Formes quadratiques
(Leçon 2)

Jorge Jiménez Urroz
(Universitat Politècnica de Catalunya)

École Cimpa, Bamako, Novembre 2010

Nombres quadratiques

Définition

Un nombre quadratique *est un nombre* α *de la forme* $x + y\sqrt{\Delta}$ *où* Δ *n'est pas un carré parfait de* $\mathbb{Q}$ *et où* $x, y \in \mathbb{Q}$. *Le* conjugué *de* α *est* $\alpha' = x - y\sqrt{\Delta}$.

Un nombre quadratique est donc un nombre qui est solution d'un polynôme irréductible de degré deux. Dans ce qui suit, Δ n'est pas un carré parfait.

Nombres quadratiques

Définition

Un nombre quadratique *est un nombre* α *de la forme* $x + y\sqrt{\Delta}$ *où* Δ *n'est pas un carré parfait de* $\mathbb{Q}$ *et où* $x, y \in \mathbb{Q}$. *Le* conjugué *de* α *est* $\alpha' = x - y\sqrt{\Delta}$.

Un nombre quadratique est donc un nombre qui est solution d'un polynôme irréductible de degré deux. Dans ce qui suit, Δ n'est pas un carré parfait.

Définition

Soit $\Delta > 0$. *Un nombre quadratique* α *est* réduit *si* $\alpha > 1$ *et* $-1 < \alpha' < 0$.

Définition

Soit $f = \langle a, b, c\rangle$ *de discriminant* $\Delta > 0$. *Alors, on asssocie à* f *les nombres réels*

$$\omega_1 = \frac{b + \Delta}{2|a|} \quad \textit{et} \quad \omega_2 = \frac{b + \Delta}{2|c|}.$$

Définition

Soit $f = \langle a, b, c \rangle$ *de discriminant* $\Delta > 0$. *Alors, on asssocie à* f *les nombres réels*

$$\omega_1 = \frac{b + \Delta}{2|a|} \quad et \quad \omega_2 = \frac{b + \Delta}{2|c|}.$$

Observation: f est réduite si et seulement si ω_1 et ω_2 sont réduits.

Définition

Soit $f = \langle a, b, c \rangle$ de discriminant $\Delta > 0$. Alors, on asssocie à f les nombres réels

$$\omega_1 = \frac{b + \Delta}{2|a|} \quad \textit{et} \quad \omega_2 = \frac{b + \Delta}{2|c|}.$$

Observation: f est réduite si et seulement si ω_1 et ω_2 sont réduits.

Définition

Soit $\{a_i\}_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Une fraction continue α *est une expression de la forme* $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$

Définition

Les a_i *sont dits les* quotients partiels *de la fraction continue* α. *Si* $a_0 \in \mathbb{Z}$ *et* $a_i \in \mathbb{N}$, *pour* $i > 0$, *alors la fraction continue est dite simple.*

Définition

Les a_i sont dits les quotients partiels *de la fraction continue α. Si $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_i \in \mathbb{N}$, pour $i > 0$, alors la fraction continue est dite simple.*

Proposition

Soit α une fraction continue. Alors, le développement de α est infini si et seulement si α est irrationnel.

Démonstration: Soit $\alpha = a_0 + x_1$, avec $a_0 = [\alpha]$. Pour $i \geq 1$,

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i = 0, \\ \left[\frac{1}{x_i}\right] & \text{si } x_i \neq 0, \end{cases}$$

et $x_{i+1} = \frac{1}{x_i} - a_i$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors $x_i = \frac{p_i}{q_i}$ et $0 < q_i < q_{i-1}$.

Définition

Soit $\alpha = [a_0, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, \ldots, a_{k+l}}]$. *La barre horizontale veut dire que la suite des éléments se répète indéfiniment. De plus,* $a_0, \ldots, a_{k-1}$ *et* $a_k, \ldots, a_{k+l}$ *sont respectivement appelés la* prépériode *et la* période *de* α.

