Formes quadratiques (Leçon 1)

Jorge Jiménez Urroz
(Universitat Politècnica de Catalunya)

Cimpa École, Bamako, Novembre 2010

Préliminaires

Définition

Une forme quadratique *est une fonction polynomiale homogène du second degré à coefficients dans* $\mathbb{Z}$*,*

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \qquad a, b, c \in \mathbb{Z},$$

qui sera notée $f = \langle a, b, c \rangle$.

Préliminaires

Définition

Une forme quadratique *est une fonction polynomiale homogène du second degré à coefficients dans* $\mathbb{Z}$*,*

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \qquad a, b, c \in \mathbb{Z},$$

qui sera notée $f = \langle a, b, c \rangle$.

Question: Quels sont les entiers que f représente?

- $f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 2y^2 = \langle 2, -6, 2 \rangle$.

- $f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 2y^2 = \langle 2, -6, 2 \rangle$.

Définition

La forme $\langle a, b, c \rangle$ *est dite* primitive *si* $pgcd(a, b, c) = 1$

- $f(x,y) = 2x^2 - 6xy + 2y^2 = \langle 2, -6, 2 \rangle$.

Définition

La forme $\langle a, b, c \rangle$ *est dite* primitive *si* $pgcd(a, b, c) = 1$

- $f(x,y) = x^2 + y^2 = \langle 1, 0, 1 \rangle)$ ne représente eaucun entier négatif.

- $f(x,y) = 2x^2 - 6xy + 2y^2 = \langle 2, -6, 2 \rangle$.

Définition

La forme $\langle a, b, c \rangle$ *est dite* primitive *si* $pgcd(a, b, c) = 1$

- $f(x,y) = x^2 + y^2 = \langle 1, 0, 1 \rangle)$ ne représente eaucun entier négatif.

Définition

La forme $\langle a, b, c \rangle$ *est dite* définie *si* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ *avec* $a > 0$ *(et* $c > 0$*). Elle est dite* indéfinie *si* $\Delta > 0$.

$$4af(x,y) = 4a(ax^2 + bxy + cy^2) = (2ax + by)^2 - \Delta y^2.$$

- $f_1(x, y) = x^2 + 3y^2$ ne représente pas l'entier 2.

- $f_1(x,y) = x^2 + 3y^2$ ne représente pas l'entier 2.
- $f_2(x,y) = 4x^2 + 14xy + 13y^2$, non plus.

- $f_1(x,y) = x^2 + 3y^2$ ne représente pas l'entier 2.

- $f_2(x,y) = 4x^2 + 14xy + 13y^2$, non plus.

Si on fait le changement de variables $x = 2x' - y'$, $y = -x' + y'$, nous avons $f_2(x,y) = f_1(x',y')$, et f et f' représentent le même ensemble d'entiers.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- $f_1(x,y) = x^2 + 3y^2$ ne représente pas l'entier 2.

- $f_2(x,y) = 4x^2 + 14xy + 13y^2$, non plus.

Si on fait le changement de variables $x = 2x' - y'$, $y = -x' + y'$, nous avons $f_2(x,y) = f_1(x',y')$, et f et f' représentent le même ensemble d'entiers.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nous voulons faire un changement de variables pour trouver la forme la plus facile possible pour les calculs. Ce changement de variables doit impliquer une matrice inversible. Posons

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} : \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \right\},$$

et

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} : \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}.$$

Définition

A chaque forme $f = \langle a, b, c \rangle$, *on associe la matrice*

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}.$$

Définition

A chaque forme $f = \langle a, b, c \rangle$, *on associe la matrice*

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$f(x, y) = (x, y) M_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Observation: $\Delta = -4\det(M_f)$.

Définition

A chaque forme $f = \langle a, b, c \rangle$, *on associe la matrice*

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$f(x, y) = (x, y) M_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Observation: $\Delta = -4\det(M_f)$.

