010\,000\,000\,001\,000\,000\ \ldots$$

Alors

$$z = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^{11}} + \frac{1}{10^{21}} + \frac{1}{10^{31}} + \cdots$$

qui est le produit par $1/10$ d'une série géométrique de raison $1/10^{10}$:

$$z = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-10^{-10}} = \frac{10^9}{9\,999\,999\,999}.$$

Ainsi

$$x = \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}.$$

Les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$

http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi

1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973
7990732478462107038850387534327641572735013846230912297024924836
0558507372126441214970999358314132226659275055927557999505011527
8206057147010955997160597027453459686201472851741864088919860955
2329230484308714321450839762603627995251407989687253396546331808
8296406206152583523950547457502877599617298355752203375318570113
5437460340849884716038689997069900481503054402779031645424782306
8492936918621580578463111596668713013015618568987237235288509264
8612494977154218334204285686060146824720771435854874155657069677
6537202264854470158588016207584749226572260020855844665214583988
9394437092659180031138824646815708263010059485870400318648034219
4897278290641045072636881313739855256117322040245091227700226941
1275736272804957381089675040183698683684507257993647290607629969
4138047565482372899718032680247442062926912485905218100445984215
0591120249441341728531478105803603371077309182869314710171111683
91658172688941975871658215212822951848847 ...

Émile Borel : 1950

La suite des chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ devrait être "aléatoire" : chacun des chiffres devrait apparaître avec la fréquence $1/10$, chacune des suites de 2 chiffres devrait apparaître avec la fréquence $1/100$ ...

Émile Borel (1871–1956)

- *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques,*
  Palermo Rend. **27**, 247-271 (1909).
  Jahrbuch Database JFM 40.0283.01
  http://www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html

- *Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaînes,*
  C. R. Acad. Sci., Paris **230**, 591-593 (1950).
  Zbl 0035.08302

Que sait–on sur la suite des décimales de $\sqrt{2}$?

On sait que la suite des décimales de $\sqrt{2}$ n'est pas ultimement périodique.

Il en résulte que, parmi les chiffres

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},$$

il y en a au moins deux qui apparaissent une infinité de fois.

On ne sait presque rien d'autre.

L'argument diagonal de Cantor (1891)

Il y a plus de nombres réels que de nombres rationnels : on ne peut pas mettre tous les nombres réels dans une liste (1874 : origine de la théorie de l'infini - théorie des ensembles).

Si $x_1, x_2, x_3, \ldots$ est une liste de nombres réels entre 0 et 1, il existe un nombre réel y entre 0 et 1 qui n'est pas dans la liste.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0,\, b_{11}\, b_{12}\, b_{13}\, \ldots\, b_{1n}\, \ldots \\ x_2 & = & 0,\, b_{21}\, b_{22}\, b_{23}\, \ldots\, b_{2n}\, \ldots \\ x_3 & = & 0,\, b_{31}\, b_{32}\, b_{33}\, \ldots\, b_{3n}\, \ldots \\ & \vdots & \\ x_n & = & 0,\, b_{n1}\, b_{n2}\, b_{n3}\, \ldots\, b_{nn}\, \ldots \\ & \vdots & \end{array}$$

Georg Cantor (1845 - 1918)

Pour chaque chiffre b_{ii} qui prend une valeur dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on choisit un chiffre b'_{ii} dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ avec $b'_{ii} \neq b_{ii}$. Alors

$$y = 0,\, b'_{11}\, b'_{22}\, b'_{33}\, \ldots\, b'_{nn}\, \ldots$$

n'est pas dans la liste.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/
The MacTutor History of Mathematics archive

Système décimal, système binaire

Base dix : écriture décimale des nombres réels.

Base deux : système binaire — informatique.

$2^{10} = 1024$ – kilo Octets

Questions d'arrondis en informatique théorique.

La constante de Ramanujan $e^{\pi\sqrt{163}}$

Hermite (1859), S. Ramanujan (1914)

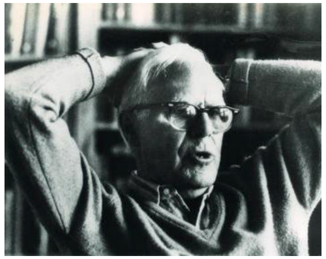
$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743,\ 999\,999\,999\,999\,250\,0\ldots$$

http://oeis.org/A060295
http://mathworld.wolfram.com/RamanujanConstant.html
http://fr.wikipedia.org/wiki/Ramanujan
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians

Scientific American, 1 avril 1975

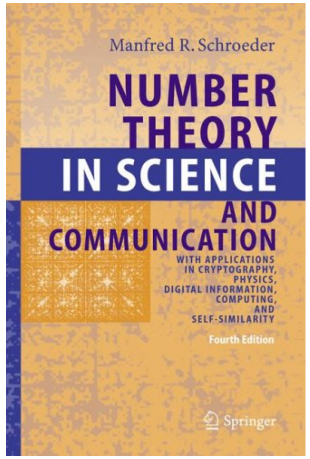
Hermite (1822-1901)	S. Ramanujan (1887 - 1920)	Martin Gardner (1914–2010)





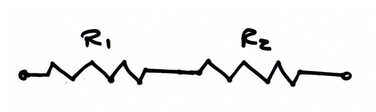
Number Theory in Science and communication

M.R. Schroeder. Number theory in science and communication : *with applications in cryptography, physics, digital information, computing and self similarity* Springer series in information sciences **7** 1986. 4th ed. (2006) 367 p.