Si α est un nombre quadratique associé à une forme quadratique indéfinie de discriminant fondamental $\Delta > 0$, alors il existe $P_0, Q_0 \in \mathbb{Z}$, tels que

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{P_0 + \sqrt{\Delta}}{2Q_0} \quad \text{avec} \quad 4Q_0 | (\Delta - P_0^2).$$

En ce cas $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ où pour $i \geq 0$,

- $\alpha_i = \frac{P_i + \sqrt{\Delta}}{2Q_i}$,
- $a_i = [\alpha_i]$,
- $P_{i+1} = 2a_i Q_i - P_i$,
- $Q_{i+1} = \frac{\Delta - P_{i+1}^2}{4Q_i}$.

$$
\begin{aligned}
\alpha &= a_0 + \frac{P_0 - 2a_0Q_0 + \sqrt{\Delta}}{2Q_0} \\
&= a_0 + \frac{1}{\frac{2Q_0}{P_0 - 2a_0Q_0 + \sqrt{\Delta}}} \\
&= a_0 + \frac{1}{\frac{2Q_0(\sqrt{\Delta} - (P_0 - 2a_0Q_0))}{\Delta - (P_0 - 2a_0Q_0)^2}} \\
&= a_0 + \frac{1}{\frac{\sqrt{\Delta} + 2a_0Q_0 - P_0}{2(\Delta - (P_0 - 2a_0Q_0)^2)/4Q_0}} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Exemples

(1) Avec $\Delta = 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2$ et $\alpha_0 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}$, nous avons:

.

Exemples

(1) Avec $\Delta = 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2$ et $\alpha_0 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}$, nous avons:

- $\alpha_i = \frac{P_i+\sqrt{\Delta}}{2Q_i}$,
- $a_i = [\alpha_i]$,
- $P_{i+1} = 2a_iQ_i - P_i$,
- $Q_{i+1} = \frac{\Delta-P_{i+1}^2}{4Q_i}$.

Exemples

(1) Avec $\Delta = 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2$ et $\alpha_0 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}$, nous avons:

- $\alpha_i = \frac{P_i+\sqrt{\Delta}}{2Q_i}$,
- $a_i = [\alpha_i]$,
- $P_{i+1} = 2a_iQ_i - P_i$,
- $Q_{i+1} = \frac{\Delta - P_{i+1}^2}{4Q_i}$.

$1 < \alpha_0 < 2, \quad a_0 = 1, \quad P_0 = 4, \quad Q_0 = 3;$
$P_1 = 2, \quad Q_1 = 3; \quad 1 < \alpha_1 = \frac{2+\sqrt{40}}{6} < 2, \quad a_1 = 1;$
$P_2 = 4 \quad Q_2 = 2, \quad 2 < \alpha_2 = \frac{4+\sqrt{40}}{4} < 3, \quad a_2 = 2;$
$P_3 = 4, \quad Q_3 = 3, \quad \alpha_3 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}.$

Exemples

(1) Avec $\Delta = 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2$ et $\alpha_0 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}$, nous avons:

- $\alpha_i = \frac{P_i+\sqrt{\Delta}}{2Q_i}$,
- $a_i = [\alpha_i]$,
- $P_{i+1} = 2a_iQ_i - P_i$,
- $Q_{i+1} = \frac{\Delta - P_{i+1}^2}{4Q_i}$.

$1 < \alpha_0 < 2, \quad a_0 = 1, \quad P_0 = 4, \quad Q_0 = 3;$
$P_1 = 2, \quad Q_1 = 3; \quad 1 < \alpha_1 = \frac{2+\sqrt{40}}{6} < 2, \quad a_1 = 1;$
$P_2 = 4 \quad Q_2 = 2, \quad 2 < \alpha_2 = \frac{4+\sqrt{40}}{4} < 3, \quad a_2 = 2;$
$P_3 = 4, \quad Q_3 = 3, \quad \alpha_3 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}.$

i	0	1	2	...
P_i	4	2	4	...
Q_i	3	3	2	...
a_i	1	1	2	...

Donc, $\alpha_0 = [\overline{1, 1, 2}]$.

Avec $\Delta = 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2$ et $\beta_0 = \frac{6+\sqrt{40}}{2}$, nous avons:

Avec $\Delta = 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2$ et $\beta_0 = \frac{6+\sqrt{40}}{2}$, nous avons:

- $\alpha_i = \frac{P_i+\sqrt{\Delta}}{2Q_i}$,
- $a_i = [\alpha_i]$,
- $P_{i+1} = 2a_iQ_i - P_i$,
- $Q_{i+1} = \frac{\Delta - P_{i+1}^2}{4Q_i}$.