Chaque $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur f et donne une autre forme f' dont la matrice associée est

$$M_{f'} = A M_f A^t.$$

Définition

A chaque forme $f = \langle a, b, c\rangle$, on associe la matrice

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$f(x, y) = (x, y) M_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Observation: $\Delta = -4\det(M_f)$.

Chaque $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur f et donne une autre forme f' dont la matrice associée est

$$M_{f'} = A M_f A^t.$$

En particulier, $\Delta_f = \Delta_{f'}$.

Définition

Etant donné un discriminant Δ, nous appelons $\mathcal{F}_\Delta$ l'ensemble des formes quadratiques de discriminant Δ.

Observation Tout entier $\Delta \equiv 0, 1 \pmod 4$ est discriminant d'une forme quadratique.

Définition

Etant donné un discriminant Δ, nous appelons $\mathcal{F}_\Delta$ l'ensemble des formes quadratiques de discriminant Δ.

Observation Tout entier $\Delta \equiv 0, 1 \pmod 4$ est discriminant d'une forme quadratique.

Définition

Etant donné un discriminant Δ, la forme quadratique principale I de discriminant Δ est

$$I = \begin{cases} \langle 1, 0, -\Delta/4 \rangle & \text{si } \Delta \equiv 0 \pmod 4, \\ \langle 1, 1, (1-\Delta)/4 \rangle & \text{si } \Delta \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Définition

Un entier Δ est un discriminant fondamental *s'il est discriminant d'une forme quadratique primitive et seulement de formes quadratiques primitives.*

Il y a deux possibilités:

- $\Delta \equiv 1 \pmod 4$ avec Δ sans facteur carré,
- $\Delta/4 \equiv 2, 3 \pmod 4$ avec $\Delta/4$ sans facteur carré.

Définition

Un entier Δ *est un* discriminant fondamental *s'il est discriminant d'une forme quadratique primitive et seulement de formes quadratiques primitives.*

Il y a deux possibilités:

- $\Delta \equiv 1 \pmod 4$ avec Δ sans facteur carré,
- $\Delta/4 \equiv 2, 3 \pmod 4$ avec $\Delta/4$ sans facteur carré.

Etant donnés une matrice $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et un discriminant Δ, nous avons

$$\begin{aligned} T_A : \quad & F_\Delta \to F_\Delta \\ & f \to T_A(f) = f'. \end{aligned}$$

Définition

Deux formes $f, g \in F_\Delta$ *sont* équivalentes, *en symboles* $f \sim g$, *s'il existe* $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ *tel que* $T_A(f) = g$.
Si $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, *on dit que la forme* f *est* proprement équivalente *à la forme* g, *en symboles* $f \approx g$.

Observation: $\sim$ et $\approx$ sont des relations d'équivalence. On note respectivement $\mathrm{Cl}(\Delta)$ l'ensemble des classes d'équivalence par rapport à $\sim$, et $\mathrm{Cl}^+(\Delta)$ l'ensemble des classes d'équivalence par rapport à $\approx$.

Si $T_A(f) = \langle a', b', c' \rangle$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a' & = & f(\alpha, \gamma), \\ b' & = & 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta, \\ c' & = & f(\beta, \delta). \end{array} \right.$$

Si $T_A(f) = \langle a', b', c' \rangle$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a' & = & f(\alpha, \gamma), \\ b' & = & 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta, \\ c' & = & f(\beta, \delta). \end{array} \right.$$

Etant donnée une forme $f \in \mathcal{F}_\Delta$, nous voulons trouver la forme équivalente (ou proprement équivalente) à f la plus utile.

Formes définies positives

Nous voulons les coefficients de $\langle a, b, c\rangle$ les plus petits possibles. Si la forme est définie positive, il existe m ayant la propriété

$$m = \min\{f(x,y) \,:\, x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Il est clair que si $m = f(\alpha, \gamma)$, alors $\mathrm{pgcd}(\alpha, \gamma) = 1$ et on peut trouver β, δ telle que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Posons $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ et appelons $T_A(f) = \langle a', b', c'\rangle$. Nous avons $a \leq c$, et voulons rendre $|b|$ le plus petit possible.

