Formes quadratiques
(Leçon 2)

Jorge Jiménez Urroz
(Universitat Politècnica de Catalunya)

École Cimpa, Bamako, Novembre 2010

Nombres quadratiques

Définition

Un nombre quadratique *est un nombre α de la forme $x + y\sqrt{\Delta}$ où Δ n'est pas un carré parfait de $\mathbb{Q}$ et où $x, y \in \mathbb{Q}$. Le* conjugué *de α est $\alpha' = x - y\sqrt{\Delta}$.*

Un nombre quadratique est donc un nombre qui est solution d'un polynôme irréductible de degré deux. Dans ce qui suit, Δ n'est pas un carré parfait.

Définition

Soit $\Delta > 0$. Un nombre quadratique α est réduit *si $\alpha > 1$ et $-1 < \alpha' < 0$.*

Définition

Les a_i sont dits les quotients partiels *de la fraction continue α. Si $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_i \in \mathbb{N}$, pour $i > 0$, alors la fraction continue est dite simple.*

Proposition

Soit α une fraction continue. Alors, le développement de α est infini si et seulement si α est irrationnel.

Démonstration: Soit $\alpha = a_0 + x_1$, avec $a_0 = [\alpha]$. Pour $i \geq 1$,

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i = 0, \\ \left[\frac{1}{x_i}\right] & \text{si } x_i \neq 0, \end{cases}$$

et $x_{i+1} = \frac{1}{x_i} - a_i$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors $x_i = \frac{p_i}{q_i}$ et $0 < q_i < q_{i-1}$.

Définition

Soit $\alpha = [a_0, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, \dots, a_{k+l}}]$. La barre horizontale veut dire que la suite des éléments se répète indéfiniment. De plus, $a_0, \dots, a_{k-1}$ et $a_k, \dots, a_{k+l}$ sont respectivement appelés la prépériode *et la* période *de α.*

Si α est un nombre quadratique associé à une forme quadratique indéfinie de discriminant fondamental $\Delta > 0$, alors il existe $P_0, Q_0 \in \mathbb{Z}$, tels que

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{P_0 + \sqrt{\Delta}}{2Q_0} \quad \text{avec} \quad 4Q_0 | (\Delta - P_0^2).$$

En ce cas $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ où pour $i \geq 0$,

- $\alpha_i = \frac{P_i + \sqrt{\Delta}}{2Q_i}$,
- $a_i = [\alpha_i]$,
- $P_{i+1} = 2a_i Q_i - P_i$,
- $Q_{i+1} = \frac{\Delta - P_{i+1}^2}{4Q_i}$.

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_0 + \frac{P_0 - 2a_0 Q_0 + \sqrt{\Delta}}{2Q_0} \\
&= a_0 + \frac{1}{\frac{2Q_0}{P_0 - 2a_0 Q_0 + \sqrt{\Delta}}} \\
&= a_0 + \frac{1}{\frac{2Q_0(\sqrt{\Delta} - (P_0 - 2a_0 Q_0))}{\Delta - (P_0 - 2a_0 Q_0)^2}} \\
&= a_0 + \frac{1}{\frac{\sqrt{\Delta} + 2a_0 Q_0 - P_0}{2(\Delta - (P_0 - 2a_0 Q_0)^2)/4Q_0}} \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

Exemples

(1) Avec $\Delta = 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2$ et $\alpha_0 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}$, nous avons:

- $\alpha_i = \frac{P_i + \sqrt{\Delta}}{2Q_i}$,
- $a_i = [\alpha_i]$,
- $P_{i+1} = 2a_i Q_i - P_i$,
- $Q_{i+1} = \frac{\Delta - P_{i+1}^2}{4Q_i}$.

$1 < \alpha_0 < 2, \quad a_0 = 1, \quad P_0 = 4, \quad Q_0 = 3;$
$P_1 = 2, \quad Q_1 = 3; \quad 1 < \alpha_1 = \frac{2+\sqrt{40}}{6} < 2, \quad a_1 = 1;$
$P_2 = 4 \quad Q_2 = 2, \quad 2 < \alpha_2 = \frac{4+\sqrt{40}}{4} < 3, \quad a_2 = 2;$
$P_3 = 4, \quad Q_3 = 3, \quad \alpha_3 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}.$

Exemples

(1) Avec $\Delta = 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2$ et $\alpha_0 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}$, nous avons:

- $\alpha_i = \frac{P_i + \sqrt{\Delta}}{2Q_i}$,
- $a_i = [\alpha_i]$,
- $P_{i+1} = 2a_i Q_i - P_i$,
- $Q_{i+1} = \frac{\Delta - P_{i+1}^2}{4Q_i}$.