$6 < \beta_0 < 7, \quad a_0 = 6,\ P_0 = 6,\ Q_0 = 1;$
$P_1 = 6,\ Q_1 = 1,\ \beta_1 = \frac{6+\sqrt{40}}{2}.$

Avec $\Delta = 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2$ et $\beta_0 = \frac{6+\sqrt{40}}{2}$, nous avons:

- $\alpha_i = \frac{P_i+\sqrt{\Delta}}{2Q_i}$,
- $a_i = [\alpha_i]$,
- $P_{i+1} = 2a_iQ_i - P_i$,
- $Q_{i+1} = \frac{\Delta - P_{i+1}^2}{4Q_i}$.

$6 < \beta_0 < 7, \quad a_0 = 6,\ P_0 = 6,\ Q_0 = 1;$
$P_1 = 6,\ Q_1 = 1,\ \beta_1 = \frac{6+\sqrt{40}}{2}$.

i	0	...
P_i	6	...
Q_i	1	...
a_i	6	...

Donc, $\beta_0 = [\overline{6}]$.

Formes réduites de discriminant $\Delta = 40$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a\rvert$	$\lvert c\rvert$
2	$4,32$	$8,32$	3	3
4	$2,32$	$10,32$	$3,2$	$2,3$
6	$0,32$	$12,32$	1	1

Formes réduites de discriminant $\Delta = 40$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a \rvert$	$\lvert c \rvert$
2	4, 32	8, 32	3	3
4	2, 32	10, 32	3, 2	2, 3
6	0, 32	12, 32	1	1

Les formes réduites de discriminant 40 sont:

$$\langle \pm 3, 2, \mp 3 \rangle, \quad \langle \pm 3, 4, \mp 2 \rangle, \quad \langle \pm 2, 4, \mp 3 \rangle, \quad \langle \pm 1, 6, \mp 1 \rangle.$$

Formes réduites de discriminant $\Delta = 40$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a\rvert$	$\lvert c\rvert$
2	4, 32	8, 32	3	3
4	2, 32	10, 32	3, 2	2, 3
6	0, 32	12, 32	1	1

Les formes réduites de discriminant 40 sont:

$$\langle \pm 3, 2, \mp 3\rangle, \quad \langle \pm 3, 4, \mp 2\rangle, \quad \langle \pm 2, 4, \mp 3\rangle, \quad \langle \pm 1, 6, \mp 1\rangle.$$

$$f_1 = \langle 3, 2, -3\rangle \to \langle -3, 4, 2\rangle \to \langle 2, 4, -3\rangle \to \langle -3, 2, 3\rangle \to$$
$$\to \langle 3, 4, -2\rangle \to \langle -2, 4, 3\rangle \to f_1.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Formes réduites de discriminant $\Delta = 40$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a\rvert$	$\lvert c\rvert$
2	4,32	8,32	3	3
4	2,32	10,32	3,2	2,3
6	0,32	12,32	1	1

Les formes réduites de discriminant 40 sont:

$$\langle \pm 3, 2, \mp 3\rangle, \quad \langle \pm 3, 4, \mp 2\rangle, \quad \langle \pm 2, 4, \mp 3\rangle, \quad \langle \pm 1, 6, \mp 1\rangle.$$

$$f_1 = \langle 3, 2, -3\rangle \to \langle -3, 4, 2\rangle \to \langle 2, 4, -3\rangle \to \langle -3, 2, 3\rangle \to$$
$$\to \langle 3, 4, -2\rangle \to \langle -2, 4, 3\rangle \to f_1.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\omega_2(f_1) = \frac{2+\sqrt{40}}{6} = [\overline{1, 2, 1}]$$

$$f_2 = \langle 1, 6, -1 \rangle \to \langle -1, 6, 1 \rangle \to f_2$$

.

$$f_2 = \langle 1, 6, -1 \rangle \to \langle -1, 6, 1 \rangle \to f_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

.

$$f_2 = \langle 1, 6, -1 \rangle \to \langle -1, 6, 1 \rangle \to f_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

$\omega_2(f_2) = \frac{4+\sqrt{40}}{4} = [\overline{6}]$.

$$f_2 = \langle 1, 6, -1 \rangle \to \langle -1, 6, 1 \rangle \to f_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

$\omega_2(f_2) = \frac{4+\sqrt{40}}{4} = [\overline{6}]$.