Formes définies positives

Nous voulons les coefficients de $\langle a, b, c\rangle$ les plus petits possibles. Si la forme est définie positive, il existe m ayant la propriété

$$m = \min\{f(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Il est clair que si $m = f(\alpha, \gamma)$, alors $\mathrm{pgcd}(\alpha, \gamma) = 1$ et on peut trouver β, δ telle que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Posons $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ et appelons $T_A(f) = \langle a', b', c'\rangle$. Nous avons $a \leq c$, et voulons rendre $|b|$ le plus petit possible.

Définition

Une forme quadratique définie positive $f = \langle a, b, c\rangle$ est réduite *si $|b| \leq a \leq c$ et si de plus $b \geq 0$ lorsque $|b| = a$ ou lorsque $c = a$.*

Proposition

Il existe une forme quadratique réduite dans chaque classe de formes quadratiques définies positives proprement équivalentes.

Proposition

Il existe une forme quadratique réduite dans chaque classe de formes quadratiques définies positives proprement équivalentes.

Démonstration: Choisissons $\langle a', b', c' \rangle = T_A(f)$ avec $a' =$min$\{f(x,y) \,:\, x, y \in \mathbb{Z}\}$. Si $|b'| \leq a$, c'est fini. Sinon, nous considérons l'unique entier δ tel que $|-b' + 2a'\delta| \leq a'$, et la matrice $B = M_\delta A'$ ou $M_\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} -\beta & -\delta \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix}$. La forme $T_B(f)$ est réduite.

Vous remarquerez que $g = T_{A'}(f) = \langle c', -b', a' \rangle$ et $T_{M_\delta}(g) = \langle a', -b + 2a'\delta, c' + b'\delta + a'\delta^2 \rangle$.

Proposition

Il existe une forme quadratique réduite dans chaque classe de formes quadratiques définies positives proprement équivalentes.

Démonstration: Choisissons $\langle a', b', c' \rangle = T_A(f)$ avec a' =min$\{f(x,y) \, : \, x, y \in \mathbb{Z}\}$. Si $|b'| \leq a$, c'est fini. Sinon, nous considérons l'unique entier δ tel que $|-b' + 2a'\delta| \leq a'$, et la matrice $B = M_\delta A'$ ou $M_\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} -\beta & -\delta \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix}$. La forme $T_B(f)$ est réduite.

Vous remarquerez que $g = T_{A'}(f) = \langle c', -b', a' \rangle$ et $T_{M_\delta}(g) = \langle a', -b + 2a'\delta, c' + b'\delta + a'\delta^2 \rangle$.

Exercice: Finissez la démonstration.

Théorème

Les seules formes de l'ensemble des formes réduites qui sont équivalentes entre elles sont $\langle a, -b, a\rangle \approx \langle a, b, a\rangle$ *et* $\langle a, -a, c\rangle \approx \langle a, a, c\rangle$.

Théorème

Les seules formes de l'ensemble des formes réduites qui sont équivalentes entre elles sont $\langle a, -b, a\rangle \approx \langle a, b, a\rangle$ et $\langle a, -a, c\rangle \approx \langle a, a, c\rangle$.

Démonstration: Soit $\langle a, b, c\rangle$ et $\langle a', b', c'\rangle$ deux formes réduites équivalentes avec $a \geq a'$. Alors, $a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$, et $a \geq a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 \geq a(\alpha^2 + \gamma^2) - |b||\alpha\gamma| \geq a|\alpha\gamma|$, de sorte que $\alpha^2 + \gamma^2 \geq 2|\alpha\gamma|$.