$1 < \alpha_0 < 2, \quad a_0 = 1, \quad P_0 = 4, \quad Q_0 = 3;$
$P_1 = 2, \quad Q_1 = 3; \quad 1 < \alpha_1 = \frac{2+\sqrt{40}}{6} < 2, \quad a_1 = 1;$
$P_2 = 4 \quad Q_2 = 2, \quad 2 < \alpha_2 = \frac{4+\sqrt{40}}{4} < 3, \quad a_2 = 2;$
$P_3 = 4, \quad Q_3 = 3, \quad \alpha_3 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}.$

Exemples

(1) Avec $\Delta = 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2$ et $\alpha_0 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}$, nous avons:

- $\alpha_i = \frac{P_i + \sqrt{\Delta}}{2Q_i}$,
- $a_i = [\alpha_i]$,
- $P_{i+1} = 2a_iQ_i - P_i$,
- $Q_{i+1} = \frac{\Delta - P_{i+1}^2}{4Q_i}$.

$1 < \alpha_0 < 2$, $a_0 = 1$, $P_0 = 4$, $Q_0 = 3$;
$P_1 = 2$, $Q_1 = 3$; $1 < \alpha_1 = \frac{2+\sqrt{40}}{6} < 2$, $a_1 = 1$;
$P_2 = 4$ $Q_2 = 2$, $2 < \alpha_2 = \frac{4+\sqrt{40}}{4} < 3$, $a_2 = 2$;
$P_3 = 4$, $Q_3 = 3$, $\alpha_3 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}$.

.

Exemples

(1) Avec $\Delta = 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2$ et $\alpha_0 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}$, nous avons:

- $\alpha_i = \frac{P_i + \sqrt{\Delta}}{2Q_i}$,
- $a_i = [\alpha_i]$,
- $P_{i+1} = 2a_iQ_i - P_i$,
- $Q_{i+1} = \frac{\Delta - P_{i+1}^2}{4Q_i}$.

$1 < \alpha_0 < 2$, $a_0 = 1$, $P_0 = 4$, $Q_0 = 3$;
$P_1 = 2$, $Q_1 = 3$; $1 < \alpha_1 = \frac{2+\sqrt{40}}{6} < 2$, $a_1 = 1$;
$P_2 = 4$ $Q_2 = 2$, $2 < \alpha_2 = \frac{4+\sqrt{40}}{4} < 3$, $a_2 = 2$;
$P_3 = 4$, $Q_3 = 3$, $\alpha_3 = \frac{4+\sqrt{40}}{6}$.

i	0	1	2	...
P_i	4	2	4	...
Q_i	3	3	2	...
a_i	1	1	2	...

Donc, $\alpha_0 = [\overline{1, 1, 2}]$.

Avec $\Delta = 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2$ et $\beta_0 = \frac{6+\sqrt{40}}{2}$, nous avons:

- $\alpha_i = \frac{P_i + \sqrt{\Delta}}{2Q_i}$,
- $a_i = [\alpha_i]$,
- $P_{i+1} = 2a_iQ_i - P_i$,
- $Q_{i+1} = \frac{\Delta - P_{i+1}^2}{4Q_i}$.

$6 < \beta_0 < 7$, $a_0 = 6$, $P_0 = 6$, $Q_0 = 1$;
$P_1 = 6$, $Q_1 = 1$, $\beta_1 = \frac{6+\sqrt{40}}{2}$.

i	0	...
P_i	6	...
Q_i	1	...
a_i	6	...

Donc, $\beta_0 = [\overline{6}]$.

Formes réduites de discriminant $\Delta = 40$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a \rvert$	$\lvert c \rvert$
2	4, 32	8, 32	3	3
4	2, 32	10, 32	3, 2	2, 3
6	0, 32	12, 32	1	1

Les formes réduites de discriminant 40 sont:
$\langle \pm 3, 2, \mp 3 \rangle$, $\langle \pm 3, 4, \mp 2 \rangle$, $\langle \pm 2, 4, \mp 3 \rangle$, $\langle \pm 1, 6, \mp 1 \rangle$.

$$f_1 = \langle 3, 2, -3 \rangle \to \langle -3, 4, 2 \rangle \to \langle 2, 4, -3 \rangle \to \langle -3, 2, 3 \rangle \to$$
$$\to \langle 3, 4, -2 \rangle \to \langle -2, 4, 3 \rangle \to f_1.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Formes réduites de discriminant $\Delta = 40$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a \rvert$	$\lvert c \rvert$
2	4,32	8,32	3	3
4	2,32	10,32	3,2	2,3
6	0,32	12,32	1	1

Les formes réduites de discriminant 40 sont:

$\langle \pm 3, 2, \mp 3 \rangle, \quad \langle \pm 3, 4, \mp 2 \rangle, \quad \langle \pm 2, 4, \mp 3 \rangle, \quad \langle \pm 1, 6, \mp 1 \rangle.$

$$f_1 = \langle 3, 2, -3 \rangle \to \langle -3, 4, 2 \rangle \to \langle 2, 4, -3 \rangle \to \langle -3, 2, 3 \rangle \to \\ \to \langle 3, 4, -2 \rangle \to \langle -2, 4, 3 \rangle \to f_1.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Formes réduites de discriminant $\Delta = 40$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a \rvert$	$\lvert c \rvert$
2	4,32	8,32	3	3
4	2,32	10,32	3,2	2,3
6	0,32	12,32	1	1

Les formes réduites de discriminant 40 sont:

$\langle \pm 3, 2, \mp 3 \rangle, \quad \langle \pm 3, 4, \mp 2 \rangle, \quad \langle \pm 2, 4, \mp 3 \rangle, \quad \langle \pm 1, 6, \mp 1 \rangle.$

$$f_1 = \langle 3, 2, -3 \rangle \to \langle -3, 4, 2 \rangle \to \langle 2, 4, -3 \rangle \to \langle -3, 2, 3 \rangle \to \\ \to \langle 3, 4, -2 \rangle \to \langle -2, 4, 3 \rangle \to f_1.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Formes réduites de discriminant $\Delta = 40$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a \rvert$	$\lvert c \rvert$
2	4,32	8,32	3	3
4	2,32	10,32	3,2	2,3
6	0,32	12,32	1	1

Les formes réduites de discriminant 40 sont:

$\langle \pm 3, 2, \mp 3 \rangle, \quad \langle \pm 3, 4, \mp 2 \rangle, \quad \langle \pm 2, 4, \mp 3 \rangle, \quad \langle \pm 1, 6, \mp 1 \rangle.$

$$f_1 = \langle 3, 2, -3 \rangle \to \langle -3, 4, 2 \rangle \to \langle 2, 4, -3 \rangle \to \langle -3, 2, 3 \rangle \to \\ \to \langle 3, 4, -2 \rangle \to \langle -2, 4, 3 \rangle \to f_1.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\omega_2(f_1) = \frac{2+\sqrt{40}}{6} = [\overline{1, 2, 1}]$

$$f_2 = \langle 1, 6, -1 \rangle \to \langle -1, 6, 1 \rangle \to f_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

$\omega_2(f_2) = \frac{4+\sqrt{40}}{4} = [\overline{6}].$

$$f_2 = \langle 1, 6, -1 \rangle \to \langle -1, 6, 1 \rangle \to f_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

$\omega_2(f_2) = \frac{4+\sqrt{40}}{4} = [\overline{6}]$.

$$f_2 = \langle 1, 6, -1 \rangle \to \langle -1, 6, 1 \rangle \to f_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

$\omega_2(f_2) = \frac{4+\sqrt{40}}{4} = [\overline{6}]$.

$$f_2 = \langle 1, 6, -1 \rangle \to \langle -1, 6, 1 \rangle \to f_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

$\omega_2(f_2) = \frac{4+\sqrt{40}}{4} = [\overline{6}]$.

$h^+_\Delta = 2$.

(2) $\Delta = 60 = 4 \cdot 15$

b	$\sqrt{\Delta} - b$	$\sqrt{\Delta} + b$	$\lvert a \rvert$	$\lvert c \rvert$
2	$5,74$	$9,74$		
4	$3,74$	$11,74$		
6	$1,74$	$13,74$	$1,2,3,6$	$6,3,2,1$

Les formes réduites de discriminant 60 sont:

$\langle \pm 1, 6, \mp 6 \rangle, \quad \langle \pm 2, 6, \mp 3 \rangle, \quad \langle \pm 3, 6, \mp 2 \rangle, \quad \langle \pm 6, 6, \mp 1 \rangle.$

$\frac{6+\sqrt{60}}{12} = [\overline{1,6}], \qquad \frac{6+\sqrt{60}}{6} = [\overline{2,3}],$

$\frac{6+\sqrt{60}}{4} = [\overline{3,2}], \qquad \frac{6+\sqrt{60}}{2} = [\overline{6,1}].$

• $\frac{6+\sqrt{60}}{12} = [\overline{1,6}]$

$$\langle 1,6,-6\rangle \to \langle -6,6,1\rangle \to \langle 1,6,-6\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\langle -1,6,6\rangle \to \langle 6,6,-1\rangle \to \langle -1,6,6\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