$h^+_\Delta = 2$.

(2) $\Delta = 60 = 4 \cdot 15$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a \rvert$	$\lvert c \rvert$
2	$5,74$	$9,74$		
4	$3,74$	$11,74$		
6	$1,74$	$13,74$	$1,2,3,6$	$6,3,2,1$

(2) $\Delta = 60 = 4 \cdot 15$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a\rvert$	$\lvert c\rvert$
2	$5,74$	$9,74$		
4	$3,74$	$11,74$		
6	$1,74$	$13,74$	$1,2,3,6$	$6,3,2,1$

Les formes réduites de discriminant 60 sont:

$$\langle \pm 1, 6, \mp 6\rangle, \quad \langle \pm 2, 6, \mp 3\rangle, \quad \langle \pm 3, 6, \mp 2\rangle, \quad \langle \pm 6, 6, \mp 1\rangle.$$

(2) $\Delta = 60 = 4 \cdot 15$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a \rvert$	$\lvert c \rvert$
2	$5,74$	$9,74$		
4	$3,74$	$11,74$		
6	$1,74$	$13,74$	$1,2,3,6$	$6,3,2,1$

Les formes réduites de discriminant 60 sont:

$$\langle \pm 1, 6, \mp 6\rangle, \quad \langle \pm 2, 6, \mp 3\rangle, \quad \langle \pm 3, 6, \mp 2\rangle, \quad \langle \pm 6, 6, \mp 1\rangle.$$

$$\frac{6+\sqrt{60}}{12} = [\overline{1,6}], \qquad \frac{6+\sqrt{60}}{6} = [\overline{2,3}],$$

$$\frac{6+\sqrt{60}}{4} = [\overline{3,2}], \qquad \frac{6+\sqrt{60}}{2} = [\overline{6,1}].$$

- $\frac{6+\sqrt{60}}{12} = [\overline{1,6}]$

$$\langle 1,6,-6\rangle \to \langle -6,6,1\rangle \to \langle 1,6,-6\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\langle -1,6,6\rangle \to \langle 6,6,-1\rangle \to \langle -1,6,6\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- $\frac{6+\sqrt{60}}{6} = [\overline{2,3}]$

$$\langle 2,6,-3\rangle \to \langle -3,6,2\rangle \to \langle 2,6,-3\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\langle -2,6,3\rangle \to \langle 3,6,-2\rangle \to \langle -2,6,3\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) Soit $\Delta = 145 = 5 \cdot 29$. Les formes réduites sont:

$$\langle \pm 6, 1, \mp 6\rangle, \quad \langle \pm 5, 5, \mp 6\rangle, \quad \langle \pm 6, 5, \mp 5\rangle, \quad \langle \pm 3, 7, \mp 8\rangle,$$
$$\langle \pm 4, 7, \mp 6\rangle, \quad \langle \pm 6, 7, \mp 4\rangle, \quad \langle \pm 8, 7, \mp 3\rangle, \quad \langle \pm 2, 9, \mp 8\rangle,$$
$$\langle \pm 4, 9, \mp 4\rangle, \quad \langle \pm 8, 9, \mp 2\rangle, \quad \langle \pm 1, 11, \mp 6\rangle, \quad \langle \pm 2, 11, \mp 3\rangle,$$
$$\langle \pm 3, 11, \mp 2\rangle, \quad \langle \pm 6, 11, \mp 1\rangle.$$