Cette inégalité est possible seulement si $\{\alpha, \gamma\} \subset \{0, 1, -1\}$. Si $\alpha = 0$, alors $b' = -b \pm 2c\delta$, $a' = c$, et nous arrivons a f_1. Si $\gamma = 0$, alors $b' = b \pm 2a\delta$, $a' = a$, et nous arrivons à f_2. Finalement, si $|\alpha\gamma| = 1$, alors $a = a' = a \pm b + c$, et nous avons $\langle a, \pm a, a\rangle$.

Comment pouvons-nous trouver la valeur minimale de $f(x, y)$? Dans ce qui suit, on va donner un algorithme standard pour trouver cette valeur:

- Si $f = \langle a, b, c \rangle$ n'est pas réduite, alors il existe un entier unique δ telle que $|-b + 2c\delta| \leq c$.
- Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$ et $T_A(f) = \langle c, -b + 2c\delta, a + b\delta + c\delta^2 \rangle = f'$.
- Si $c \leq a + b\delta + c\delta^2$, c'est terminé. Sinon, nous répétons avec f'.

Observation Vous constaterez que si f' n'est pas réduite, alors $0 < c' < c$, de sorte que le processus se terminera après un nombre fini d'étapes.

Proposition

Soit $\langle a, b, c\rangle$ *une forme définie positive réduite. Alors,*

- $|b| \leq \sqrt{\Delta/3}$ *et* $b \equiv \Delta \pmod 2$,
- $a|(b^2 - \Delta)/4$,
- $|b| \leq a \leq (b^2 - \Delta)/(4a)$.

Proposition

Soit $\langle a, b, c\rangle$ *une forme définie positive réduite. Alors,*

- $|b| \leq \sqrt{\Delta/3}$ *et* $b \equiv \Delta \pmod 2$,
- $a|(b^2 - \Delta)/4$,
- $|b| \leq a \leq (b^2 - \Delta)/(4a)$.

Corollaire

Pour $\Delta < 0$, *les ensembles* $\mathrm{Cl}(\Delta)$ *et* $\mathrm{Cl}(\Delta)^+$ *sont finis de cardinalités* h_Δ *et* h_Δ^+ *respectivement.*

Proposition

Soit $\langle a, b, c\rangle$ *une forme définie positive réduite. Alors,*

- $|b| \leq \sqrt{\Delta/3}$ *et* $b \equiv \Delta \pmod 2$,
- $a | (b^2 - \Delta)/4$,
- $|b| \leq a \leq (b^2 - \Delta)/(4a)$.

Corollaire

Pour $\Delta < 0$, *les ensembles* $\mathrm{Cl}(\Delta)$ *et* $\mathrm{Cl}(\Delta)^+$ *sont finis de cardinalités* h_Δ *et* h_Δ^+ *respectivement.*

Nous pouvons utiliser cette proposition, pour trouver toutes les formes quadratiques réduites définies positives.

Algorithme calculant toutes les formes quadratiques definies positives réduites de discriminant donné.

Soit
$$B = \{0 \leq b \leq \sqrt{|\Delta|/3}, b \equiv \Delta \pmod 2\},$$
et pour $b \in B$ posons
$$A_b = \{a \,|\, (b^2 - \Delta)/4, |b| \leq a \leq (b^2 - \Delta)/(4a)\}.$$
Alors,
$$h_\Delta^+ = \sum_{b \in B} \sum_{a \in A_b} n(a, b),$$
où
$$n(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 0 \text{ ou si } a \in \{b, (b^2 - \Delta)/4a\}, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple.

$\Delta = -264 = 4(-2 \cdot 3 \cdot 11)$

b	$(b^2 - \Delta)/4$	a	c
0	66	$1, 2, 3, 6$	$66, 33, 22, 11$
2	67		
4	70	$5, 7$	$14, 10$
6	75		
8	82		

Par conséquent $h_\Delta^+ = 8$, et

$$Cl(\Delta)^+ = \left\{ \begin{matrix} \langle 1, 0, 66 \rangle, & \langle 2, 0, 33 \rangle, & \langle 3, 0, 22 \rangle, & \langle 6, 0, 11 \rangle, \\ \langle 5, 4, 14 \rangle, & \langle 5, -4, 14 \rangle, & \langle 7, 4, 10 \rangle, & \langle 7, -4, 10 \rangle \end{matrix} \right\}.$$

Exemple.