• $\frac{6+\sqrt{60}}{6} = [\overline{2,3}]$

$$\langle 2,6,-3\rangle \to \langle -3,6,2\rangle \to \langle 2,6,-3\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\langle -2,6,3\rangle \to \langle 3,6,-2\rangle \to \langle -2,6,3\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) Soit $\Delta = 145 = 5 \cdot 29$. Les formes réduites sont:

$$\langle \pm 6,1,\mp 6\rangle, \quad \langle \pm 5,5,\mp 6\rangle, \quad \langle \pm 6,5,\mp 5\rangle, \quad \langle \pm 3,7,\mp 8\rangle,$$
$$\langle \pm 4,7,\mp 6\rangle, \quad \langle \pm 6,7,\mp 4\rangle, \quad \langle \pm 8,7,\mp 3\rangle, \quad \langle \pm 2,9,\mp 8\rangle,$$
$$\langle \pm 4,9,\mp 4\rangle, \quad \langle \pm 8,9,\mp 2\rangle, \quad \langle \pm 1,11,\mp 6\rangle, \quad \langle \pm 2,11,\mp 3\rangle,$$
$$\langle \pm 3,11,\mp 2\rangle, \quad \langle \pm 6,11,\mp 1\rangle.$$

$f_1 = \langle 6,1,-6\rangle, \quad \omega_2(f_1) = \frac{1+\sqrt{145}}{12} = [\overline{1,11,1}]$

$\langle 6,1,-6\rangle \to \langle -6,11,1\rangle \to \langle 1,11,-6\rangle \to \langle -6,1,6\rangle \to$
$\langle 6,11,-1\rangle \to \langle -1,11,6\rangle \to f_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$f_2 = \langle 5,5,-6\rangle \quad \omega_2(f_2) = \frac{5+\sqrt{145}}{12} = [\overline{1,2,2,1,1}]$

$\langle 5,5,-6\rangle \to \langle -6,7,4\rangle \to \langle 4,9,-4\rangle \to \langle -4,7,6\rangle \to$
$\langle 6,5,-5\rangle \to \langle -5,5,6\rangle \to \langle 6,7,-4\rangle \to \langle -4,9,4\rangle \to$
$\langle 4,7,-6\rangle \to \langle -6,5,5\rangle \to f_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$f_3 = \langle 3,7,-8\rangle \quad \omega_2(f_3) = \frac{7+\sqrt{145}}{16} = [\overline{1,5,3}]$

$\langle 3,7,-8\rangle \to \langle -8,9,2\rangle \to \langle 2,11,-3\rangle \to \langle -3,7,8\rangle \to$
$\langle 8,9,-2\rangle \to \langle -2,11,3\rangle \to f_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$f_4 = \langle 8,7,-3\rangle \quad \omega_2(f_4) = \frac{7+\sqrt{145}}{6} = [\overline{3,5,1}]$

$\langle 8,7,-3\rangle \to \langle -3,11,2\rangle \to \langle 2,9,-8\rangle \to \langle -8,7,3\rangle \to$
$\langle 3,11,-2\rangle \to \langle -2,9,8\rangle \to f_4$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Algorithme calculant le cycle des formes réduites proprement équivalentes à une forme quadratique donnée.

Soit $f_0 = \langle a_0, b_0, c_0\rangle$ une forme quadratique de discriminant $\Delta > 0$. Alors, $\alpha_0 = \frac{b_0+\Delta}{2|c_0|} = [\overline{u_0, \ldots u_{l-1}}]$ et le cycle des formes réduites proprement équivalentes a f_0 est formé des formes réduites $f_0 \ldots f_{r-1}$ où

$$r = \begin{cases} l & \text{si } l \text{ est pair,} \\ 2l & \text{si } l \text{ est impair.} \end{cases}$$

Pour $0 \leq i \leq r-2$,

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= \langle a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \text{signe}(a_i)u_i \end{pmatrix} f_i \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \text{signe}(a_i)u_i \end{pmatrix} f_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\text{signe}(c_i)u_i \end{pmatrix} f_i \\ &= \langle (-1)^i \text{signe}(c_0)Q_i, P_{i+1}, \ (-1)^{i+1}\text{signe}(c_0)Q_{i+1}\rangle. \end{aligned}$$

Observation: Si l est impair, alors $f_l = \langle -a_0, b_0, -c_0\rangle$.

Théorème

Deux formes quadratiques réduites de discriminant $\Delta > 0$ sont proprement équivalentes si et seulement si elles appartiemment au même cycle.

L'idée de la démonstration est d'observer que si $f \approx g$, alors $\omega_2(g)$ est un nombre réduit associé à une forme quadratique du cycle de f; par conséquent, f et g sont dans le même cycle.