(3) Soit $\Delta = 145 = 5 \cdot 29$. Les formes réduites sont:

$$\langle \pm 6, 1, \mp 6 \rangle, \quad \langle \pm 5, 5, \mp 6 \rangle, \quad \langle \pm 6, 5, \mp 5 \rangle, \quad \langle \pm 3, 7, \mp 8 \rangle,$$
$$\langle \pm 4, 7, \mp 6 \rangle, \quad \langle \pm 6, 7, \mp 4 \rangle, \quad \langle \pm 8, 7, \mp 3 \rangle, \quad \langle \pm 2, 9, \mp 8 \rangle,$$
$$\langle \pm 4, 9, \mp 4 \rangle, \quad \langle \pm 8, 9, \mp 2 \rangle, \quad \langle \pm 1, 11, \mp 6 \rangle, \quad \langle \pm 2, 11, \mp 3 \rangle,$$
$$\langle \pm 3, 11, \mp 2 \rangle, \quad \langle \pm 6, 11, \mp 1 \rangle.$$

$f_1 = \langle 6, 1, -6 \rangle, \quad \omega_2(f_1) = \frac{1+\sqrt{145}}{12} = [\overline{1, 11, 1}]$

$\langle 6, 1, -6 \rangle \to \langle -6, 11, 1 \rangle \to \langle 1, 11, -6 \rangle \to \langle -6, 1, 6 \rangle \to$
$\langle 6, 11, -1 \rangle \to \langle -1, 11, 6 \rangle \to f_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$f_2 = \langle 5, 5, -6 \rangle \quad \omega_2(f_2) = \frac{5+\sqrt{145}}{12} = [\overline{1, 2, 2, 1, 1}]$

$\langle 5, 5, -6 \rangle \to \langle -6, 7, 4 \rangle \to \langle 4, 9, -4 \rangle \to \langle -4, 7, 6 \rangle \to$
$\langle 6, 5, -5 \rangle \to \langle -5, 5, 6 \rangle \to \langle 6, 7, -4 \rangle \to \langle -4, 9, 4 \rangle \to$
$\langle 4, 7, -6 \rangle \to \langle -6, 5, 5 \rangle \to f_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$f_3 = \langle 3, 7, -8 \rangle \quad \omega_2(f_3) = \frac{7+\sqrt{145}}{16} = [\overline{1, 5, 3}]$

$\langle 3, 7, -8 \rangle \to \langle -8, 9, 2 \rangle \to \langle 2, 11, -3 \rangle \to \langle -3, 7, 8 \rangle \to \langle 8, 9, -2 \rangle \to \langle -2, 11, 3 \rangle \to f_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$f_4 = \langle 8, 7, -3 \rangle \quad \omega_2(f_4) = \frac{7+\sqrt{145}}{6} = [\overline{3, 5, 1}]$

$\langle 8, 7, -3 \rangle \to \langle -3, 11, 2 \rangle \to \langle 2, 9, -8 \rangle \to \langle -8, 7, 3 \rangle \to \langle 3, 11, -2 \rangle \to \langle -2, 9, 8 \rangle \to f_4.$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Algorithme calculant le cycle des formes réduites proprement équivalentes à une forme quadratique donnée.

Soit $f_0 = \langle a_0, b_0, c_0 \rangle$ une forme quadratique de discriminant $\Delta > 0$. Alors, $\alpha_0 = \frac{b_0 + \Delta}{2|c_0|} = [\overline{u_0, \ldots u_{l-1}}]$ et le cycle des formes réduites proprement équivalentes a f_0 est formé des formes réduites $f_0 \ldots f_{r-1}$ où

$$r = \begin{cases} l & \text{si } l \text{ est pair,} \\ 2l & \text{si } l \text{ est impair.} \end{cases}$$

Pour $0 \leq i \leq r-2$,

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= \langle a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1} \rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \text{signe}(a_i) u_i \end{pmatrix} f_i \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \text{signe}(a_i) u_i \end{pmatrix} f_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\text{signe}(c_i) u_i \end{pmatrix} f_i \\ &= \langle (-1)^i \text{signe}(c_0) Q_i, P_{i+1}, (-1)^{i+1} \text{signe}(c_0) Q_{i+1} \rangle. \end{aligned}$$

Observation: Si l est impair, alors $f_l = \langle -a_0, b_0, -c_0 \rangle$.

Théorème

Deux formes quadratiques réduites de discriminant $\Delta > 0$ sont proprement équivalentes si et seulement si elles appartiemment au même cycle.

L'idée de la démonstration est d'observer que si $f \approx g$, alors $\omega_2(g)$ est un nombre réduit associé à une forme quadratique du cycle de f; par conséquent, f et g sont dans le même cycle.