$\Delta = -264 = 4(-2 \cdot 3 \cdot 11)$

b	$(b^2 - \Delta)/4$	a	c
0	66	$1, 2, 3, 6$	$66, 33, 22, 11$
2	67		
4	70	$5, 7$	$14, 10$
6	75		
8	82		

Par conséquent $h_\Delta^+ = 8$, et

$$Cl(\Delta)^+ = \left\{ \begin{array}{llll} \langle 1, 0, 66 \rangle, & \langle 2, 0, 33 \rangle, & \langle 3, 0, 22 \rangle, & \langle 6, 0, 11 \rangle, \\ \langle 5, 4, 14 \rangle, & \langle 5, -4, 14 \rangle, & \langle 7, 4, 10 \rangle, & \langle 7, -4, 10 \rangle \end{array} \right\}.$$

Nous avons $\langle a, -b, c \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \langle a, b, c \rangle$. Donc $\langle 5, 4, 14 \rangle \sim \langle 5, -4, 14 \rangle$, $\quad \langle 7, 4, 10 \rangle \sim \langle 7, -4, 10 \rangle$, et $h_\Delta = 6$.

Formes indéfinies

Définition

Une forme quadratique indéfinie $f = \langle a, b, c \rangle$ *est dite* réduite *si*

- $0 < b < \sqrt{\Delta}$,
- $\sqrt{\Delta} - b < 2|a| < \sqrt{\Delta} + b$.

Formes indéfinies

Définition

Une forme quadratique indéfinie $f = \langle a, b, c \rangle$ *est dite* réduite *si*

- $0 < b < \sqrt{\Delta}$,
- $\sqrt{\Delta} - b < 2|a| < \sqrt{\Delta} + b$.

Observations: Si $\langle a, b, c \rangle$ est réduite, $\langle c, b, a \rangle$ l'est aussi. En outre, $|a| < \sqrt{\Delta}$, $|c| < \sqrt{\Delta}$ et $ac < 0$. Remarquons que

$$(\sqrt{\Delta} - b)(\sqrt{\Delta} + b) = \Delta - b^2 = -4ac = 2|a| \cdot 2|c|$$

Formes indéfinies

Définition

Une forme quadratique indéfinie $f = \langle a, b, c \rangle$ est dite réduite *si*

- $0 < b < \sqrt{\Delta}$,
- $\sqrt{\Delta} - b < 2|a| < \sqrt{\Delta} + b$.

Observations: Si $\langle a, b, c \rangle$ est réduite, $\langle c, b, a \rangle$ l'est aussi. En outre, $|a| < \sqrt{\Delta}$, $|c| < \sqrt{\Delta}$ et $ac < 0$. Remarquons que

$$(\sqrt{\Delta} - b)(\sqrt{\Delta} + b) = \Delta - b^2 = -4ac = 2|a| \cdot 2|c|$$

Proposition

Si $|a| \leq |c|$ et $\sqrt{\Delta} - 2|a| < b < \sqrt{\Delta}$, alors $\langle a, b, c \rangle$ est réduite.

Proposition

Toute forme quadratique indéfinie f de discrminant Δ est proprement équivalente à une forme réduite de même discrminant.

Proposition

Toute forme quadratique indéfinie f de discrminant Δ est proprement équivalente à une forme réduite de même discrminant.

Démonstration: Si $\langle a, b, c \rangle$ n'est pas réduite, on chosit δ tel que $\sqrt{\Delta} - 2|c| < -b + 2c\delta < \sqrt{\Delta}$. Donc,

$$\langle c, -b + 2c\delta, a - b\delta + c\delta^2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix} \langle a, b, c \rangle$$

et si $|a - b\delta + c\delta^2| < |c|$ le processus est répété.