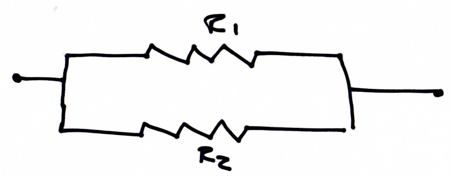
Réseaux électriques

- La résistance R d'un réseau en série



est la somme $R_1 + R_2$.

- La résistance R d'un réseau en parallèle

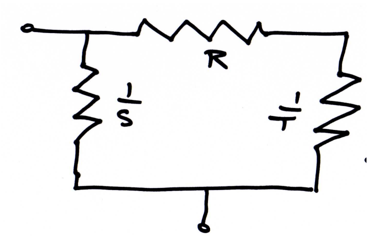


satisfait

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Réseaux et fractions continues

La résistance U du circuit

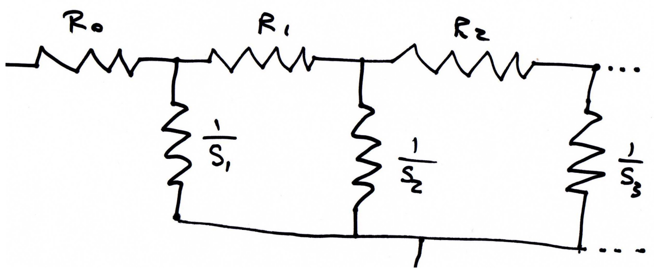


est donnée par

$$\frac{1}{U} = S + \frac{1}{R + \frac{1}{T}} \quad \text{donc} \quad U = \frac{1}{S + \frac{1}{R + \frac{1}{T}}}$$

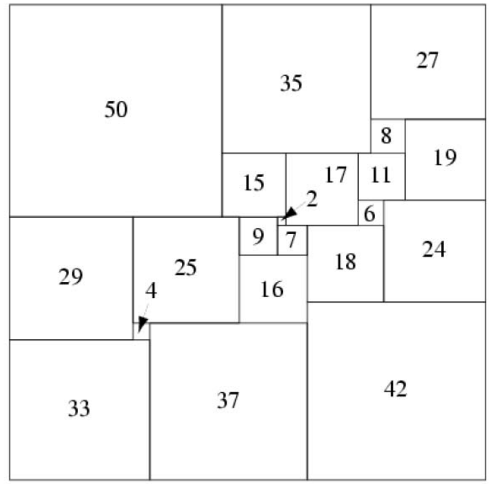
Réseaux électriques, fractions continues et décomposition d'un carré en carrés

• La résistance du réseau suivant est donnée par une fraction continue $[R_0; S_1, R_1, S_2, R_2 \ldots]$ pour le circuit



• Les réseaux électriques et les fractions continues ont été utilisés pour trouver la première solution du problème de décomposition d'un carré entier en réunion disjointe de carrés entiers tous distincts.

Quadrature du carré



21-*square perfect square*

There is a unique simple perfect square of order 21 (the lowest possible order), discovered in 1978 by A. J. W. Duijvestijn (Bouwkamp and Duijvestijn 1992). It is composed of 21 squares with total side length 112, and is illustrated above.

Suite de l'histoire

Nombres algébriques, nombres transcendants.

Quadrature du cercle.

Constructions à la règle et au compas.

Problèmes Diophantiens.

Références

Jean–Marie de Koninck.
• *1001 problèmes en théorie classique des nombres*, Ellipses, Paris, 2004 ;
• *Ces nombres qui nous fascinent*, Ellipses,Paris, 2008.
• *En chair et en maths, Septembre Éditeur*, Québec, 2008.

Stanislas Dehaene. *La bosse des maths.* Ed. Odile Jacob (1997).

Jean–Paul Delahaye. *Le fascinant nombre π.* Bibliothèque Pour La Science (1997).

Apostolos Doxiadis. *Oncle Petros et la conjecture de Goldbach.* Ed. Seuil (1999).

Références

Gilles Dowek, Jean-Pierre Bourguignon, Jean–Christophe Novelli, Benoît Rittaud. *Jeux mathématiques et vice–versa.* Le Pommier, 19 (2005).

Albert Ducrocq et André Warusfel. *Les mathématiques Plaisir et Nécessité.* Vuibert (2000).

Gilles Godefroy. *L'aventure des nombres.* Ed. Odile Jacob (1997).

Denis Guedj.
- *L'empire des nombres.* Gallimard, Sciences et Techniques 300 (1996)
- *Le théorème du Perroquet.* Ed. Seuil (1998).

Références

Marie Jacob. La quadrature du cercle – un problème à la mesure des lumières. Fayard (2006).

Alexandre Moatti. *Regards sur les textes fondateurs de la science*, volume 1. Le sel et le fer, **20**, Cassini (2010).

- Benoît Rittaud. *À un mathématicien inconnu.*
- Alain Juhel. *Lambert et l'irrationalité de π.*
- Norbert Verdier. *L'irrationalité de e.*
- Michel Mendès–France. *Liouville, le découvreur des nombres transcendants.*
- Michel Waldschmidt. *La méthode de Charles Hermite en théorie des nombres transcendants.*
- Patrick Dehornoy. *Cantor et les infinis.*

Références sur internet

http://fr.wikipedia.org/wiki/ Wikipedia Portail des Mathématiques

http://images.math.cnrs.fr/ Images des mathématiques

http://trucsmaths.free.fr/ Des trucs et des maths

http://mathworld.wolfram.com/ Wolfram MathWorld

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/ The MacTutor History of Mathematics archive

Lycée Jules Verne, Limours *12 mars 2011*

Rationnels, irrationnels, infinis

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/∼miw/