Corollaire

Pour $\Delta > 0$, $\mathrm{Cl}(\Delta)$ et $\mathrm{Cl}(\Delta)^+$ sont finis du cardinalité h_Δ et h_Δ^+ respectivement.

Exemple.

$\Delta = 316 = 4 \cdot 79$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a \rvert$	$\lvert c \rvert$
2	15, 77	19, 77		
4	13, 77	21, 77		
6	11, 77	23, 77	7, 10	10, 7
8	9, 77	25, 77	7, 9	9, 7
10	7, 77	27, 77	6, 9	9, 6
12	5, 77	29, 77		
14	3, 77	31, 77	2, 3, 5, 6, 10, 15	15, 10, 6, 5, 3, 2
16	1, 77	33, 77	1, 3, 5, 15	15, 5, 3, 1

Les formes réduites sont:

$$\begin{array}{cccc}
\langle \pm 7, 6, \mp 10 \rangle, & \langle \pm 10, 6, \mp 7 \rangle, & \langle \pm 7, 8, \mp 9 \rangle, & \langle \pm 9, 8, \mp 7 \rangle \\
\langle \pm 6, 10, \mp 9 \rangle, & \langle \pm 9, 10, \mp 6 \rangle, & \langle \pm 2, 14, \mp 15 \rangle, & \langle \pm 15, 14, \mp 2 \rangle, \\
\langle \pm 3, 14, \mp 10 \rangle, & \langle \pm 10, 14, \mp 3 \rangle, & \langle \pm 5, 14, \mp 6 \rangle, & \langle \pm 6, 15, \mp 5 \rangle, \\
\langle \pm 1, 16, \mp 15 \rangle, & \langle \pm 15, 16, \mp 1 \rangle, & \langle \pm 3, 16, \mp 5 \rangle, & \langle \pm 5, 16, \mp 3 \rangle
\end{array}$$

Définition

Les formes $\langle a, b, a' \rangle$ *et* $\langle a', b', c' \rangle$ *sont dites* adjacentes par la droite *si* $b + b' \equiv 0 \pmod{2a'}$. *Les formes* $\langle c', b, c \rangle$ *et* $\langle a', b', c' \rangle$ *sont dites* adjacentes par la gauche *si* $b + b' \equiv 0 \pmod{2c'}$.

Proposition

Soit $f = \langle a, b, c \rangle$ *une forme quadratique indéfinie réduite. Alors, il existe une forme équivalente à* f *adjacente par la droite et une autre forme équivalente à* f *et adjacente par la gauche.*

Démonstration: Nous considérons $b + b' \equiv 0 \pmod{2ac}$, et les matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(b+b')/2c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -(b+b')/2a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition

Les formes $\langle a, b, a' \rangle$ *et* $\langle a', b', c' \rangle$ *sont dites* adjacentes par la droite *si* $b + b' \equiv 0 \pmod{2a'}$. *Les formes* $\langle c', b, c \rangle$ *et* $\langle a', b', c' \rangle$ *sont dites* adjacentes par la gauche *si* $b + b' \equiv 0 \pmod{2c'}$.

Proposition

Soit $f = \langle a, b, c \rangle$ *une forme quadratique indéfinie réduite. Alors, il existe une forme équivalente à* f *adjacente par la droite et une autre forme équivalente à* f *et adjacente par la gauche.*

Démonstration: Nous considérons $b + b' \equiv 0 \pmod{2ac}$, et les matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(b+b')/2c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -(b+b')/2a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Observation: L'esemble des formes quadratiques réduites de discriminant $\Delta > 0$ peut être partionné en cycles de formes adjacentes par la droite (ou par la gauche).

Théorème

Soit f et f' deux formes quadratiques indéfinies réduites. Alors, $f \approx f' \iff$ toutes les deux appartiennent au même cycle.

Une implication est déjà démontrée. Pour l'autre nous avons besoin des nombres quadratiques.